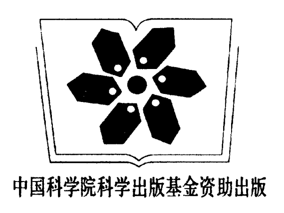

中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书　9

# 辐射和光场的量子统计理论

(理论物理三卷集之三)

曹昌祺　著

科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书是作者在北京大学物理系为光学专业和理论物理专业研究生授课讲义的基础上修改和补充写成的.内容包括了量子电动力学基础和量子光学的基本概念和理论方法(包括新近发展的量子随机轨迹方法),其中包括作者本人的研究结果.

本书内容大致分为两部份:一是有关光场和电子场(相对论性)的量子化,光子的基本性质(如自旋、宇称、动量和角动量、能量等),狄拉克方程的物理内涵和正反电子对的概念,量子电动力学的基本方程组,洛伦兹条件问题,散射算符和费曼图,原子对光子的吸收,电多极辐射和磁多极辐射,原子在强光下的拉比振荡,共振荧光等;二是光场的相干态和挤压相干态,光场的量子统计描述,光学测量与光场的相关函数,原子和光场与库的作用,耗散与涨落的量子统计理论(主方程和量子朗之万方程),激光的量子理论等.

本书可作为光学专业、物理专业和量子电子学专业研究生教材,也可供从事激光理论、非线性光学理论、量子光学和量子电子学以及量子信息学理论的专业人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

辐射和光场的量子统计理论/曹昌祺著.—北京:科学出版社,2006
(现代物理基础丛书;9)

ISBN 7-03-016984-0

Ⅰ.辐… Ⅱ.曹… Ⅲ.①辐射-量子统计物理学②光-电磁场-量子统计物理学 Ⅳ.O414.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第016592号

责任编辑:胡 凯 张邦固/责任校对:李奕萱
责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年3月第一次印刷 印张:31
印数:1—3 000 字数:594 000

**定价:60.00元**
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

# 前　　言

辐射和光场的量子统计理论是量子光学的理论基础.

量子光学是近代光学的重要组成部分,它是20世纪中后期才发展起来的,距今不过50年. 其创始标志是Hanbury Brown-Twiss关于光场强度相关性的实验和对它的量子解释,以及对激光量子统计性的研究. 众所周知,相位相关性显示了光场的波动性质,而强度的相关性则显示出光子的量子统计性质. 对激光的动力学研究进一步发展了光场与原子相互作用的量子统计理论方法.

量子光学的研究对象正是光场的量子统计特性以及光场与物质相互作用的微观过程,以探索新的特征量子光场(例如反群聚光场,光场的挤压态)和发展新的发光器件.

量子光学与光学中其他分支如激光物理,信息光学和非线性光学等有着紧密联系,例如:探讨新机制的激光器,发展量子信息学,从量子统计的深度来研究非线性光学过程. 其他如量子测量以及对量子力学基本理论的验证(通过量子光学来进行有它的优越性)也是量子光学的内容. 量子计算机的研究是目前国际上很受重视的方向,但难度很大,其中也涉及许多量子光学范畴内的问题,目前正在进行多方面的探索. 最后想指出的是,过去光场与物质的相互作用主要是指光场与原子分子的作用. 现在又延伸到与半导体中的电子、空穴以及激子的作用,派生出半导体微腔量子电动力学(QED)这一分支. 它发展出的微型光学器件,有可能在集成光电路方面发挥重要作用. 至于新开始研究的原子波学(将光子场替换成原子场,通常又称为原子光学)也常是量子光学研究的范围,但已不是原来意义上的量子光学领域.

以上情况表明:具有较深厚的辐射和光场量子统计理论基础,可能对培养21世纪的创新人才具有重要意义,正是在这种认识下,北京大学物理系决定为光学专业开设这门必修课,选修此课的还有部分理论物理专业和电子学系的研究生.

本书内容大致分为两部分,一是有关光场和电子场的量子化①,光子的基本性质(如自旋、宇称、动量和角动量、能量),狄拉克方程的物理内涵,量子电动力学的

---

① 考虑到以后量子光学过程可能会扩展到高能电子,本课中将采用相对论性的电子场. 其实对于重原子的内层电子,其束缚能的相对论修正已不小,达到了10%左右. 原子物理中的自旋-轨道耦合项,也需从相对论性理论来推导. 更重要的是,不通过相对论性理论就得不出双光子作用项,而此作用项对光子-原子散射过程极为重要.

基本方程组，对洛伦兹条件的处理，散射算符，费曼对正电子的处理和费曼图规则，原子对光子的吸收，电多极辐射和磁多极辐射，原子和自由电子对光子的散射等（原子的拉比振荡和共振荧光也可算在这一部分，但亦与第二部分相关）．二是光场的相干态与挤压相干态，光场的量子统计描述，光学测量与光场的相关函数，原子和光场与库的作用，耗散与涨落的量子统计理论（主方程与量子朗之万方程），简单激光系统的量子理论等．

由此可见，本书包括了量子电动力学基础和量子光学的基本概念和理论方法（含新近发展的量子随机轨迹方法）．正文后并有若干附录，其中包含了作者本人与合作者的一些研究成果．

本书是作者在十多年来于北京大学讲授此课的讲稿的基础上写成的，具有教材的性质，注重可读性，并特别着重于对基本概念的深入阐述．因此本书的第一部分也可作为量子力学和量子场论的参考书．

在从讲稿写成书时，又补充了一些内容，其分量已超出教学的要求（文中用小字号表示），有些章节作了较大的修改，几个附录完全是新加的（具有简介的性质，不是按教材写的）．学生在学本门课程以前，已经学过分析力学、电动力学、统计物理和量子力学，这些都是本课的先备课程，其中电动力学和量子力学尤其重要．在本书中，电磁单位采用高斯制．高斯单位制在理论物理中具有明显的优点，其中，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都具有相同的量纲，真空的介电常数和导磁系数都等于 1．高斯制中有三个基本量纲，比国际单位制少，比自然单位制多（后者只有一个基本量纲），数目比较适中．作者认为，学物理的人如果只知有国际单位制，不知其他，则犹如《桃花源记》中的人“不知有汉，无论魏晋”，连阅读国际科学文献都可能会遇到困难，是很不合适的．

本课程主要参考书前后共计有：阿希叶泽尔和别列斯捷茨基《量子电动力学》（有中译本和英译本）；Louisell：Quantum Statistical Properties of Radiation，Loudon：The Quantum Theory of Light（有中译本）；Haken：Light Vol1，2；Sangent Ⅲ，Scully and Lamb：Laser Physics；Haken：Laser Theory；Nussenzveig：Introduction to Quantum Optics；Walls and Milburn：Quantum Optics；Carmichael：An Open System Approach to Quantum Optics；Scully and Zubairy：Quantum Optics；Carmichael：Statistical Methods in Quantum Optics；Master Equations and Fokker-Plank Equations 等．

本书是作者《理论物理三卷集》之三，其一为《电动力学》，其二为《量子规范场论》，这两本曾于 1961 年和 1990 年由人民教育出版社和高等教育出版社分别出版，修定后将归入三卷集重新出版．

作者最初学习半导体物理，研究生毕业后分配到兰州大学任教，研究方向改成基本粒子物理．1957 年调回到北京大学物理系，仍继续这一方向．但 1958 年后，

正常科研工作受到极大干扰. 再加上“科学革命”、“三年困难”、“下放劳动”、“社教四清”以及“文革”动乱,华年蹉跎而去(聊寄数语,是为青年读者共勉). 20 世纪 90 年代初,转到量子光学方向,在此领域工作不过十年多,认识甚为有限. 书中不当和疏误之处在所难免. 如蒙指正,不胜感谢. 来信请寄北京大学物理学院.

曹昌祺

2004 年 5 月于密歇根湖畔

(时值在美国西北大学任访问教授)

# 目　录

# 第一章 电磁场的量子化 自由光子的状态

光的量子性是历史上奠定量子论的第一个基本事实. 所谓光子就是指光场或电磁场的量子. 光子的动量和能量分别与电磁场的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和角频率 $\omega$ 成正比: $\boldsymbol{P}=\hbar\boldsymbol{k}, E=\hbar\omega$. 除此而外光子还有角动量和宇称. 角动量包括自旋角动量和轨道角动量,光子的自旋量子数为 1. 相应地,宇称分为内禀宇称和轨道宇称,光子的内禀宇称为 $-1$.

我们知道,自旋量子数为半整数的粒子(场量子)服从费米统计,因此这种粒子统称为费米子,自旋为整数的粒子服从玻色统计,因而统称为玻色子. 现在已知的基本费米子分为轻子和夸克子两类,它们的自旋量子数都是 1/2. 在我们通常所熟悉的粒子中,电子和中微子属于轻子,而质子、中子和 $\pi$ 介子等则是由夸克子构成的复合粒子. 至于现在已知的基本玻色子,除了人们熟悉的光子(它传递电磁作用)以外,还有传递强作用的色胶子以及传递弱作用的 $W^{\pm}$ 玻色子和 $Z^0$ 玻色子. 它们的自旋量子数都等于 1.

现代物理学认为,场是物质存在的基本形式,所有的粒子实际上都是场的量子. 场量子与量子力学中的粒子相比,并不完全相同,只有在非相对论近似下,才能把两者拟合起来(参见第二章). 对于光子,由于不存在非相对论近似,故光子在任何情况下都不能看作是某种量子力学意义下的粒子.

在本章中,我们将讨论电磁场的量子化,并通过这种讨论来阐明光子的基本性质和自由光子的一些重要状态. 讨论将主要采用海森伯图象(§1.1 除外).

## §1.1 对量子力学的简单概括

如上文所述,按照现代物理学的观点,量子理论的根本形式是量子场论. 量子力学基本上是在非相对论情况下它的一种近似形式:在非相对论情况,电子场的狄拉克方程近似为薛定谔方程,场的量子化对应于薛定谔波函数的量子化即通常所说的二次量子化,它等价于多体的量子力学. 然而从历史上说,先建立起来的是量子力学. 在物理教学中也是先学习量子力学. 因此在这一节中我们将从量子力学出发,总结量子理论的一般特点,以便在此基础上建立量子场的理论.

什么是量子力学与经典力学的基本差别? 只要学过初等量子力学的人都会知道:

i) 在经典力学中,一个(无自旋)粒子的状态由它的坐标和动量(普通意义的

或广义的)的一组值,例如($x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3$)来确定,对应于相空间中的一个点. 该粒子的一切物理量均可表示为它们的函数. 而在量子力学中,粒子的状态则由一个波函数 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$来确定,有关该粒子的一切可能的物理知识,都可从该波函数得出.

ii) 在经典力学中,任一个力学量都是用一个普通数(称为 $c$ 数)来表示,而在量子力学中则是用一个运算在波函数上的算符(又称 $q$ 数)来表示.

然而上述回答只说明了(在最简单的单粒子情况下)两者在数学表述上的差别,并没有阐明这种差别的物理内涵.

首先要指出,量子力学中的波函数并不就是现实三维坐标空间中实质性的波(在这一点上它与场不同,场是现实三维空间中实质性的波),这可从多粒子或刚体(如多原子分子)的波函数即可看出. 对双粒子体系,波函数为 $\varphi(x_1,x_2,x_3,x'_1,x'_2,x'_3)$,它是六维空间中的函数. 刚体的广义坐标则可取为其质心坐标($x_1^c,x_2^c,x_3^c$)和三个取向角($\theta_1,\theta_2,\theta_3$),其量子波函数为 $\varphi(x_1^c,x_2^c,x_3^c,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$,即刚体位形空间中的函数. 就是对单粒子而言,它的波函数也可用动量空间(或其他广义空间)中的函数如 $\psi(p_1,p_2,p_3)$来表示. 动量空间是一种作为数学表示手段的抽象空间,并不是现实的三维空间.

那么量子力学波函数的本质意义是什么呢? 应该说,它在本质上是状态叠加表示中的系数,属粒子量子状态的一种数学表示. 例为对单粒子,若用抽象代数符号$|A\rangle$表示它的任意一个状态,用$|x_1,x_2,x_3\rangle$和$|p_1,p_2,p_3\rangle$分别表示具有确定坐标($x_1,x_2,x_3$)和确定动量($p_1,p_2,p_3$)的状态,则根据状态叠加原理,$|A\rangle$可表示为各个$|x_1,x_2,x_3\rangle$态的叠加,也可表示为各个$|p_1,p_2,p_3\rangle$态的叠加,而波函数 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$和 $\psi(p_1,p_2,p_3)$就是相应叠加表示中的系数:

$$|A\rangle=\int\varphi(x_1,x_2,x_3)\,|x_1,x_2,x_3\rangle\mathrm{d}^3x,$$

或

$$|A\rangle=\int\psi(p_1,p_2,p_3)\,|p_1,p_2,p_3\rangle\mathrm{d}^3p.$$

要进一步说明上式的物理内涵,就要涉及量子力学中两个最主要的新概念,一是与“测不准关系”相联系的概念,它表明在量子理论中并非所有力学量都可以同时准确地测量,另一是“状态叠加”的概念,这也是经典理论中所没有的. 力学量之所以要用算符表示也同这些问题相关.

量子力学究竟在物理概念上与经典力学有哪些基本差别? 它的理论框架是怎样建立的? 我们简单列举如下:

1) 在微观物理中,力学量的取值可能受到经典理论所没有的限制,例如角动

量和原子的束缚能级就只能取某些特定的离散值．量子力学把一个力学量全部可能取的值称作它的本征值．

2）对于一个经典状态，所有的力学量的值都是确定的，而对于微观体系的量子状态，不可能所有的力学量都具有确定的（测量）值．换句话说，对该态作某些力学量的测量时，所得出的结果将具有随机性：它的各个本征值以一定概率出现．如果某个力学量 $M$ 在该态的值是确定的，则该态就称为力学量 $M$ 的本征态，相应的值 $m$ 则称为该力学量的本征值．若干个可同时测准的力学量将具有共同的本征态．

3）量子力学认定：可同时测准的独立的力学量的最大数目等于该体系的自由度 $n$．此值比经典理论中的值少一半．在经典理论中，所有的力学量原则上都可测准，但独立的数目为 $2n$，可取为 $n$ 个广义坐标和 $n$ 个广义动量．其他力学量都可表为它们的函数因而不是独立的．

在量子力学中，由 $n$ 个可同时测准的独立力学量所构成的集合将称为力学量的一个完全集合，如果它们的本征值集合能完全确定体系的一个状态，不再有简并．按此标准，$(p_1, p_2, p_3^2)$就不构成单粒子力学量的完全集合．完全集合有不同的选取方案，如$(x_1, x_2, x_3)$，$(p_1, p_2, p_3)$．

4）状态的叠加，这是量子力学新引入的另一个基本概念．仍以单粒子为例，对于能量、角动量的平方和角动量的第 3 分量的本征态（以下简称“能量和角动量”的本征态）$|E, l, l_3\rangle$，当我们测这些力学量时，得出的值确定地等于 $E, l(l+1)\hbar^2$ 和 $l_3\hbar$．但是当我们对该态测量动量时，结果具有随机性，可能出现各种 $p_1, p_2$ 和 $p_3$ 的值．这一情况使得我们把状态$|E, l, l_3\rangle$看作是各种动量本征态$|p_1, p_2, p_3\rangle$的叠加．值得强调的是，这并不意味着一个“能量和角动量”态“包含”各种动量的子态．因为当我们对上述测量后出现的某个动量本征态再进行能量和角动量测量，其结果并不一定就是原来的$(E, l(l+1)\hbar^2, l_3\hbar)$，而可能取其他的一系列值．这就表明，当初的态$|E, l, l_3\rangle$是由各种动量本征态以某种方式叠加而成的单纯态，而任一个动量本征态又是各种“能量和角动量”态叠加而成的单纯态．为了强调这一特性，我们常把这种叠加称作相干叠加，它不同于若干个状态的混合．或者说，它不同于一个统计系综．一个状态并可以多种方式表成其他状态的叠加，如$|E, l, l_3\rangle$又可表成各种坐标本征态$|x_1, x_2, x_3\rangle$的叠加．

需要强调的是，只有同一个体系的状态才能叠加在一起，两个体系的状态是不能叠加在一起的．

很显然，在经典力学中不存在这种状态叠加，经典波的叠加与量子状态叠加也有着本质差别．对于经典波，叠加出来的波并不部分地处于原来各个波的状态，当对叠加波的任何力学量进行测量时，都不会以一定概率显示原来各个波的值．

以上四条都属于量子力学引入的新概念，其中第 2,4 条是对经典概念的根本性变革.

5) 设 $S$ 为体系力学量的一个完全集合，则它们全部的共同本征态 $|s_j\rangle$ 将构成体系状态的完备集(其中 $s_j$ 代表集合 $S$ 的任一组本征值). 于是体系的任何状态 $|A\rangle$ 都可表示为它们的叠加. 在 $j$ 取分立值的情况下，叠加式可表为

$$|A\rangle = \sum_j a(s_j)|s_j\rangle, \tag{1.1.1}$$

$a(s_j)$ 一般为复数，在 $|A\rangle$ 和 $|s_j\rangle$ 都归一的情况下，$a(s_j)$ 称为概率幅，它的绝对值平方 $P(s_j)$ 等于“对状态 $|A\rangle$ 进行力学量集合 $S$ 的测量时，得出结果为 $s_j$ 的概率”. 要特别指出的是，$a(s_j)$ 不能简单地取成 $P(s_j)$ 的平方根. 否则，(举例来说)当 $|E,l,l_3\rangle$ 表成各动量本征态 $|p_1,p_2,p_3\rangle$ 的叠加，而每个动量本征态又表成各种能量角动量的叠加时，就不能还原到原来的 $|E,l,l_3\rangle$. 引入复数的概率幅正是叠加的相干性的体现，也显示出“量子叠加”与“混合”的区别.

两个相同状态如两个 $|s_{j0}\rangle$ 的叠加结果将为 $c|s_{j0}\rangle$. 在归一化后，与原态 $|s_{j0}\rangle$ 最多差一个因子 $e^{i\theta}$. 而 $|s_{i0}\rangle$ 与 $e^{i\theta}|s_{j0}\rangle$ 在物理上没有什么不同，因为对 $S$ 测量的结果未变. 上述情况也反映量子状态的叠加与经典波叠加的差异. 在经典力学中，两个相同波叠加后，其能量和动量等物理量都与原波不同.

(1.1.1)式中的 $a(s_j)$ 又称为 $|A\rangle$ 在 $|s_j\rangle$ 上的投影，并记作 $\langle s_j|A\rangle$. 若 $a(s_j)=0$ 则称 $|A\rangle$ 与 $|s_j\rangle$ 正交，代表对态 $|A\rangle$ 进行 $S$ 的测量时，得出测量值为 $s_j$ 的概率为零. 显然，集合 $S$ 的两个不同本征态 $|s_i\rangle$ 和 $|s_j\rangle$ 是正交的. 因而 $S$ 的本征态集合构成体系状态的正交完备集. 利用 $|s_j\rangle$ 的正交归一性，不难验证(1.1.1)式左方的 $|A\rangle$ 确是归一的.

量子状态的上述性质使它类似于矢量，因而量子态的数学表示被称为态矢量(抽象代数意义下的矢量). 全部态矢量 $|s_j\rangle$ 的集合构成态矢量空间(无穷维)中的一组基矢. “系数集合” $a(s_j)$ 称为状态在 $S$ 表象中的表示. 对于单粒子(在不改变其自旋时)，状态在坐标表象中的表示就是通常所谓的波函数 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$. 由此可见，量子波函数的本质意义是与状态的叠加性相联系的①.

6) 关于表示系数的相因子. 如上所述，(1.1.1)式中 $|A\rangle$ 的表示系数 $a(s_j)$ 的绝对值由概率 $P(s_j)$ 确定，因而具有客观性. 至于各个 $a(s_j)$ 的相位因子 $e^{i\theta_j}$，则情况与 $|a(s_j)|$ 不同，它们既含有客观性因素又含有约定性因素. 这是因为作为基矢

① 以上讨论表明，早期的提法“微观粒子具有波粒二象性”并不妥当. 因为它把“波”和“粒”各作一象并提，暗含着“波”是现实三维空间中的实体波. 我们在第 2 页还曾指出：对于刚体(如多原子分子)，波函数为 $\varphi(x_1^c,x_2^c,x_3^c,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$，并不就是三维空间坐标的函数.

的$|s_j\rangle$乘上任一个相位因子$e^{i\Theta_j}$后仍代表同一状态(为前所述,它仍为力学量集合$S$的"本征值为$s_j$的"本征态,而且仍是归一的),于是当用$|s_j\rangle'\equiv e^{i\Theta_j}|s_j\rangle$来代替$|s_j\rangle$作基矢进行展开时,原来的系数$a(s_j)$即变换成$a'(s_j)=a(s_j)e^{-i\Theta_j}$. 新的$a'(s_j)$同样是状态$|A\rangle$在$S$表象中的表示. 这表明状态表示中的位相因子含有约定性因素. 但是两个态$|A\rangle$和$|B\rangle$在基矢$|s_j\rangle$上的投影$a(s_j)$和$b(s_j)$之间的位相差在上述变换下保持不变. 这个结果是必须的,因上述位相差具有客观性意义:在$|A\rangle$和$|B\rangle$的叠加态中测出$S$的本征值为$s_j$的概率就与上述位相差的取值有关.

7) 关于力学量的数学表示. 定义线性算符$\hat{M}$如下:它作用到力学量$M$的本征态$|m_j\rangle$上的结果即定义为$m_j|m_j\rangle$,而作用到任意状态$|A\rangle$上时,要先将$|A\rangle$按$|m_j\rangle$展开,再按上面的定义作用到展开的各项上. 例如当$|A\rangle=\sum\limits_j a_j|m_j\rangle$时,$\hat{M}|A\rangle=\sum a_j m_j|m_j\rangle$. 根据这一定义,力学量$M$在任意态$|A\rangle$中的期望值$\sum\limits_j|a_j|^2m_j$就可表示成$\langle A|\hat{M}|A\rangle$. 而且$M$的任意函数$f(M)$在状态$|A\rangle$中的期望值就等于$\langle A|f(\hat{M})|A\rangle$[$f(\hat{M})$作用到$|m_j\rangle$上的结果,按定义就是$f(m_j)|m_j\rangle$]. 在上述意义下,算符$\hat{M}$成为力学量$M$的数学表示.

我们看到,在量子力学中力学量之所以要用算符表示是与前面所阐述的第2, 4点相关. 在经典力学中,由于各力学量在所有可能的状态中都具有确定值,也不存在状态的叠加,故力学量只需用普通数($c$数)表示即可.

力学量算符像态矢量一样可以用不同表象来表示. 算符$\hat{M}$在它自己的表象中的表示矩阵是对角的,即$M_{jk}=\langle m_j|\hat{M}|m_k\rangle=\delta_{jk}m_j$. 在其他表象中则有非对角元,如在$S$表象中$M^s_{jk}=\langle s_j|\hat{M}|s_k\rangle$一般不为零. 当我们将基矢$|s_j\rangle$乘上任意相因子即用$|s_j\rangle'=e^{i\Theta_j}|s_j\rangle$来代替$|s_j\rangle$时,$M^s_{jk}$将相应地变为$M^{s\prime}_{jk}=M^s_{jk}e^{-i(\Theta_j-\Theta_k)}$. 这表明非对角元的相因子同样含有约定性因素,情况与态矢量相应.

8) 根据5)~7)的讨论,可以得出:两个"可同时测准"的力学量所对应的算符是可以对易的. 对于任意两个力学量$\hat{L}_1$和$\hat{L}_2$,如令$\hat{\delta}\equiv\frac{1}{i}(\hat{L}_1\hat{L}_2-\hat{L}_2\hat{L}_1)$,则在任意态中,$\hat{L}_1$和$\hat{L}_2$测量值的均方差将满足下述测不准关系:

$$\Delta L_1\Delta L_2\geqslant\frac{1}{2}|\langle\hat{\delta}\rangle|,\tag{1.1.2}$$

其中$\Delta L$代表$(\langle\hat{L}^2\rangle-\langle\hat{L}\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$,称为算符$\hat{L}$在该态中的测不准度,$\langle\hat{\delta}\rangle$代表$\hat{\delta}$在该态中的期望值. $\hat{L}_1\hat{L}_2-\hat{L}_2\hat{L}_1$称作两算符的对易子并记作$[\hat{L}_1\hat{L}_2]$. 在$\hat{\delta}$的定义中将对易子除以i是使$\hat{\delta}$成为厄米算符.

在体系的力学量可表为广义坐标算符$\hat{q}_j$和广义动量算符$\hat{p}_j$的代数函数情况下,只要知道$\hat{q}_j$和$\hat{p}_k$之间的对易子就可确定这些力学量之间的对易子,例如

$[\hat{p}_k^2, \hat{q}_j] = \hat{p}_k[\hat{p}_k, \hat{q}_j] + [\hat{p}_k, \hat{q}_j]\hat{p}_k$. 量子理论的基本假设是(指在薛定谔图象中. 若取海森伯图象,则应为等时对易子)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad [\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0. \tag{1.1.3}$$

这就是说在不同自由度之间,$\hat{q}$与$\hat{p}$是可对易的(从而不同自由度的任何力学量算符都是可对易的),只有同一自由度的$\hat{q}$与$\hat{p}$才不可对易,即不可同时完全测准. 相应的测不准度关系为

$$\Delta q_j \Delta p_j \geqslant \frac{1}{2}\hbar. \tag{1.1.4}$$

(1.1.3)式通常称作量子化条件. 对于单粒子系,上述基本假设(即量子化条件)的物理基础就是德布罗意关系 $p = \hbar k$(以及平面波的表式要用 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 的形式而不是 $\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\theta)$的形式. 原因是:这时电子在空间各点的概率密度是均匀的). 这样,在 $x$ 表象$\hat{p}_i$ 的表示就是$-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_j}$,以使(1.1.3)式成立. 狄拉克从另一角度普遍地论证了这一基本假设. 他引入量子泊松括号$\{\hat{L}, \hat{M}\}_Q$. 要求它与经典的泊松括号满足相同的交换、分配和结合等规则,由此即得出$\{\hat{L}, \hat{M}\}_Q$ 与$\dfrac{1}{i}(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})$成正比. 比例系数为一普适常数并具有[作用量]$^{-1}$的量纲,因而与普朗克常数成反比. 将它记作 $\hbar^{-1}$,并称 $\hbar$ 为约化的普朗克常数. 狄拉克再假定 $q$ 与 $p$ 之间的量子泊松括号与经典泊松括号的值相等,这样就得出(1.1.3)式及 $\hbar = h/2\pi$.

物理学中所引入的物理量原则上都是从守恒律定出来的,否则引入的量就没有什么意义. 而守恒律又与物理规律具有的对称性相联系:动量(指平动量)守恒来自空间坐标架平移对称性,能量守恒来自时间原点平移的对称性. 角动量守恒来自空间坐标架转动对称性. 在量子理论中,情况也一样,并且还引入宇称这个新物理量,其守恒与空间坐标架的反射对称性(即从右手坐标系变成左手坐标系)相联系. 对于角动量守恒和能量守恒,有时也简单地通过它们的经典表达式,将其中动量换成算符来给出.

9) 在薛定谔图象中,状态随时间的变化可由德布罗意另一关系式 $E = \hbar\omega$ 来确定. 对能量本征态于是有①

$$|t\rangle = |t_0\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}. \tag{1.1.5}$$

对任意态,可先将$|t_0\rangle$按能量算符$\hat{H}$的本征态$|E_j\rangle$来展开,再按上式确定每项随时间的变化. 这样,若

$$|t_0\rangle = \sum_j a(E_j)|E_j\rangle,$$

① 归一化条件要求:状态随时间变化应由因子 $e^{-iEt/\hbar}$ 表示而不是由 $\sin(Et/\hbar+\theta)$表示.

则有

$$| t\rangle = \sum_j a(E_j) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)} | E_j\rangle.$$

两边对 $t$ 微商即得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | t\rangle = \sum_j E_j a(E_j) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)} | E_j\rangle = \hat{H} | t\rangle, \tag{1.1.6}$$

这就是薛定谔方程．它是时间的一阶方程，而且是一个线性方程因此状态之间的叠加关系并不随时间而改变．

薛定谔方程虽然表明状态随时间连续地变化，但它并不与量子跃迁的概念相矛盾．将此两者统一起来的关键就是状态叠加原理．例如若

$$| t\rangle = \sum_j a_j(t) | m_j\rangle, \qquad a_j(0) = \delta_{j0},$$

其中 $|m_j\rangle$ 为一组正交归一的完备态集合．则当 $t=0$ 时，体系完全处于 $|m_0\rangle$ 态，而当 $t=\varepsilon$（$\varepsilon$ 为任意正值小量）时，就会出现从 $|m_0\rangle$ 到 $|m_j\rangle_{j\neq 0}$ 态的跃迁，只是跃迁的概率为相应的小量．在这里，状态 $|t\rangle$ 随时间的连续变化只是表明跃迁到 $|m_j\rangle$ 的概率幅是连续变化的．

由于量子力学课程中通常采用薛定谔图象，下面将对读者较不熟悉的海森伯图象作一些说明．

10) 在海森伯图象中，态矢量与 $t$ 无关．这时体系的每个态矢量 $|s\rangle$ 可视为标志它的一个运动过程．该态矢量可通过该过程在初始时或其他某个时刻的状况来描述．例如“在给定力场中运动”的单粒子，可用 $|\boldsymbol{x}_0, t_0\rangle$ 来标志这样一个过程，即 $t=t_0$ 时粒子具有确定的位置 $\boldsymbol{x}_0$．因此在海森伯图象中态矢量的作用相当于给出某种“初”条件，而体系的运动体现在力学量算符随时间的变化上（好比经典物理中力学量随时间变化），任意 $t$ 时刻的算符要作用到态矢量上，先要通过运动方程将它用 $t_0$ 时刻的算符表示出来，然后再对态矢量作用．

在海森伯图象中，状态之间同样存在叠加关系．而量子化条件(1.1.3)应写成等时的对易关系，即为

$$[\hat{q}_j(t), \hat{p}_k(t)] = i\hbar\delta_{jk}, \quad [\hat{q}_j(t), \hat{q}_k(t)] = [\hat{p}_j(t), \hat{p}_k(t)] = 0. \tag{1.1.7}$$

注意当 $t'\neq t$ 时，$[\hat{q}_j(t), \hat{q}_k(t')]$ 和 $[\hat{p}_j(t), \hat{p}_k(t')]$ 一般都不等于零，即使 $j\neq k$．

如果两个算符的时间不同，可通过运动方程将它们化成同一时刻的算符再应用 $[\hat{A}, \hat{B}_1\hat{B}_2] = [\hat{A}, \hat{B}_1]\hat{B}_2 + \hat{B}_1[\hat{A}, \hat{B}_2]$ 等关系来求其对易关系．算符满足的运动方程为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{L}(t) = [\hat{L}(t), \hat{H}]. \tag{1.1.8}$$

(1.1.8)式可通过海森伯图象与薛定谔图象间的变换，由薛定谔图象中的运动方程

导出,因此它的实验基础仍是关系式 $E=\hbar\omega$.

另外,(1.1.7)和(1.1.8)式可以写成量子泊松括号形式. 两个算符 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 的量子泊松符号 $\{\hat{A},\hat{B}\}_Q$ 定义即为 $[\hat{A},\hat{B}]$. 于是有

$$\{\hat{q}_j(t),\hat{p}_k(t)\}_Q=\delta_{jk},\quad \{\hat{q}_j(t),\hat{q}_k(t)\}_Q=\{\hat{p}_j(t),\hat{p}_k(t)\}_Q=0,\tag{1.1.9}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{L}(t)=\{\hat{L}(t),\hat{H}\}_Q.\tag{1.1.10}$$

它们与经典力学中的方程形式相同.

以上十个基本点从一般的角度概括了量子力学的物理内涵和它的理论构架,进行这种抽象概括的目的是为了对场进行量子化,以在经典场论的基础上建立量子场论.

## §1.2 场的广义坐标和它的量子化

从经典的拉格朗日-哈密顿理论体系来看,场(指有经典意义的场,如标量场、矢量场和张量场等)与粒子系的主要差别是自由度数的差别. 质点系的自由度数是有限的,而场的自由度数则是无限的(参见下文说明). 在经典理论中,对于自由度数为 $n$ 的粒子系,它在某个时刻的运动状态可由 $2n$ 个数来表示,它们可取为 $n$ 个广义坐标 $q_j$ 和 $n$ 个广义动量 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$,当然这 $2n$ 个数也可取作广义坐标和相应的广义速度 $\dot{q}_j$. 场的情况则不同,它的运动状态要用若干个场函数来表示. 下面先来看标量场 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ 的情况,然后再转到电磁场的问题上来.

### 1. 标量场的广义坐标和广义动量 标量场的量子化

在经典理论中,标量场在某个时刻的状态要用两个函数 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\dot{\varphi}(x_1,x_2,x_3)$ 来描述. $\varphi$ 和 $\dot{\varphi}$ 分别对应于粒子系的广义坐标 $q$ 和广义速度 $\dot{q}$, $(x_1,x_2,x_3)$ 对应于自由度指标 $j$. 换句话说,空间每一点,对应于场的一个自由度. 该点的场值 $\varphi$ 代表场的一个"广义坐标",该点的 $\dot{\varphi}$ 代表场的一个"广义速度".

但量子化理论所需要的是正则动量. 与广义坐标 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 对应的正则动量可通过场的拉格朗日量 $L(t)$ 来确定,而 $L(t)$ 可表成场的拉格朗日函数(也就是拉格朗日量密度) $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},t)$ 的体积分形式

$$L(t)=\int\mathscr{L}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x.\tag{1.2.1}$$

$\mathscr{L}$对 $\boldsymbol{x}$ 和 $t$ 的依赖是通过 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$来体现的，即

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},t)=\mathscr{L}(\varphi(\boldsymbol{x},t),\nabla\varphi(\boldsymbol{x},t),\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)).\tag{1.2.2}$$

与 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$共轭的正则动量函数 $\pi(\boldsymbol{x},t)$的定义为

$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\boldsymbol{x},t),\nabla\varphi(\boldsymbol{x},t),\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t))}{\partial\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)},\tag{1.2.3}$$

即拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$对“广义速度”的偏微商. 自由标量场满足的方程为克莱因-戈登方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\kappa^2\right)\varphi(\boldsymbol{x},t)=0,\tag{1.2.4}$$

写成协变形式即为$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}-\kappa^2\varphi=0$，其中 $\kappa$ 为量纲等于 $\mathrm{L}^{-1}$的参量. 相应的标量场的拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$应为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[-(\nabla\varphi)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\kappa^2\varphi^2\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}-\frac{1}{2}\kappa^2\varphi^2,\tag{1.2.5}$$

因为将它代入拉格朗日方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}\tag{1.2.6}$$

中，正好化出场方程(1.2.4)（参见电动力学书：注意，在上式的计算中$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$和 $\varphi$ 都要看成独立变量）.

有了(1.2.5)式，将它代入(1.2.3)式右方得

$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t},\tag{1.2.7}$$

即 $\pi$ 与“广义速度”成正比. 场的哈密顿量为

$$H=\int\mathscr{H}(\pi,\varphi,\nabla\varphi)\mathrm{d}^3x,\tag{1.2.8}$$

其中

$$\mathscr{H}=\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L}\tag{1.2.9}$$

称为哈密顿量密度. 通常 $\mathscr{H}$要用 $\varphi$，$\nabla\varphi$ 和$\pi$ 来表示，将(1.2.9)式右方所含的 $\dot{\varphi}$ 用 $c^2\pi$ 代替，即得出

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}[c^2\pi^2+(\nabla\varphi)^2+x^2\varphi^2].\tag{1.2.10}$$

场的哈密顿方程可由 $\mathscr{H}$求出：

$$\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial \mathscr{H}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \pi(\boldsymbol{x},t)}=c^2\pi(\boldsymbol{x},t), \tag{1.2.11}$$

及

$$\dot{\pi}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial \mathscr{H}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \varphi(\boldsymbol{x},t)}+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathscr{H}(\boldsymbol{x},t)}{\partial\left(\dfrac{\partial \varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}\right)}. \tag{1.2.12a}$$

值得注意的是 $\mathscr{H}$中真正的独立变量只有两个即 $\varphi$(代表广义坐标)和 $\pi$(代表广义动量)，$\nabla\varphi$ 不过是广义坐标随自由度 $\boldsymbol{x}$ 的变化率，因此 $\mathscr{H}$中含 $\varphi$ 的项不仅是(1.2.10)式中的第三项还有第二项．(1.2.12a)式右方就是这两项的贡献．将(1.2.10)式代入(1.2.12a)式后，即得

$$\dot{\pi}(\boldsymbol{x},t)=\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x},t)-\kappa^2\varphi(\boldsymbol{x},t). \tag{1.2.12b}$$

不难看出哈密顿方程(1.2.12b)与拉格朗日方程(1.2.4)一致．

下面来对标量场进行量子化．这时，场的广义坐标和与之共轭的广义动量都变成了算符．再将上节(1.1.7)式推广应用到此系统，即得出

$$\begin{gathered}[\hat{\varphi}(\boldsymbol{x},t),\hat{\pi}(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ [\hat{\varphi}(\boldsymbol{x},t),\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}',t)]=[\hat{\pi}(\boldsymbol{x},t),\hat{\pi}(\boldsymbol{x}',t)]=0.\end{gathered} \tag{1.2.13}$$

此即海森伯图象中标量场的量子化条件．在自由标量场情况 $\hat{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$和 $\hat{\pi}(\boldsymbol{x},t)$满足的方程与(1.2.11)和(1.2.12b)形式相同．$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$并满足像(1.2.4)式一样的克莱因-戈登方程．任意场算符满足的运动方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}(t)=[\hat{\theta}(t),\hat{H}]. \tag{1.2.14}$$

量子化条件(1.2.13)和运动方程(1.2.14)就构成标量场量子方程的基本方程组．

由于在本课程中并不需要用到量子标量场，因此不再对它作进一步的讨论．下面将转到电磁场的情况．

**2．经典电磁场的独立动力学变量**

电磁场属于规范场的一类，与标量场相比，它有一些复杂的情况．我们先就经典电磁场进行讨论．

在经典的牛顿方程中，电磁场对带电粒子的作用以洛伦兹力的形式出现．洛伦兹力只与电磁场的场强有关．另外，电磁场的能量和动量等物理量也可以用场强表示出来，这就使得在很长一段时间内，人们认为具有物理意义的场量就是场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 $A_0$ 只是一种辅助的数学工具，特别是在一般的动态情况，它们的值不是唯一确定的(不是可测量的量)．通过规范变换改变后的值与原来的值对应于同一场强分布．

在量子力学中,情况有所不同. 尽管 $\boldsymbol{A}$ 和 $A_0$ 的取值仍由于规范变换而不唯一确定,但它独立于场强的物理效应却可显示出来. 这是因为在量子力学中电磁场的作用不仅影响带电粒子波包的整体运动,还影响其中波函数位相变化. Bohm-Aharanov 效应就是一个例子. 它表明在电子波的双缝干涉实验中,即使在电子波经历的全部区域内都不存在磁场强度 $\boldsymbol{B}$,但有无矢势 $\boldsymbol{A}$ 的存在,干涉条纹将不同.

按上所述,描述电磁场的场变量应取为电磁势 $\boldsymbol{A}$ 和 $A_0$,它们合起来可写成 $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$,$\mu=1,2,3,4$,其中 $A_4=\mathrm{i}A_0$. 这样电磁场的自由度将不仅由 $\boldsymbol{x}$ 来标志,还要用 $\mu$ 来标志. 后者称为内部自由度. 但在下面的讨论中我们将指明,由于规范任意性和电磁场运动方程的特点,电磁场的内部自由度实际不是 4,而是 2.

我们先来确定电磁场的拉格朗日函数 $\mathscr{L}$.

本书将采用高斯单位制. 在此单位制中,场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{1.2.15}$$

电磁势与场强的关系为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla A_0-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{1.2.16}$$

方程(1.2.15)的协变形式是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\mu\nu}=-\frac{4\pi}{c}J_\nu, \tag{1.2.17}$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 代表场强张量的分量:

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{1.2.18}$$

在 $J_\mu$ 给定的情况下,电磁场的拉格朗日函数 $\mathscr{L}$ 可取成

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)+\frac{1}{c}A_\mu J_\mu=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{c}A_\mu J_\mu, \tag{1.2.19}$$

因为将它代入电磁场的拉格朗日方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}, \tag{1.2.20}$$

就得出(1.2.18)式.

仿照标量场的情况,与场量 $A_\mu$ 共轭的正则动量场应为

$$\pi_\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\mu}{\partial t}\right)}. \tag{1.2.21}$$

将(1.2.19)式代入后得到

$$\pi_j = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_j} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t}\right) = -\frac{1}{4\pi c}E_j, \quad j = 1,2,3,$$

$$\pi_4 = 0. \tag{1.2.22}$$

此式表明场强 $\boldsymbol{E}$ 与电磁场的广义动量成正比. 至于场强 $\boldsymbol{B}$ 由于同矢势 $\boldsymbol{A}$ 对空间坐标(它代表场的自由度)的微商相关,从而与“电磁场的广义坐标”相联系(对空间坐标微商,只涉及场的不同广义坐标间的差值).

由(1.2.22)式可见,第 4 个内部自由度的正则动量场恒为零. 不仅如此,前三个 $\pi_j$ 之间还存在一个约束关系

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{4\pi c}\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\rho. \tag{1.2.23}$$

对于电磁场来说,电荷密度 $\rho$ 代表外源,从而三个 $\pi_j$ 并非都是独立的动力学变量. 如果把 $\boldsymbol{\pi}$ 分解成横场部分 $\boldsymbol{\pi}_T$ 和纵场部分 $\boldsymbol{\pi}_L$,那么 $\boldsymbol{\pi}_L$ 将完全由 $\rho$ 确定($\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_L = -\frac{1}{c}\rho, \nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_L = 0$),于是只有 $\boldsymbol{\pi}_T$ 是独立的动力学变量. 下面我们还将说明在 $A_\mu$ 的四个分量中,$\boldsymbol{A}_L$ 可通过规范变换消去,随之 $A_4$ 也由 $\rho$ 确定. 这就表明真正独立的电磁场动力学变量只是 $\boldsymbol{A}_T$ 和与它共轭的 $\boldsymbol{\pi}_T$,即电磁场实际的“内部自由度”只等于 2.

由于$\nabla\psi$ 为纵场,故规范变换

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi, \quad A'_0 = A_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.2.24}$$

只改变 $\boldsymbol{A}_L$ 而不影响 $\boldsymbol{A}_T$. 我们并可选择适当的 $\psi$ 使 $\boldsymbol{A}_L$ 消去,这样矢势 $\boldsymbol{A}$ 中就只剩下横场,满足横场条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0. \tag{1.2.25}$$

这一规范称为库仑规范(见后)或横场规范. (1.2.25)式就是它的规范条件.

为了考察库仑规范中的标势 $A_0$,我们先写出 $\boldsymbol{A}$ 和 $A_0$ 所满足的方程. 将(1.2.16)式代入麦克斯韦方程组后,除去两个恒等式就只剩下

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{-4\pi}{c}\boldsymbol{J},$$

$$\nabla^2 A_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = -4\pi\rho. \tag{1.2.26}$$

此式是对任意规范都成立的. 在库仑规范条件(1.2.25)成立的情况下,(1.2.26)式化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\left(\boldsymbol{J} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0\right),$$

$$\nabla^2 A_0 = -4\pi\rho. \tag{1.2.27}$$

(1.2.27)第二式的解即为瞬时库仑势

$$A_0(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}',t)}{r}\mathrm{d}^3 x'. \tag{1.2.28}$$

此式表明,标势 $A_0(\boldsymbol{x},t)$完全由同时刻的电荷分布确定,因而不再代表场的动力学变量. 这一结果表明,在没有电荷时,消去矢势中的纵场部分 $\boldsymbol{A}_L$,也就同时消去了标势 $A_0$. 另外,(1.2.28)式还表明(1.2.27)第一式右方实际只与电荷和电流有关.

下面来求(1.2.27)第一式右方的散度:

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{J} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 A_0) = \nabla\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

在最后一个等式中我们利用了(1.2.27)第二式. 根据电荷守恒定律,上式右方等于零. 这表明 $\boldsymbol{J} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0$ 为横场. 换句话说,$\boldsymbol{J}$ 中的纵场部分可通过减去库仑规范中的 $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\dot{\rho}(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}^3 x'$ 而消去. 于是库仑规范中的矢势满足的方程可写作

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_T. \tag{1.2.29}$$

(1.2.29)式与泊松方程[(1.2.27)第二式]不同,它是波动方程,$\boldsymbol{A}$ 的解不完全由$\boldsymbol{J}_T$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的边条件决定,还要看 $\boldsymbol{A}$ 的初条件. 即使在全空间 $\boldsymbol{J}_T$ 恒为零,(1.2.29)式的解也并不就等于零而是自由的电磁波. 存在电流时,电磁波的分布和演化将受到影响,也就是说受到电流的作用.

在电动力学中,我们曾得到电磁能量 $U_{\mathrm{e.m}}$的表达式为 $\frac{1}{8\pi}\int(E^2 + B^2)\mathrm{d}^3 x$. 利用 $\boldsymbol{E}_L$ 可表成$(-A_0)$的梯度,可得

$$\int \boldsymbol{E}_T\cdot\boldsymbol{E}_L \mathrm{d}^3 x = -\int\nabla\cdot(A_0\boldsymbol{E}_T)\mathrm{d}^3 x + \int A_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}_T\mathrm{d}^3 x = 0.$$

因散度在全空间的体积分可化成在无穷远面上的面积分从而等于零. 另外,在库仑规范中 $\int \boldsymbol{E}_L^2\mathrm{d}^3 x = -\int\nabla A_0\cdot\boldsymbol{E}_L\mathrm{d}^3 x = 4\pi\int A_0\rho\mathrm{d}^3 x$,于是即化出

$$U_{\mathrm{e.m}} = \frac{1}{8\pi}\int(E_T^2 + B^2)\mathrm{d}^3 x + \frac{1}{2}\int A_0\rho\mathrm{d}^3 x. \tag{1.2.30}$$

上式右方第一项只与 $\boldsymbol{A}_T$ 有关(在库仑规范中 $\boldsymbol{A}_T$ 也就是整个 $\boldsymbol{A}$),而 $\boldsymbol{A}_T$ 又是场的动力学变量,故该项可解释为电磁场的能量. 上式右方第二项则应代表电磁场与带电体的相互作用能. 当 $A_0$ 用(1.2.28)式代入后,此项即化成瞬时库仑能 $\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3x' \frac{\rho(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x}',t)}{r}$ 的形式.

通过以上讨论我们看到:在 $A_\mu$ 的诸分量中,只有规范不变的 $\boldsymbol{A}_T$ 才是电磁场的动力学变量. 库仑规范最直接地显示出这一点,但可惜的是该规范不是协变的规范.

**3. 关于电磁场量子化的问题**

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的三个直角分量都代表场的动力学变量,那么量子化条件就很简单,在将它们都转化成算符后,在海森伯图象中即为

$$[\hat{A}_j(\boldsymbol{x},t),\hat{\pi}_l(\boldsymbol{x}',t)] = -\frac{1}{4\pi c}[\hat{A}_j(\boldsymbol{x},t),\hat{E}_l(\boldsymbol{x}',t)] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

$$[\hat{A}_j(\boldsymbol{x},t),\hat{A}_l(\boldsymbol{x}',t)] = [\hat{\pi}_j(\boldsymbol{x},t),\hat{\pi}_l(\boldsymbol{x}',t)] = 0,$$

但如上面讨论所指出的,只是 $\boldsymbol{A}_T$ 和 $\boldsymbol{\pi}_T$ 才是场的独立动力学变量,而 $\boldsymbol{A}_T$ 的三个直角分量并不互相独立而是由横波条件(1.2.25)互相连系. 这就使得在坐标空间(指 $\boldsymbol{x}$ 的三维空间)写出电磁场的量子化条件不那么直截了当. 在下节中我们将通过平面波展开,把 $\boldsymbol{A}$ 中横波分量与纵波分量分开来,即可方便地写出电磁场的量子化条件. 在第三章中我们还将考虑协变规范下的量子化方案.

## §1.3 电磁场的量子化 吸收和发射算符

电磁场的运动可分解为一系列基本模式的振动. 在自由电磁场情况,各个模式的振动都是自由的,当有电荷电流时,即变成受迫振动. 无论是哪种情况,每个模式都代表电磁场的一个独立自由度.

最简单的模式是平面波. 当将 $\boldsymbol{A}_T$ 和 $\boldsymbol{E}_T$ 用平面波展开时,我们很容易找出各个独立自由度所对应的动力学变量,并写出量子化条件.

**1. 经典电磁波按平面波的展开**

平面波可分为平面行波和平面驻波. 设想电磁场是局限在一个体积为 $V=L^3$ 的正方腔内,这时平面行波应取周期性边界条件. 归一化的波函数①为

---

① 值得注意的是,$V$ 愈大,$\boldsymbol{f}_{ks}$ 的值愈小,而 $\boldsymbol{k}$ 的取值愈密.

$$\boldsymbol{f}_{ks}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{e}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(m_1\boldsymbol{n}_1 + m_2\boldsymbol{n}_2 + m_3\boldsymbol{n}_3), \tag{1.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$ 为坐标轴基矢,取得与正方腔的三个边线平行. $m_1,m_2,m_3$ 为整数,从而上述行波解满足周期性边条件. $\boldsymbol{e}_{ks}$ 为(实)偏振基矢,由于 $\boldsymbol{A}_T$ 为横场,故 $\boldsymbol{e}_{ks}$ 的方向须与 $\boldsymbol{k}$ 垂直(可由(1.2.25)式得出),即

$$\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \tag{1.3.2}$$

从而对每个 $\boldsymbol{k}$,只有两个独立的偏振基矢,我们将 $s$ 取为 1 和 2,并取 $\boldsymbol{e}_{k1},\boldsymbol{e}_{k2},\boldsymbol{k}$ 三者构成右手螺旋关系. 对于传播方向相反、波长相同的两个行波,相应的两组偏振基矢取得满足下列关系:

$$\boldsymbol{e}_{(-\boldsymbol{k})s} = (-1)^s\boldsymbol{e}_{ks}, \quad s = 1,2. \tag{1.3.3}$$

正方腔内满足周期性边条件的任意 $\boldsymbol{A}_T(\boldsymbol{x},t)$ 可用上述平面行波来展开:

$$\boldsymbol{A}_T(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ks}\alpha_{ks}(t)\boldsymbol{e}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{1.3.4}$$

这样展开的系数 $\alpha_{ks}(t)$ 一般为复数. 我们可把上述行波集合换成驻波集合. 波矢为 $\boldsymbol{k}$ 和 $-\boldsymbol{k}$ 的两个行波转换为下述两个驻波

$$\boldsymbol{f}_{ks1}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{2}{V}}\boldsymbol{e}_{ks}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}_{ks2} = \sqrt{\frac{2}{V}}\boldsymbol{e}_{ks}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{1.3.5}$$

这样 $\boldsymbol{A}_T$ 用驻波展开的表达式即为

$$\boldsymbol{A}_T(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{ks}\boldsymbol{e}_{ks}[q_{ks}^{(1)}(t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) + q_{ks}^{(2)}(t)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})], \tag{1.3.6}$$

但要注意的是 $\boldsymbol{k}$ 的取值范围只是(1.3.4)求和中的一半,或者说只在半个 $\boldsymbol{k}$ 空间内取值.

(1.3.6)式中的 $q_{ks}^{(1)}$ 和 $q_{ks}^{(2)}$ 都是实数(直接可观测的物理量),代表该驻波模上的广义坐标,其量纲为 $\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$. 相应地

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}_T(\boldsymbol{x},t)\\ &= -\sqrt{\frac{2}{V}}\frac{1}{c}\sum_{ks}\boldsymbol{e}_{ks}[\dot{q}_{ks}^{(1)}(t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) + \dot{q}_{ks}^{(2)}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})].\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

由于正则动量场 $\boldsymbol{\pi}_T(\boldsymbol{x},t)$ 按驻波展开的系数即为该驻波模的正则动量,而 $\boldsymbol{\pi}_T(\boldsymbol{x},t)$ 等于 $-\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)$,故有

$$p_{ks}^{(1)}(t) = \frac{1}{4\pi c^2}\dot{q}_{ks}^{(1)}(t), \quad p_{ks}^{(2)}(t) = \frac{1}{4\pi c^2}\dot{q}_{ks}^{(2)}(t). \tag{1.3.8}$$

代回(1.3.7)式,即将该式表示为

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -4\pi c\sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{ks}\boldsymbol{e}_{ks}[p_{ks}^{(1)}(t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) + p_{ks}^{(2)}(t)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})]. \tag{1.3.9}$$

磁场强度 $\boldsymbol{B}$ 的展开式可通过$\nabla\times\boldsymbol{A}$得出,即

$$\boldsymbol{B}_T(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{ks}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{ks}[-q_{ks}^{(1)}(t)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) + q_{ks}^{(2)}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})]. \tag{1.3.10}$$

我们看到,在电场强度展式中的系数与各个模的广义动量成正比,而磁场强度展式中所出现的系数则与各个模的广义坐标相关,具体地说,

$$\boldsymbol{B}_T(\boldsymbol{x},t) = \sum_{ksr}q_{ks}^{(r)}(t)\nabla\times\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x}), \qquad s=1,2;\ r=1,2,$$

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -4\pi c\sum_{ksr}p_{ks}^{(r)}(t)\boldsymbol{f}_{xsr}(\boldsymbol{x}), \qquad s=1,2;\ r=1,2. \tag{1.3.11}$$

$\boldsymbol{f}_{ksr}$ 由(1.3.5)式表示.

对于自由电磁场情况,$\boldsymbol{E}_T$ 就是整个的$\boldsymbol{E}$,在库仑规范中,$\boldsymbol{A}_T$ 也就是整个的$\boldsymbol{A}$.再由 $\boldsymbol{\pi} = -\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$,即得哈密顿函数

$$\mathscr{H} = \boldsymbol{\pi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathscr{L} = \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2), \tag{1.3.12}$$

与电磁能量密度一致. 总哈密顿量等于$\mathscr{H}$的体积分即

$$H = \int\mathscr{H}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x.$$

将 $\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{B}$ 的展式代入后化出

$$H = \frac{1}{2}\sum_{ksr}\left[4\pi c^2 p_{ks}^{(r)}(t)^2 + \frac{1}{4\pi c^2}\omega^2 q_{ks}^{(r)}(t)^2\right], \quad \omega\equiv kc. \tag{1.3.13}$$

上式表明,电磁场的能量等于各个模式振动能量的和.

矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$所满足的齐次波动方程(在自由场情况)可以表示为各个模的广义坐标的简谐振动方程:

$$\ddot{q}_{ks}^{(r)}(t) + \omega^2 q_{ks}^{(r)}(t) = 0. \tag{1.3.14}$$

这也就是我们把每个模式称为一个振动模式的原因. (1.3.14)式也等价于由(1.3.13)式导出的哈密顿方程:

$$\dot{q}_{ks}^{(r)}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_{ks}^{(r)}(t)} = 4\pi c^2 p_{ks}^{(r)}(t),$$

$$\dot{p}_{ks}^{(r)}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_{ks}^{(r)}(t)} = -\frac{1}{4\pi c^2}\omega^2 q_{ks}^{(r)}(t). \tag{1.3.15}$$

(1.3.15)中的第一式就是(1.3.8)式,将它代入第二式就化出(1.3.14)式. 这进一步显示出,$q_{ks}^{(r)}$和$p_{ks}^{(r)}$代表振动模式$(\boldsymbol{k},s,r)$的一对共轭正则变量,从而也就是该模式的动力学变量.

电磁场的平动量(指普通意义下的动量即与平移对称性相对应的守恒量,不是说各自由度的正则动量) $\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3 x$ 也可用$q_{ks}^{(r)}$和$p_{ks}^{(r)}$表示出来,结果为

$$\boldsymbol{P} = \sum_{ks}[p_{ks}^{(2)}(t)q_{ks}^{(1)}(t) - p_{ks}^{(1)}(t)q_{ks}^{(2)}(t)]\boldsymbol{k}. \tag{1.3.16}$$

(1.3.13)和(1.3.16)式就是自由电磁场总体的能量和动量用各个模的正则变量表达的公式.

总结起来,原本是用$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$和$-\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$代表电磁场在各个$\boldsymbol{x}$点上的广义坐标和广义动量,但由于横场条件的限制$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}$的三个分量并不代表独立的自由度. 通过把自由度指标$\boldsymbol{x}$换成$\boldsymbol{k}$(指行波,如果换用驻波,$\boldsymbol{k}$的取值要少一半,但须增加指标$s$)并把沿坐标轴基矢的三个分量指标换成与$\boldsymbol{k}$垂直的两个分量指标$(r=1,2)$,就得出电磁场的独立自由度的指标. $q_{ks}^{(r)}(t)$和$p_{ks}^{(r)}(t)$反过来用$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$和$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$表示的公式如下:

$$q_{ks}^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{2}{V}}\int \boldsymbol{e}_{ks}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x,$$

$$p_{ks}^{(1)}(t) = -\frac{1}{4\pi c}\sqrt{\frac{2}{V}}\int \boldsymbol{e}_{ks}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x. \tag{1.3.17}$$

对于$q_{ks}^{(2)}(t)$和$p_{ks}^{(2)}(t)$,只需把上式中的$\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$换成$\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$即可.

有了以上的理论准备,我们即可来把电磁场量子化.

### 2. 电磁场的量子化条件

在§1.1中我们对量子力学作了概括,所列出的基本点实际上是量子理论的基本点,因而可以用到场的量子化上来:首先要把场的量子状态看成是可以叠加的态矢量(抽象意义的矢量),并可用一个完全集合的物理量的本征态来展开. 每个物理量都对应于一个作用在态矢量上的算符. 然后根据量子化条件引入场的(互相共轭的)正则变量间的对易关系. 再由总哈密顿量的表达式给出这些正则变量在海森伯图象中的运动方程. 场的其他物理量可通过对称性或"对应原则"来确定. 具体做法如下:

既然$(\boldsymbol{k},s,r)$代表电磁场的独立自由度的指标,而$q_{ks}^{(r)}(t)$和$p_{ks}^{(r)}(t)$代表该

自由度的广义坐标和广义动量,量子化后,相应的算符应满足下列对易关系,在海森伯图象中即为

$$[\hat{q}_{ks}^{(r)}(t),\hat{p}_{k's'}^{(r')}(t)] = \mathrm{i}\hbar\delta_{kk'}\delta_{ss'}\delta_{rr'},$$

$$[\hat{q}_{ks}^{(r)}(t),\hat{q}_{k's'}^{(r')}(t)] = [\hat{p}_{ks}^{(r)}(t),\hat{p}_{k's'}^{(r')}(t)] = 0. \tag{1.3.18}$$

注意,在这里 $\boldsymbol{k}$ 只在一半 $k$ 空间格点上取值. 在自由电磁场情况,每个振动模的哈密顿量为

$$\hat{H}_{ks}^{(r)}(t) = \frac{1}{2}[4\pi c^2\ \hat{p}_{ks}^{(r)}(t)^2 + \frac{1}{4\pi c^2}\omega^2\ \hat{q}_{ks}^{(r)}(t)^2],\omega \equiv kc, \tag{1.3.19}$$

**而总哈密顿量**即为各个模的哈密顿量之和:

$$\hat{H} = \sum_{ksr}\hat{H}_{ks}^{(r)}. \tag{1.3.20}$$

由对易关系(1.3.18)和哈密顿量的表达式所给出的运动方程与(1.3.15)式相同,只是其中 $q_{ks}^{(r)}$ 和 $p_{ks}^{(r)}$ 换成了算符 $\hat{q}_{ks}^{(r)}$ 和 $\hat{p}_{ks}^{(r)}$. 这里就不再列出.

在量子力学中已经知道,从 $\hat{H}_{ks}^{(r)}$ 的表达式(1.3.19)和同一模中的两个正则变量间的对场关系

$$[\hat{q}_{ks}^{(r)}(t),\hat{p}_{ks}^{(r)}(t)] = \mathrm{i}\hbar,$$

可以得出 $\hat{H}_{ks}^{(r)}$ 的本征值为

$$\left(n_{ks}^{(r)} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\quad n_{ks}^{(r)} = 0,1,2,\cdots,$$

与量子力学中谐振子的能级相同. 关于这一结果的推导可参见(1.3.36)式以下的讨论.

我们看到电磁场每个振动模的能量是量子化的,相邻能级的间隔为 $\hbar\omega$. 这就是电磁场量子性的第一个显示.

在量子电磁场论中,更常用的是光子的吸收算符和发射算符,也称为光子的产生算符和湮灭算符. 它们的定义是

$$\hat{b}_{ks}^{(r)}(t) = \sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar k}}\left[\frac{k}{4\pi c}\ \hat{q}_{ks}^{(r)}(t) + \mathrm{i}\ \hat{p}_{ks}^{(r)}(t)\right],$$

$$\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)^{\dagger} = \sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar k}}\left[\frac{k}{4\pi c}\ \hat{q}_{ks}^{(r)}(t) - \mathrm{i}\ \hat{p}_{ks}^{(r)}(t)\right]. \tag{1.3.21}$$

从(1.3.18)式不难求出下列对易关系:

$$[\hat{b}_{ks}^{(r)}(t),\hat{b}_{k's'}^{(r)}(t)^{\dagger}] = \delta_{kk'}\delta_{ss'}\delta_{rr'},$$

$$[\hat{b}_{ks}^{(r)}(t),\hat{b}_{k's'}^{(r')}(t)] = [\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)^{\dagger},\hat{b}_{k's'}^{(r')}(t)^{\dagger}] = 0. \tag{1.3.22}$$

关于吸收算符 $\hat{b}$ 和发射算符 $\hat{b}^{\dagger}$ 的物理意义参见后面的讨论. 另外, $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$ 也可用

$\hat{b}$和$\hat{b}^\dagger$表示出来,结果为

$$\hat{q}_{ks}^{(r)}(t)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}[\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)+\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)^\dagger],$$

$$\hat{p}_{ks}^{(r)}(t)=\sqrt{\frac{\hbar k}{8\pi c}}\mathrm{i}[\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)^\dagger-\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)].\tag{1.3.23}$$

$\hat{\boldsymbol{A}}_T(\boldsymbol{x},t)$和$\hat{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{x},t)$用$\hat{b}$和$\hat{b}^\dagger$表示的表达式为(其中$\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x})$由(1.3.5)式表示)

$$\hat{\boldsymbol{A}}_T(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ksr}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}[\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)+\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)^\dagger]\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x}),$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{c}\sum_{ksr}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}[\dot{\hat{b}}_{ks}^{(r)}(t)+\dot{\hat{b}}_{ks}^{(r)}(t)^\dagger]\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x}).\tag{1.3.24}$$

附带指出的是,此式对于非自由电磁场仍成立. 自由场与非自由场的区别只在于$\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)$等如何随时间变化. 另外,要指出的是吸收和发射算符都不是厄米算符,但它们互为厄米共轭. 在自由场情况,$\hat{b}_{ks}^{(r)}$的运动方程化为

$$\dot{\hat{b}}_{ks}^{(r)}(t)+\mathrm{i}\omega\,\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)=0,\quad \omega\equiv kc,\tag{1.3.25}$$

由此解出

$$\hat{b}_{ks}^{(r)}(t)=\hat{b}_{ks}^{(r)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.\tag{1.3.26}$$

这样,(1.3.24)式在自由场情况下就化为

$$\hat{\boldsymbol{A}}_T(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ksr}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}[\hat{b}_{ks}^{(r)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\hat{b}_{ks}^{(r)\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x}),$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{i}\sum_{ksr}\sqrt{2\pi\omega}[\hat{b}_{ks}^{(r)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\hat{b}_{ks}^{(r)\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x}).\tag{1.3.27}$$

为了得出$\boldsymbol{A}_T$和$\boldsymbol{E}_T$按行波模的展开,我们只需要将

$$\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}),$$

$$\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}).$$

代入(1.3.24)式中的$\boldsymbol{f}_{ksr}(\boldsymbol{x})$,并令

$$\hat{b}_{ks}^{(1)}(t)-\mathrm{i}\,\hat{b}_{ks}^{(2)}(t)=\sqrt{2}\,\hat{a}_{ks},\quad \hat{b}_{ks}^{(1)}(t)+\mathrm{i}\,\hat{b}_{ks}(t)=\sqrt{2}(-1)^s\,\hat{a}_{-ks}(t),\tag{1.3.28}$$

即可化出

$$\hat{\boldsymbol{A}}_T(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}],$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{x},t) = -\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{Vkc}}\boldsymbol{e}_{ks}[\dot{\hat{a}}_{ks}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{a}}_{ks}^{\dagger}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]. \tag{1.3.29}$$

注意，在(1.3.29)式中，对 $\boldsymbol{k}$ 的求和已恢复为整个 $\boldsymbol{k}$ 空间中的格点. 从(1.3.22)及(1.3.28)式不难求出 $\hat{a}_{ks}(t)$ 与 $\dot{\hat{a}}_{k's'}^{\dagger}(t)$ 之间的对易关系：

$$[\hat{a}_{ks}(t),\hat{a}_{k's'}^{\dagger}(t)] = \delta_{kk'}\delta_{ss'},$$

$$[\hat{a}_{ks}(t),\hat{a}_{k's'}(t)] = [\hat{a}_{ks}^{\dagger}(t),\hat{a}_{k's'}^{\dagger}(t)] = 0. \tag{1.3.30}$$

**下面将指出** $\hat{a}_{ks}(t)$ 和 $\hat{a}_{ks}^{\dagger}(t)$ 分别代表吸收和发射一个动量为 $\hbar\boldsymbol{k}$，偏振方向为 $\boldsymbol{e}_{ks}$ **的光子的算符**①. (1.3.28)式即为驻波算符和行波算符之间的变换关系.

在自由场情况，$\hat{a}_{ks}(t)$ 满足与(1.3.25)式一样的方程

$$\dot{\hat{a}}_{ks}(t) + \mathrm{i}\omega\,\hat{a}_{ks}(t) = 0, \quad \omega \equiv kc, \tag{1.3.31}$$

于是其解亦形如

$$\hat{a}_{ks}(t) = \hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{1.3.32}$$

这样在自由场的情况下，展式(1.3.29)就化为

$$\hat{\boldsymbol{A}}_T(\boldsymbol{x},t) = \sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t} + \hat{\boldsymbol{a}}_{ks}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}],$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{i}\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t} - \hat{a}_{ks}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}]. \tag{1.3.33}$$

磁场强度的展式亦易立即得出

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{i}\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\,\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t} - \hat{a}_{ks}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}].$$

值得一提的是，$\boldsymbol{E}_T$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的展开系数 $\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}$ 在数值上等于体积 $V$ 中半个光子能量所对应的电场(或磁场)强度.

### 3. 光子数的本征态　吸收算符和发射算符

在§1.1中已经指出，一个体系的状态空间中的基矢可取为“其物理量的一个完全集合”的共同本征态. 该完全集合中物理量的数目等于体系的自由度数，因此可以从每个自由度中取一个物理量来构成完全集合.

在电磁场的量子理论中，常用的一个完全集合为“各个模的光子数算符 $\hat{n}_{ks}$ 的总和”. 在海森伯图象中这些 $\hat{n}_{ks}$ 应取在同一时刻. 由于不同模代表不同自由度，

---

① 从(1.3.29)第一式看，$\hat{a}_{ks}(t)$ 也可称作是 $(\boldsymbol{k},s)$ 模的无量纲振幅算符. 因而它的本征态(即量子相干态)将相当于经典光学中具有确定振幅的态，见§5.2.

故在同一时刻不同模的光子数算符显然是互相可对易的. 对于自由场,不同时刻的各个模光子算符也是可对易的. 但对非自由场,$t_1$ 时刻某个模的物理量可能通过运动方程影响 $t_2(t_2>t_1)$时刻其他模的物理量,从而不同时刻各个模光子数算符不一定可对易. 用光子数本征态作为基矢所建立的表象就称作光子数表象,或称作福克表象.

先来看驻波模的情况. 定义每个模的光子数算符为

$$\hat{n}_{ks}^{(r)} = \hat{b}_{ks}^{(r)\dagger}\hat{b}_{ks}^{(r)}. \tag{1.3.34}$$

在海森伯图象中上式各算符都取在同一时刻 $t$. 容易看出 $\hat{n}_{ks}^{(r)}$ 为厄米算符.

下面来证明它的本征值为零和正整数. 为书写简单计,我们将模指标略去不写,并用 $\nu$ 表示它的本征值,$|\nu\rangle$为相应的本征态,于是有

$$\hat{n}\,|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle. \tag{1.3.35}$$

先来证明$|\alpha\rangle\equiv\hat{b}\,|\nu\rangle$也是算符 $\hat{n}$ 的本征态(但未归一化),本征值为 $\nu-1$. 将 $\hat{n}$ 作用到$|\nu\rangle$上并利用 $\hat{b}$ 与 $\hat{b}^\dagger$ 的对易关系得

$$\hat{n}\,|\alpha\rangle = (\hat{b}^\dagger\,\hat{b})\,\hat{b}\,|\nu\rangle = (\hat{b}\,\hat{b}^\dagger-1)\,\hat{b}\,|\nu\rangle = \hat{b}\,\hat{n}\,|\nu\rangle - \hat{b}\,|\nu\rangle,$$

再由(1.3.35)式即将上式右方化为$(\nu-1)\,\hat{b}\,|\nu\rangle=(\nu-1)\,|\alpha\rangle$. 这表明$|\alpha\rangle$是 $\hat{n}$ 的本征值为 $\nu-1$ 的本征态. 为了归一化需将$|\alpha\rangle$乘上一个因子. 由

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\nu|\,\hat{b}^\dagger\,\hat{b}\,|\nu\rangle = \langle\nu|\,\hat{n}\,|\nu\rangle = \nu$$

即得归一化的$|\nu-1\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}|\alpha\rangle$,亦即

$$\hat{b}\,|\nu\rangle = \sqrt{\nu}\,|\nu-1\rangle. \tag{1.3.36}$$

通过继续地用 $\hat{b}$ 作用下去,可得本征值为 $\nu-2,\nu-3,\cdots$的本征态. 但是 $\hat{n}$ 的本征值不能为负,因 $\nu=\langle\nu|\,\hat{n}\,|\nu\rangle=\langle\alpha|\alpha\rangle\geqslant 0$. 由此即可得出 $\nu$ 必定为零或正整数,使得上述过程从$|n\rangle\rightarrow|n-1\rangle\rightarrow\cdots|0\rangle$后即中止,因按(1.3.36)式,$\hat{b}\,|0\rangle=0$. 证毕.

利用(1.3.21)式不难得出

$$\hat{n}_{ks}^{(r)}(t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\hbar\omega}\left(4\pi c^2\,\hat{p}_{ks}^{(r)}(t)^2 + \frac{1}{4\pi c^2}\,\hat{q}_{ks}^{(r)}(t)^2\right), \tag{1.3.37}$$

于是$(\boldsymbol{k},s,r)$模的哈密顿量可由 $\hat{n}_{ks}^{(r)}$ 表示出来,结果即为

$$\hat{H}_{ks}^{(r)}(t) = \left(\hat{n}_{ks}^{(r)}(t) + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{1.3.38a}$$

这就论证了前面所说的每个驻波模能量的本征值都为 $\hbar\omega$ 的$\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$倍的结论. 电磁场的总哈密顿量相应地为

$$\hat{H}(t) = \sum_{ksr} \left( \hat{n}_{ks}^{(r)}(t) + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \tag{1.3.38b}$$

下面仍略去模指标不写．利用对易关系，可以得知$|\beta\rangle = \hat{b}^{\dagger}|n\rangle$也是$\hat{n}$的本征态，本征值为$n+1$，并具体地有

$$\hat{b}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle. \tag{1.3.39a}$$

因此$\hat{b}^{\dagger}$称作光子的发射算符，它的作用使光子数从$n$增加到$n+1$．同样$\hat{b}$称作光子的吸收算符，当$\nu$取为正整数(或零)后，(1.3.36)式化为

$$\hat{b}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle. \tag{1.3.39b}$$

$n=0$的本征态为该模电磁场的基态，也称为该模的真空态(如果所有模的光子数都为零，那就是整个电磁场的真空态)．利用(1.3.39a)式可得出$|n\rangle$的一个常用的表达式

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{b}^{\dagger})^{n}|0\rangle, \tag{1.3.40}$$

即粒子数的任一本征态可通过多次用$\hat{b}^{\dagger}$作用到真空态$|0\rangle$上而得出．

对于行波模，结果完全相同．因为在以上的推导中只用了吸收算符与发射算符间的对易关系．而这种对易关系对于行波模和驻波模是完全一样的．于是(1.3.39)和(1.3.40)式中的$\hat{b}$和$\hat{b}^{\dagger}$在换成$\hat{a}$和$\hat{a}^{\dagger}$后仍成立．另外，利用驻波模与行波模吸收和发射算符间的关系(1.3.28)，不仅可将电磁场总能量用行波模算符表示成

$$\hat{H}(t) = \sum_{ks} \left( \hat{n}_{ks}(t) + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \tag{1.3.41a}$$

还可将电磁场的总动量(1.3.16)在量子化以后的算符写成

$$\hat{\boldsymbol{P}}(t) = \sum_{ks} \left( \hat{n}_{ks}(t) + \frac{1}{2} \right) \hbar\boldsymbol{k}, \tag{1.3.41b}$$

以上结果表明，对于波矢为$\boldsymbol{k}$的行波模，每个光子具有能量$\hbar\omega$和动量$\hbar\boldsymbol{k}$．

我们以前曾指出过，所谓光子其本质的意义就是电磁场的量子，表现在电磁场的能量和动量是一份份改变的，如(1.3.41)式所示．光子与量子力学中的粒子在概念上有很大的不同(例如它不能在空间准确地定位)．在下一章中我们还将看到，就是电子，在相对论情况下也与量子力学中的粒子有一定的差别．

即便如此，有时仍可借用量子力学中的说法把对应光子状态的$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$称作光子的波函数，具体说明如下：

在量子力学中常用薛定谔波函数的二次量子化来表述多体理论．这时，在二次量子化后的算符$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$的展式中作为吸收算符$\hat{\Lambda}_j(t)$的系数$\varphi_j(\boldsymbol{x})$即为该粒子在状态$j$的波函数．仿照这种情况，$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)$展式中$\hat{\Lambda}_{ks}(t)$的系数也有时称作该模式光子的“波函数”．这样按(1.3.29)

式动量为 $\hbar\boldsymbol{k}$、偏振为 $s$ 的光子“波函数”即为

$$\boldsymbol{A}_{ks}(\boldsymbol{x})=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{1.3.42}$$

但要注意的是 $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})|^2$ 并不正比于光子在 $\boldsymbol{x}$ 点的概率密度. 这不仅因为 $|\boldsymbol{A}(x)|^2$ 的量纲不是 $L^{-3}$,也不是因为 $\boldsymbol{A}$ 为矢量而 $\varphi$ 为标量(实际上在考虑电子的自旋后,它的量子力学波函数也不再是标量而变成旋量. 波函数为矢量的情况也是允许的,相应于自旋量子数为 1 的粒子. 参见下节),重要的是上式右方的系数中出现因子$\frac{1}{\sqrt{k}}$,而自旋量子数为 1 的粒子的量子力学的波函数(设它具有确定的动量 $\hbar\boldsymbol{k}$ 和偏振 $s$)为

$$\boldsymbol{f}_{ks}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{e}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

它与 $\boldsymbol{A}_{ks}(\boldsymbol{x})$相差一个因子$\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}$. 在一般(即不限于具有确定动量)的情况下,此因子化为 $\sqrt{2\pi\hbar c}(-\nabla^2)^{-1/4}$. 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\sqrt{2\pi\hbar c}(-\nabla^2)^{-1/4}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 我们知道$\nabla^2$是微分算符,它的逆$(\nabla^2)^{-1}$应是积分算符,因而是一种非定域算符.

实际上,对于光子不存在具有概率幅意义的空间波函数.

各个模的状态确定后,电磁场的总体状态也就确定,即为各个态矢量的外积. 在光子数表象中它就等于$|\{n_{ks}\}\rangle\equiv\prod_{ks}|n_{ks}\rangle$,其中$\{n_{ks}\}$代表各模光子数的集合. 上述状态为所有模“光子数算符”集合的本征态,电磁场总体的任一个状态$|\rangle_{\mathrm{tot}}$可表为所有这样的本征态的叠加,即

$$|\rangle_{\mathrm{tot}}=\sum a(\{n_{ks}\})|\{n_{ks}\}\rangle.$$

系数 $a$ 是各模光子数集合$\{n_{ks}\}$的函数,故记作 $a(\{n_{ks}\})$.

前已指出电磁真空态为各个模的基态,即各个模的光子数都为零的态. 从(1.3.38b)或(1.3.41)式可以看出,真空态的能量并不为零,而是等于各个模零点振动能(半个光子的能量)之和. 零点振动能并不能释放出来,因为基态是场的能量最低态. 但这是对确定的模而言,通过改变模,是可以观测到总零点振动能的变化. 1948 年提出的 Casimir 效应就体现这一变化,并在 1958 年为 Sparnay 用实验证实. 由于篇幅问题这里不作具体介绍,有兴趣的读者可以参阅 Itzykson 与 Zuber 合写的 Quantum Field Theory § 3.2.4.

**4. 光子数本征态中电场强度和磁场强度**

对于光子数为 $n$ 的单模行波状态,$\hat{E}^2(\boldsymbol{x},t)$的期望值为

$$\langle n|\hat{E}^2(\boldsymbol{x},t)|n\rangle=\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\langle n|\hat{a}_{ks}^{\dagger}\hat{a}_{ks}+\hat{a}_{ks}\hat{a}_{ks}^{\dagger}|n\rangle=\frac{4\pi\hbar\omega}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{1.3.43}$$

$\hat{B}^2(\boldsymbol{x},t)$的期望值与此相同. 上式具有显然的物理解释. 状态$|n\rangle$的能量为$\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$,其中一半为$\frac{1}{8\pi}\langle\hat{E}^2\rangle$所贡献,另一半为$\frac{1}{8\pi}\langle\hat{B}^2\rangle$所贡献. 而在行波情况,两者能量在空间是均匀分布的. 这样就与上面结果一致.

另外要指出的是$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)$和$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},t)$的期望值恒为零:

$$\langle n|\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)|n\rangle=\langle n|\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},t)|n\rangle=0. \tag{1.3.44}$$

这表明在光子数本征态中,电场和磁场都是平均值为零的涨落场,从而与经典平面行波 $\boldsymbol{E}=\sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\boldsymbol{e}_{ks}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\theta)$, $\boldsymbol{B}=-\sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\boldsymbol{e}_{ks}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\theta)$并不对应. 在第五章中,我们将证明与上述经典波对应的不是光子数的本征态而是光场的相干态.

对于平面驻波,相应地结果为

$$\langle n|\hat{E}^2(\boldsymbol{x},t)|n\rangle=\frac{8\pi\hbar\omega}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right)\begin{cases}\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\\ \sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\end{cases},$$

$$\langle n|\hat{B}^2(\boldsymbol{x},t)|n\rangle=\frac{8\pi\hbar\omega}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right)\begin{cases}\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\\ \cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\end{cases}. \tag{1.3.45}$$

从而总能量密度(两者之和)的期望值在空间仍是均匀的,其值为$\frac{1}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

最后我们指出,各个模的真空态中"有半个光子的"零点能"存在"是量子测不准关系所要求的,因为$\hat{\boldsymbol{E}}$与$\hat{\boldsymbol{B}}$不对易(其中一个与电磁场的正则动量相联系,一个与正则坐标相联系),故不可能存在$\hat{\boldsymbol{E}}$和$\hat{\boldsymbol{B}}$都确定地等于零的状态.

顺带说明,在$\hat{\boldsymbol{E}}$的展式(1.3.33)中所含的带量纲的参量$\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}$等于半个光子的情况下,电场的均方根值. 这有助于我们记忆.

## §1.4 光子的自旋 具有确定动量和螺度的自由光子态

在本章引言中我们已经指出,光子不仅具有能量和动量,还有角动量,包括自旋角动量和轨道角动量. 本节将阐明,光子的自旋(量子数)为 1. 螺度是指自旋在动量方向的投影. 对于自旋为 1 的粒子,螺度通常可取 +1,0, −1 三个值. 光子由于电磁场的横波性,螺度只能取 ±1 两个值. 它们对应于右旋和左旋两个圆偏振波.

作为准备,我们先来考察在非相对论的量子力学框架内,自旋为 1 的粒子的波函数具有怎样的形式.

### 1. 转动变换与总角动量算符

我们知道,物理学中所引入的物理量并不是随意定义的,它们实际上都是物理过程中的守恒量. 而物理学的守恒定律又总是与物理规律在某种变换下的不变性相联系. 这种在某个变换下的不变性,又称为物理规律的某种对称性. 能量和动量守恒分别对应于物理规律的时空平移对称性. 与角动量相对应的是三维空间中的转动对称性. 换句话说,当坐标架的取向有一转动时,物理规律的表达形式保持不变. 这一不变性所对应的守恒定律就是角动量守恒. 由此不难理解,量子理论中的角动量算符与转动变换算符有着密切联系,实际上它就是转动变换算符的生成元.

在量子力学的框架中,描述一个无自旋的粒子用的是标量波函数,而描述一个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子用的是旋量波函数. 下面要说明矢量波函数所描写的则是自旋为1的粒子. 在这里,标量、旋量和矢量都是对转动变换而言(不是对四维洛伦兹变换而言).

标量波函数与矢量波函数差别在于,在坐标架转动时,标量的值本身并不变,波函数的改变来自于宗量作了变换. 矢量波函数则不同,除了宗量要作变换外,矢量本身的三个分量之间还要作变换.

转动变换可以有两种定义,第一种是所研究体系的物理状态未变,而描述它的坐标架转动了一个角度. 如果用$|A\rangle$和$|A'\rangle$表示体系的某个物理状态在这两个坐标架中的表示,那么转动变换就是指这两个表示$|A\rangle$和$|A'\rangle$之间的转换.

转动变换的第二种定义是坐标架未变,而物体的状态$|A\rangle$经过一个绕原点的转动变成了另一个状态$|A'\rangle$,好像我们把放在平台上的物体绕着轴转了一个角度. 同样,从$|A\rangle$到$|A'\rangle$的改变就是转动变换.

不难认识到,这两种定义是等价的:把物体沿某个方向轴 $\boldsymbol{n}$ 正向旋转一个角度$\theta$,等效于把坐标架沿 $\boldsymbol{n}$ 的反方向转一个角度$\theta$. 选择哪种定义来讨论,可以自由地来决定.

下面我们来寻求由矢量波函数描述的粒子的总角动量算符,考察它除了轨道角动量之外是否还有一个附加的内禀角动量. 我们将采用第二种定义. 设变换算符为$\hat{R}$,于是

$$|A'\rangle = \hat{R}|A\rangle, \tag{1.4.1}$$

$\hat{R}$为幺正算符,因它要保持态矢量的正交归一性不变. 当转动是绕方向轴 $\boldsymbol{n}$ 转一个角度$\theta$时,$\hat{R}$可表成(令 $\theta\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\theta}$)

$$\hat{R} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1\hat{J}_1+\theta_2\hat{J}_2+\theta_3\hat{J}_3)}. \tag{1.4.2}$$

从$\hat{R}$的幺正性,不难得出 $\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}$ 为厄米算符. 再由实参数 $\theta_1,\theta_2$ 和 $\theta_3$ 取值的任意性即得 $\hat{J}_1,\hat{J}_2$ 和 $\hat{J}_3$ 都是厄米算符,它们就是转动变换的生成元. 其具体表达式,可根据波函数的矢量性质来确定(见后). 当 $\theta_j$ 为无穷小量时,上式化为

$$\hat{R}=1-\mathrm{i}\sum_j\theta_j\hat{J}_j. \tag{1.4.3}$$

在量子力学中,总角动量算符即定义为 $\hbar\hat{\boldsymbol{J}}$,正如平移变换算符 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/\hbar\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{x}}$(其中 $\boldsymbol{x}$ 代表平移的距离)的生成元$\frac{1}{\hbar}\hat{\boldsymbol{k}}$在乘上 $\hbar$ 后就等于总动量算符一样. 我们可从物理规律的转动对称性来证明 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 为守恒量:由于运动方程是由哈密顿量算符$\hat{H}$决定,故物理规律的转动对称性的数学表述即为哈密顿量算符$\hat{H}$在转动变换下保持不变(如同标量算符那样),也就是

$$\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{-1}=\hat{H}. \tag{1.4.4}$$

我们可对此式作下述的补充论证. 设$|A\rangle$为$\hat{H}$的任意本征态.

$$\hat{H}|A\rangle=E|A\rangle.$$

由于空间的各向同性,按(1.4.1)式通过旋转从$|A\rangle$得出的$|A'\rangle$应该同样是“$\hat{H}$的本征值为 $E$”的本征态,即

$$\hat{H}|A'\rangle=E|A'\rangle.$$

将(1.4.1)式代入上式后再乘以$\hat{R}^{-1}$即得出

$$\hat{R}^{-1}\hat{H}\hat{R}|A\rangle=E|A\rangle=\hat{H}|A\rangle$$

由于$|A\rangle$是$\hat{H}$的任一个本征态,它们可以构成完备集,故即得$\hat{R}^{-1}\hat{H}\hat{R}=\hat{H}$. 将此式右乘$\hat{R}^{-1}$和左乘$\hat{R}$就得出(1.4.4)式.

将无穷小变换下$\hat{R}$的表达式(1.4.3)代入(1.4.4)式,并利用各个 $\theta_j$ 可以独立地任意取值,就得出

$$[\hat{H},\hat{J}_j]=0,\quad j=1,2,3. \tag{1.4.5}$$

即$\hat{J}_j$ 为守恒量. 而这些与转动对称性相联系的守恒量乘上 $\hbar$ 后就被称为总角动量,它们与各自对应的角坐标 $\theta_j$(绕坐标基矢 $\boldsymbol{n}_j$ 的转动角)互相共轭.

### 2. 标量波函数和自旋等于零的粒子

作为准备,我们先讨论标量波函数的情况. 为了说明方便,我们除了原来的固定坐标架 $c$ 以外还引入一个随着体系一起转动的辅助坐标架$c'$. 若态矢量$|A\rangle$在原坐标架中的波函数为 $\phi(x_1,x_2,x_3)$,则$|A'\rangle$在辅助坐标架 $c'$中的波函数即为 $\phi(x_1',x_2',x_3')$,其中 $\phi$ 代表原来的函数,只是现在宗量换成了 $x_1',x_2',x_3'$. 再将$|A'\rangle$在原来坐标架中的波函数表为 $\psi(x_1,x_2,x_3)$,坐标表象中的$\hat{R}$即为 $\psi(x_1,x_2,x_3)$与 $\phi(x_1,x_2,x_3)$间的变换算符:

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=\hat{R}\phi(x_1,x_2,x_3). \tag{1.4.6}$$

为确定$\hat{R}$的形式. 设辅助坐标架 $c'$中三个基矢$\boldsymbol{n}_j'$与原坐标架$c$ 中三个基矢间的关系为

$$\boldsymbol{n}_j'=\alpha_{jk}\boldsymbol{n}_k, \tag{1.4.7}$$

其中重复指标代表求和. 将任何一个点的位置矢量点乘上式两侧即得该点在 $c'$和 $c$ 中坐标的变换关系

$$x_j'=\alpha_{jk}x_k, \tag{1.4.8}$$

于是新的波函数 $\psi(x_1,x_2,x_3)$可通过将上式代入 $\phi(x_1',x_2',x_3')$而求出,即

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=\phi(\alpha_{1j}x_j,\alpha_{2j}x_j,\alpha_{3j}x_j). \tag{1.4.9}$$

先看一个简单情况,设 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 两个转动角为零,$\theta_3=\theta$ 为一无穷小量. 这时(1.4.8)式化为

$$x_1'=x_1+\theta x_2,\quad x_2'=x_2-\theta x_1,\quad x_3'=x_3. \tag{1.4.10}$$

代入(1.4.9)式后在准确到 $\theta$ 的一次方时有

$$\begin{aligned}\psi(x_1,x_2,x_3)&=\phi(x_1+\theta x_2,x_2-\theta x_1,x_3)\\&=\left[1+\theta\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]\phi(x_1,x_2,x_3).\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

而按(1.4.3)式,这时$\hat{R}=1-\mathrm{i}\theta\hat{J}_3$. 将此$\hat{R}$代入(1.4.6)式再与(1.4.11)式相比较,即得出$\hat{J}_3$ 在坐标表象中的表示:

$$\hat{J}_3=\mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \tag{1.4.12}$$

同样可求出$\hat{J}_1$ 和$\hat{J}_2$,合起来即为

$$\hat{\boldsymbol{J}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\times\nabla. \tag{1.4.13}$$

我们看到上述$\hat{\boldsymbol{J}}$乘上 $\hbar$ 即为通常量子力学坐标表象中的轨道角动量算符. 这表明用标量波函数所描述的粒子,其总角动量就是轨道角动量,亦即其自旋为零.

### 3. 矢量波函数与自旋为 1 的粒子

当粒子在坐标表象中由矢量波函数来描写时,我们将看到,它的总角动量算符将是轨道角动量算符$\hat{\boldsymbol{L}}$与另一个量子数为 1 的内禀角动量 $\hbar\hat{\boldsymbol{S}}$之和.

设粒子态矢量$|A\rangle$在坐标表象中为 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=f_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_j$,则与上例一样,转动后的态矢量$|A'\rangle$在辅助坐标架 $c'$中的波函数将为$f_j(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}_j'$(记住:重复指标要求和). 其中 $f_j$ 的函数形式与$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$中的相同. 但现在不仅 $f_j$ 的宗量换成了$\boldsymbol{x}'$,而且$\boldsymbol{n}_j$ 也换成了$\boldsymbol{n}_j'$.

态矢量$|A'\rangle$在原坐标架中的波函数设为$\boldsymbol{G}(x_1,x_2,x_3)$,它可通过下式求出.利用$\boldsymbol{n}_j'=\alpha_{jk}\boldsymbol{n}_k$,有

$$\boldsymbol{G}(x_1,x_2,x_3)=f_j(x_1',x_2',x_3')\alpha_{jk}\boldsymbol{n}_k=f_j(\alpha_{1l}x_l,\alpha_{2l}x_l,\alpha_{3l}x_l)\alpha_{jk}\boldsymbol{n}_k. \tag{1.4.14}$$

在后一等式中我们利用了(1.4.8)式.

如果矢量是用列矩阵表示,则有

$$F(x)\equiv\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\end{pmatrix},\quad G(x)\equiv\begin{pmatrix}\alpha_{j1}f_j(\alpha x)\\\alpha_{j2}f_j(\alpha x)\\\alpha_{j3}f_j(\alpha x)\end{pmatrix}, \tag{1.4.15}$$

为了书写简便,我们在(1.4.15)式中已用$x$代表$(x_1,x_2,x_3)$,用$\alpha x$代表$(\alpha_{1l}x_l,\alpha_{2l}x_l,\alpha_{3l}x_l)$. 坐标表象中的转动变换算符由下式定义

$$\begin{pmatrix}\alpha_{j1}f_j(\alpha x)\\\alpha_{j2}f_j(\alpha x)\\\alpha_{j3}f_j(\alpha x)\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_l\hat{J}_l}\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\end{pmatrix}. \tag{1.4.16}$$

在绕$\boldsymbol{n}_3$作无穷小转动亦即在(1.4.10)式的情况下,(1.4.16)式左方化为(准到$\theta$一次方)

$$\begin{pmatrix}f_1(\alpha x)-\theta f_2(\alpha x)\\f_2(\alpha x)+\theta f_1(\alpha x)\\f_3(\alpha x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x_1+\theta x_2,x_2-\theta x_1,x_3)\\f_2(x_1+\theta x_2,x_2-\theta x_1,x_3)\\f_3(x_1+\theta x_2,x_2-\theta x_1,x_3)\end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix}-f_2(x)\\f_1(x)\\0\end{pmatrix}$$

$$=\left[1+\theta\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\theta\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\end{pmatrix},$$

同时(1.4.16)式右方在上述无穷小变换下,准到$\theta$一次方的结果为

$$(1-\mathrm{i}\theta\hat{J}_3)\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\end{pmatrix}.$$

两相比较即得出

$$\hat{J}_3=\mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\equiv\hat{L}_3+\hat{S}_3. \tag{1.4.17}$$

我们看到，$\hat{J}_3$ 由两项构成，其第一项在乘以 $\hbar$ 后即轨道角动量第 3 分量，它与粒子的位置及其变化有关. 第二项则具有内禀的性质(与粒子的位置及其改变无关)，它在乘以 $\hbar$ 后就是自旋角动量. 矢量的三个分量，像旋量的两个分量一样，代表一种内部自由度，实即自旋自由度. 算符 $\hat{S}_3$ 即为运作在这种内部自由度上的算符. $\hbar\hat{S}_3$ 即为自旋角动量算符的第三分量.

仿此可以求出自旋角动量的另外两个分量，总起来三个算符为

$$\hat{S}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{1.4.18}$$

它们满足的对易关系与轨道角动量相似，即(同样要对重复指标求和)

$$[\hat{S}_j,\hat{S}_k]=\mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\hat{S}_l, \tag{1.4.19}$$

其中 $\varepsilon_{jkl}$ 为三阶反对称数字张量的分量①. 总自旋角动量平方的算符为 $\hbar^2\hat{S}^2$，

$$\hat{S}^2=\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+\hat{S}_3^2=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{1.4.20}$$

它与各个 $\hat{S}_j$ 的对易子都为零. 若将 $\hat{S}^2$ 的本征值写成 $S(S+1)$ 即得出 $S=1$. $S$ 就是相应的自旋量子数，从而矢量波函数代表自旋量子数为 1 的粒子的波函数.

$\hat{S}_3$ 的三个本征态不难求出，结果为

$$n^{(+1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix},\quad n^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad n^{(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \tag{1.4.21}$$

其本征值 $S_3$ 分别为 $+1,0,-1$. 若用矢量表示即为

$$\boldsymbol{n}^{(+1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{n}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{n}_2),\quad \boldsymbol{n}^{(0)}=\boldsymbol{n}_3,\quad \boldsymbol{n}^{(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{n}_1-\mathrm{i}\boldsymbol{n}_2), \tag{1.4.22}$$

它们满足下述正交归一条件

$$\boldsymbol{n}^{(\mu)*}\cdot\boldsymbol{n}^{(\mu')}=\delta_{\mu\mu'}. \tag{1.4.23}$$

---

① $\varepsilon_{jkl}$ 的值如下：$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1$，其余分量为零. 所谓数字张量是指"它在转动变换下要按张量变换，但变换后各分量的数值仍由原式表示. 数字张量共有两个，另一个为二阶的，即 $\delta_{ij}$. 参见§1.5 第 3 小节中的讨论.

另外,由于三个 $\boldsymbol{n}^{(\mu)}$ 之间存在下述关系:

$$\boldsymbol{n}^{(\mu)*} = (-1)^{\mu}\boldsymbol{n}^{(-\mu)}, \tag{1.4.24}$$

故又可写成

$$\boldsymbol{n}^{(\mu)} \cdot \boldsymbol{n}^{(-\mu')} = (-1)^{\mu}\delta_{\mu\mu'}. \tag{1.4.25}$$

在本小节的最后,我们将给出在 $S_3$ 表象中三个自旋分量算符 $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ 和 $\hat{S}_3$ 的表示. 显然,在此表象中

$$\hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.4.26a}$$

它也就是(1.4.18)第三式在(1.4.21)式所示三个态之间的矩阵元. $\hat{S}_1$ 和 $\hat{S}_2$ 在此表象中的表示可通过(1.4.18)第一、二式在(1.4.21)式三个态之间的矩阵元给出,其结果为

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.26b}$$

而原来的(1.4.18)式是表示在以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为基底的表象中,这三个基底分别为 $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$, $\hat{S}_3$ 的本征值为零的本征态. 因而不是在某一个物理量的本征表象.

**4. 光子的自旋,具有确定动量和螺度的自由光子态**

在§1.3 中我们曾说(1.3.42)式所列的矢势有时亦称作动量为 $\hbar\boldsymbol{k}$、偏振为 $S$ 的光子波函数. 从矢量在转动变换下的变换性质,可以想到:"光子的自旋量子数为 1,偏振的自由度就对应于自旋的自由度". 虽然这不是严格的论证,因为矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$并不就是量子力学意义下的波函数. 正规的论证办法是,把电磁场作为物理体系,通过转动变换在经典场论的框架内导出电磁场的总角动量的表达式,然后将其中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 通过量子化变成算符,在库仑规范下这样得出的结果为①

① 在经典电动力学中可推出与(1.4.27b)式相对应的公式. 另外还可将它与平动量的公式相对比,参见(1.4.28)式及该式下的讨论.

$$\hbar \hat{J}_l = -\mathrm{i}\int (\hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ \hat{\pi}_3)(L_l + S_l)\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\ \hat{A}_2\\ \hat{A}_3\end{pmatrix}\mathrm{d}^3 x, \qquad (1.4.27\mathrm{a})$$

或者写作

$$\hat{J}_l = \frac{\mathrm{i}}{4\pi c\hbar}\int (\hat{E}_1\ \hat{E}_2\ \hat{E}_3)(L_l + S_l)\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\ \hat{A}_2\\ \hat{A}_3\end{pmatrix}\mathrm{d}^3 x. \qquad (1.4.27\mathrm{b})$$

其中 $L_l$ 为不带 $\hbar$ 的轨道角动量算符$\left(-\mathrm{i}\epsilon_{ljk}x_j\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right)$，$S_j$ 为 $3\times3$ 矩阵如(1.4.18)式所表示. 将 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 用适当的函数(即§1.5节所讲的多极场)来展开就可看出 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 的取值是量子化的. 每个量子的总角动量是由轨道角动量和"量子数为 1 的自旋角动量"所合成. 在§1.5节我们还会再回到这一问题.

附带指出(1.4.27)式与平动量 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 的表达式有着对应的关系，因利用 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，$\hat{P}_l$ 也可写成

$$\hat{P}_l = -\mathrm{i}\int (\hat{\pi}_1\ \hat{\pi}_2\ \hat{\pi}_3)\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\ \hat{A}_2\\ \hat{A}_3\end{pmatrix}\mathrm{d}^3 x$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{4\pi c}\int (\hat{E}_1\ \hat{E}_2\ \hat{E}_3)\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\ \hat{A}_2\\ \hat{A}_3\end{pmatrix}\mathrm{d}^3 x. \qquad (1.4.28)$$

它与(1.4.27)式的对应关系即 $-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_l}\leftrightarrow L_l + S_l$. 上两式还显示出矢势波函数 $\boldsymbol{A}$ 与量子力学矢量粒子的波函数 $\boldsymbol{F}$ 的差别. 在二次量子化的量子力学多体(自旋为 1 粒子)理论中，平动量 $\hat{P}_l$ 的表达式为

$$\hat{P}_l = \hbar\int (\hat{F}_1^\dagger\ \hat{F}_2^\dagger\ \hat{F}_3^\dagger)\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\begin{pmatrix}\hat{F}_1\\ \hat{F}_2\\ \hat{F}_3\end{pmatrix}\mathrm{d}^3 x.$$

总角动量的表达式也有类似的关系，只是把上式中 $-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_l}$ 换成了 $(L_l + S_l)$. (1.4.28)式与上式的差别在于：在用 $\hat{A}_j$ 代替 $\hat{F}_j$ 的同时，要用 $-\mathrm{i}\hat{\pi}_j$ 代替了 $\hbar\hat{F}^\dagger$.

光子波函数与量子力学中自旋为 1 的粒子的波函数还有一个不同之处,那就是它要满足横波条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0. \tag{1.4.29}$$

对于平面波,上式要求偏振矢量必须与 $\boldsymbol{k}$ 垂直(这是对自旋方向的一种限制),我们可把横波的两个独立基矢取成光学中圆偏振的基矢:

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(+1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k1}+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_{k2}),$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{k1}-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_{k2}), \tag{1.4.30}$$

其中 $\boldsymbol{e}_{k1},\boldsymbol{e}_{k2}$与 $\boldsymbol{n}_k$($\boldsymbol{k}$ 方向上的单位矢量)构成右方螺旋坐标系. 我们将把自旋 $\boldsymbol{S}$ 在波矢方向的投影称作螺度. 按照(1.4.22)式,$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(+1)}$和 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(-1)}$两种偏振分别对应于螺度$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}_k$ 等于$+1$ 和$-1$. 于是,具有确定动量和螺度的光子态由下述矢势波函数描述(关于下式中的因子$\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}$参见(1.3.24)式)

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(+1)}(\boldsymbol{x},t)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t},$$

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(-1)}(\boldsymbol{x},t)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}. \tag{1.4.31}$$

而量子化后的矢势算符$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)$按动量和螺度一定的光子态的展式即为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k},s=\pm1}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{(s)}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(s)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{(s)\dagger}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}^{(s)*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}], \tag{1.4.32}$$

其中$\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{(s)}$ 和$\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{(s)\dagger}$ 代表具有动量 $\hbar\boldsymbol{k}$ 和螺度$S$ 的光子的吸收算符和发射算符. 它们与$\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}$之间的关系为

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{(+1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\boldsymbol{k}1}-\mathrm{i}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}2}),\quad \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\boldsymbol{k}1}+\mathrm{i}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}2}) \tag{1.4.33}$$

从本节的讨论,我们看到,螺度一定的光子态就是通常所说的圆偏振态. 横波条件对自旋方向的限制即为:它只能与波矢平行或反平行.

## §1.5 具有确定能量、总角动量和宇称的自由光子态

除了上节所讨论的具有确定动量和螺度的状态之外,另一组常用的自由光子态是具有确定能量、总角动量(指其平方和第 3 分量)和宇称的状态. 与角动量有轨道和内禀两部分的情况相仿,光子的宇称除了轨道宇称以外还有一个内禀宇称

(我们将看到,其值为 - 1),它在原子辐射的选择规则中将会显示出自己. 具有确定能量、总角动量和宇称的态就是通常所说的电多极场和磁多极场. 这个名称的来源是在于它们与原子的电多极辐射和磁多极辐射相联系(参见 §4.2 节).

在本节中将通过坐标反射变换来确定光子的宇称,就如上节通过转动变换来确定光子的角动量一样.

**1. 矢量球函数和具有确定能量和总角动量的状态**

在平面波情况,自由粒子的能量将由波数 $k$(即 $\boldsymbol{k}$ 的绝对值)确定,其关系式为

$$E = \sqrt{(\hbar kc)^2 + \mu^2 c^4}, \tag{1.5.1}$$

其中 $\mu$ 代表粒子的静止质量(在相对论理论中,质量总是指静止质量). 即使是在球面波情况,我们也将用 $k$ 按照上式的关系来标志粒子的能量. 对于自旋为零的粒子,波函数为标量,具有确定能量 $E$ 和角动量(量子数)$l$ 的态共有 $2l+1$ 个,分别对应于 $m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l$,即

$$\varphi_{klm}(\boldsymbol{x}) = a_{kl}\mathrm{g}_l(kr)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi), m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l, \tag{1.5.2}$$

其中 $a_{kl}$ 为归一化常数,$\mathrm{g}_l(kr)$ 为球贝塞尔函数,它与半整数阶的贝塞尔函数关系为

$$\mathrm{g}_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(kr). \tag{1.5.3}$$

最简单的几个球贝塞尔函数如下所示

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathrm{g}_1(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x),\\
&\mathrm{g}_2(x) = \frac{1}{x^3}[(3-x^2)\sin x - 3x\cos x],\\
&\mathrm{g}_3(x) = \frac{1}{x^4}[3(5-2x^2)\sin x - x(15-x^2)\cos x].
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

球贝塞尔函数满足下述球贝塞尔方程:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\mathrm{g}_l(kr) = 0, \tag{1.5.5}$$

它是从波动方程(或者说亥姆霍兹方程)通过分离变量得出来的. (1.5.2)式中的 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ 为球函数,由下式表示:

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(-\sin\theta)^m\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+m}(x^2-1)^l\right]_{x=\cos\theta}. \tag{1.5.6}$$

最前几个球函数为

$$\mathrm{Y}_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad \mathrm{Y}_{11}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{r}(x_1+\mathrm{i}x_2),$$

$$\mathrm{Y}_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{r}x_3,$$

$$\mathrm{Y}_{1-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{r}(x_1-\mathrm{i}x_2). \tag{1.5.7}$$

球函数满足的方程也是从波动方程(或者说从亥姆霍兹方程)通过分离变量得出的:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Y}_{lm}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\mathrm{Y}_{lm}+l(l+1)\mathrm{Y}_{lm}=0. \tag{1.5.8}$$

它们与其复共轭函数之间还满足下述关系:

$$\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)=(-1)^m\mathrm{Y}_{l,-m}(\theta,\varphi). \tag{1.5.9}$$

正交归一化条件为

$$\int \mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l'm'}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{1.5.10}$$

以上是自旋为零的情况,对于自旋为 1 的粒子,波函数为矢量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$,由于矢量有三个分量,因而对于确定的能量 $E$ 和轨道角动量 $l$,共有 $3(2l+1)$个函数,写成列矩阵形式即为 $F_{klm}^{(j)}(\boldsymbol{x})n^{(j)}$,$(j=+1,0,-1)$,$n^{(j)}$ 如(1.4.21)式所示. 这 $3(2l+1)$个波函数,对应于$\hat{L}_3$ 和$\hat{S}_3$ 不同的本征值 $m$ 和$j$. 我们可将这 $3(2l+1)$个函数重新组合成总角动量量子数$J$ 等于$l+1,l,l-1$,总角动量第 3 分量量子数 $M=J,J-1,\cdots,-J$ 的态函数. 在进行这种组合时,需先求得$\hat{L}^2$,$\hat{J}^2$ 和$\hat{J}_3$ 的共同本征函数. 它们写成列矩阵形式即为

$$\mathrm{Y}_{JlM}(\theta,\varphi)=\sum_j C_{lM-j,1j}^{JM}\mathrm{Y}_{lM-j}(\theta,\varphi)n^{(j)}. \tag{1.5.11}$$

若表成矢量形式则称为矢量球函数或球矢量:

$$\boldsymbol{Y}_{JlM}(\theta,\varphi)=\sum_j C_{l(M-j),1j}^{JM}\mathrm{Y}_{l(M-j)}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}^{(j)}, \tag{1.5.12}$$

其中 $\boldsymbol{n}^{(j)}$ 如(1.4.22)式所示. $\boldsymbol{Y}_{JlM}$满足的正交归一化条件为

$$\int \boldsymbol{Y}_{JlM}^*(\theta,\varphi)\cdot\boldsymbol{Y}_{J'l'M'}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega=\delta_{JJ'}\delta_{ll'}\delta_{MM'}. \tag{1.5.13}$$

它们的复共轭函数类似地可表为

$$\boldsymbol{Y}_{JlM}^*(\theta,\varphi)=(-1)^{J+l+M+1}\boldsymbol{Y}_{Jl(-M)}(\theta,\varphi). \tag{1.5.14}$$

自旋为 1 的自由粒子的力学量完全集合可取为$\hat{H}$,$\hat{J}^2$,$\hat{L}^2$ 和$\hat{J}_3$,它们的共同

本征态即为

$$\boldsymbol{f}_{kJlM}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{g}_l(kr)\boldsymbol{Y}_{JlM}(\theta,\varphi), \tag{1.5.15}$$

可称为矢量球面波(尚未归一化).

**2. 矢量球面横波**

上一小节求出的结果还不能直接用到自由光子上,因为矢势 $\boldsymbol{A}$ 还要满足横波条件即散度为零. 下面我们要寻求的是具有确定量子数 $k,J,M$ 并满足横波条件的解.

对于一定的 $k,J,M$,共有三个 $\boldsymbol{f}_{kJlM}(\boldsymbol{x})$,其中 $l$ 取 $J+1$,$J$ 和 $J-1$. ($J=0$ 除外,这时 $l$ 只有一个取值即 $l=1$). 可以证明(见下文小字)其中的一个 $\boldsymbol{f}_{kJJM}(\boldsymbol{x})$ 可以表示成

$$\boldsymbol{f}_{kJJM}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{J(J+1)}}\nabla\times[g_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\boldsymbol{x}], \tag{1.5.16a}$$

因而满足横波条件(任一矢量函数旋度的散度恒为零). 我们将它重标记为 $\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$,

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_{kJJM}(\boldsymbol{x}). \tag{1.5.16b}$$

另外两个 $\boldsymbol{f}_{kJ(J\pm1)M}(\boldsymbol{x})$ 既不是横波也不是纵波,但可以将它们重新组合,使其中一个 $\boldsymbol{f}^{(2)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$ 为横波,另一个 $\boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$ 为纵波. 下文小字将给出这两个组合分别为

$$\boldsymbol{f}^{(2)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) = -\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\boldsymbol{f}_{kJ(J+1)M}(x) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\boldsymbol{f}_{kJ(J-1)M}(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\boldsymbol{f}_{kJ(J+1)M}(x) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}}\boldsymbol{f}_{kJ(J-1)M}(\boldsymbol{x}). \tag{1.5.17}$$

下面将证明

$$\boldsymbol{f}^{(2)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\mathrm{i}k}\nabla\times\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{k}\nabla[g_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)]. \tag{1.5.18}$$

由(1.5.18)式即知 $\boldsymbol{f}^{(2)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$ 为横波,$\boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$ 为纵波(因一个标量函数梯度的旋度恒为零). 为此我们先给出轨道角动量算符 $\boldsymbol{L}=-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\times\nabla$ 的一些性质. 首先它满足

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{L} = 0,\qquad \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L} = \mathrm{i}\boldsymbol{L}. \tag{1.5.19}$$

其次利用(1.4.23)式可得 $\boldsymbol{L}$ 按 $\boldsymbol{n}^{(\mu)}$ 的展式为

$$\boldsymbol{L} = L_{(-1)}\boldsymbol{n}^{(+1)} + L_0\boldsymbol{n}^{(0)} + L_{(+1)}\boldsymbol{n}^{(-1)}, \tag{1.5.20}$$

其中 $L_\mu=(-1)^\mu\boldsymbol{n}^\mu\cdot\boldsymbol{L}$,具体表达式为

$$L_{(+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_0 = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$L_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{i}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{1.5.21}$$

利用球函数的递推公式可得

$$L_{(+1)}\mathrm{Y}_{JM} = \sqrt{\frac{(J-M)(J+M+1)}{2}}\mathrm{Y}_{JM+1},$$

$$L_0\mathrm{Y}_{JM} = M\mathrm{Y}_{JM},$$

$$L_{(-1)}\mathrm{Y}_{JM} = -\sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{2}}\mathrm{Y}_{JM-1}. \tag{1.5.22}$$

上式可统一地表示为

$$L_{(-\mu)}\mathrm{Y}_{JM} = \sqrt{J(J+1)}\,C^{JM}_{JM-\mu,1\mu}\mathrm{Y}_{JM-\mu}. \tag{1.5.23}$$

这样就将 $\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM}$ 表为(利用上式和(1.5.20)式,并注意到 $\boldsymbol{L}$ 只含对 $\theta,\varphi$ 的微商)

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{\mu} C^{JM}_{J(M-\mu),1\mu}\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{J(M-\mu)}\boldsymbol{n}^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}}\boldsymbol{L}(\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)). \tag{1.5.24}$$

再由 $\boldsymbol{L} = -\mathrm{i}\boldsymbol{x}\times\nabla$ 以及$\nabla\times\boldsymbol{x} = 0$,即可将上式化成(1.5.16a)式:

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{J(J+1)}}\nabla\times(\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\boldsymbol{x}).$$

其次来看 $\boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$. 利用球贝塞尔函数的下述性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{g}_J(z) + \mathrm{g}_{(J+1)}(z) = \frac{J}{z}\mathrm{g}_J(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{g}_J(z) - \mathrm{g}_{(J-1)}(z) = -\frac{J+1}{z}\mathrm{g}_J(z), \tag{1.5.25}$$

可以证明

$$\frac{1}{k}\nabla[\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)] = \sqrt{\frac{J}{2J+1}}\boldsymbol{f}_{kJ(J-1)M}(\boldsymbol{x}) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\boldsymbol{f}_{kJ(J+1)M}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x}). \tag{1.5.26}$$

此即(1.5.18)第二式. 从而证明了 $\boldsymbol{f}^{(3)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$为纵波.

最后来考察 $\boldsymbol{f}^{(2)}_{kJM}(\boldsymbol{x})$. 利用矢量公式$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{R}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{R}) - \nabla^2\boldsymbol{R}$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为任一矢量函数,即得

$$\nabla\times\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{J(J+1)}}\{\nabla[\nabla\cdot(\mathrm{g}_J\mathrm{Y}_{JM}\boldsymbol{x})] - \nabla^2(\mathrm{g}_J\mathrm{Y}_{JM}\boldsymbol{x})\}.$$

再通过一些较复杂的矢量分析运算,并利用$(\nabla^2 + k^2)(\mathrm{g}_J\mathrm{Y}_{JM}) = 0$,即可将上式化成

$$\nabla\times\boldsymbol{f}^{(1)}_{kJM} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{J(J+1)}}\left[2\nabla(\mathrm{g}_J\mathrm{Y}_{JM}) + r\frac{\partial}{\partial r}\nabla(\mathrm{g}_J\mathrm{Y}_{JM}) + k^2(\mathrm{g}_J\mathrm{Y}_{JM})\boldsymbol{x}\right].$$

最后再利用(1.5.18)第二式以及(1.5.25)式和

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{x}\mathrm{Y}_{JM}=-\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\boldsymbol{Y}_{J(J+1)M}+\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\boldsymbol{Y}_{J(J-1)M},$$

即可化出

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{f}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})&=\mathrm{i}k\left[\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}g_{J-1}(kr)\boldsymbol{Y}_{J(J-1)M}(\theta,\varphi)-\sqrt{\frac{J}{2J+1}}g_{J+1}(kr)\boldsymbol{Y}_{J(J+1)M}(\theta,\varphi)\right]\\&=\mathrm{i}k\boldsymbol{f}_{kJM}^{(2)}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

这样 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(2)}$ 的横波性也得到了证明.

顺带指出,在 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(1)}$ 中变量 $r$ 和 $(\theta,\varphi)$ 是分离的,这由(1.5.15)式即可看出. 但在 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(3)}$ 中,变量 $r$ 和 $(\theta,\varphi)$ 并不互相分离,而是纠缠起来的.

从(1.5.12)式可以得知当 $J=l=0$ 时,矢量球函数 $\boldsymbol{Y}_{000}(\theta,\varphi)$ 恒为零,从而 $J=0$ 时 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(1)}$ 不存在. 而由(1.5.17)第一式还可看出当 $J=0$ 时 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(2)}$ 亦不存在. 这表明,我们所需要的二个横波解最小的 $J$ 值都等于1. 至于纵波解 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(3)}$,由于 $J=0$ 时(1.5.17)第二式中第一项并不为零,故 $J=0$ 的纵波解是存在的.

以上所得到的 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(r)}(\boldsymbol{x})$ 尚未归一化. 在本节末尾处的小字注解里,我们将证明:当归一化的体积(取为球体)取得很大时,归一化常数与 $J,M$ 和 $r(r=1,2)$ 无关,都等于 $\sqrt{\frac{2k^2}{R}}$,其中 $R$ 为归一化球体的半径. 于是归一化的两个横波为

$$\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)}(\boldsymbol{x})=\sqrt{\frac{2k^2}{R}}\boldsymbol{f}_{kJM}^{(r)}(\boldsymbol{x}),\ r=1,2. \tag{1.5.27}$$

其中 $k$ 取离散值,亦参见本节末尾处的小字注解.

### 3. 光子的内禀宇称

在量子理论中,若物理规律在空间反射变换下保持不变,那么就可以定义一个新的守恒量“宇称”. 物理规律在空间反射下的不变性,也就是物理规律的左右对称性,因右手坐标架在反射后就成为左手坐标架. 另外,它也意味着:若某个过程是现实可能的(即符合物理规律的)则它的镜像过程也将是现实可能的. 于是它又称为镜像对称性. 电磁规律具有左右对称性,因此在量子电动力学中,宇称是一个重要的物理量.

下面先对反射变换不变性与宇称守恒的关系,以及宇称合成的问题作简要的讨论. 像转动变换算符 $\hat{R}$ 一样,我们可以定义一个反射变换算符 $\hat{P}$. 它也是幺正算符,即

$$\hat{P}^{\dagger}=\hat{P}^{-1},$$

它与转动变换不同的是,反射变换是一种分立变换(不含连续变化的参量),不能像转动变换那样引入生成元(转动变换算符 $\hat{R}$ 本身不是厄米算符故不能代表物理量,

其生成元是厄米算符才成为物理量即“角动量”). 但由于两次反射变换等于不变①,即$\hat{P}^2=1$,故有

$$\hat{P} = \hat{P}^{-1} = \hat{P}^{\dagger}, \tag{1.5.28}$$

即$\hat{P}$本身就是厄米算符. 于是我们可通过它来定义一个物理量,此物理量就是宇称. 从$\hat{P}^2=1$还可得出宇称的本征值只是$\pm 1$.

在物理规律具有反射对称性的情况下,有(可像(1.4.4)式一样地论证)

$$\hat{P}\,\hat{H}\,\hat{P}^{-1} = \hat{H}, \tag{1.5.29}$$

由此即得

$$[\hat{P},\hat{H}] = 0, \tag{1.5.30}$$

因此宇称就成了守恒量.

我们知道当一个系统由两个“具有互相独立自由度”的子系统组成时,系统的变换算符总是等于两个子系统的变换算符的外乘. 在转动变换情况下,这就对应于:系统的角动量算符为两个子系统的角动量之和,对于反射变换,由于守恒量就是变换算符本身,情况就不同了. 系统的总宇称将等于两个子系统宇称的乘积,即

$$P = P_1 P_2. \tag{1.5.31}$$

这种合成关系保证了宇称的取值总是$\pm 1$.

下面我们来讨论矢量波函数或矢量场的宇称. 像转动变换一样,反射变换也有两种定义方式. 一种方式是,状态不变而坐标架 $c$ 的轴反了向. 这样若 $c$ 为右手坐标架,则反射后的坐标架 $c'$就变成了左手坐标架. 因而空间反射对称性在此就成为左右手坐标架间的对称性. 另一种是坐标架不变,而状态$|A\rangle$变成了它的镜像态$|A'\rangle$. 相应地,一个过程变成了它的镜像过程(在三维空间,应该对每个坐标轴作一次镜像反射. 但这等价于“只对一个轴作镜像反射再附加一个 180 度的转动”). 在这种定义方式下,空间反射对称性也就成为镜像对称性. 同§1.4一样,在这里我们亦采用第二种定义方式,并同样引入一个随体系状态作了镜像反射的辅助坐标架 $c'$. 原来的固定坐标架仍用 $c$ 表示.

作为准备,先来看标量波函数的情况,设原来的波函数在坐标架 $c$ 中为$\phi(\boldsymbol{x})$,在状态作镜像变换后,由于辅助坐标架 $c'$也作了同样的变换,故在 $c'$中波函数的形式不变,只是宗量改为相对于坐标架 $c'$的坐标 $x'$. 即波函数就是 $\phi(\boldsymbol{x}')$. 下面来确定镜像变换后的状态在原坐标架中的形式. 由于坐标架 $c'$与坐标架$c$之间的坐标变换(指同一点在两个坐标架中的坐标间的关系)为

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}. \tag{1.5.32}$$

---

① 这里是对光场而言. 对电子场(或一般而言,费米场)则不同,因单个费米场不是可观测量,参见§2.1.

由此即得出变换后状态在 $c$ 中的波函数为 $\varphi(\boldsymbol{x})$:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \phi(-\boldsymbol{x}). \tag{1.5.33}$$

如用 $\hat{P}$ 表示变换算符,则有

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \hat{P}\phi(\boldsymbol{x}). \tag{1.5.34}$$

将(1.5.33)式代入后即得

$$\hat{P}\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(-\boldsymbol{x}). \tag{1.5.35}$$

当 $\phi(\boldsymbol{x})$是偶函数时,上式化为

$$\hat{P}\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}).$$

即对应于本征值为+1,而当 $\phi(\boldsymbol{x})$为奇函数时,(1.5.35)式化为

$$\hat{P}\phi(\boldsymbol{x}) = -\phi(\boldsymbol{x}).$$

即相应的本征值为-1. 上述本征值即为宇称(实为轨道宇称,见下文). 一般的波函数可表为这两种本征函数的叠加.

下面转到矢量波函数情况. 设在镜像反射前该矢量波函数的列矩阵表示为 $(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))$. 在状态作了镜像反射后,不仅像(1.5.35)式那样,宗量 $\boldsymbol{x}$ 变成了 $-\boldsymbol{x}$,而且 $f_1, f_2, f_3$ 作为矢量的分量亦变了一个符号. 亦即

$$\hat{P}(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x})) = -(f_1(-\boldsymbol{x}), f_2(-\boldsymbol{x}), f_3(-\boldsymbol{x})), \tag{1.5.36}$$

或者表示为

$$\hat{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}). \tag{1.5.37}$$

与(1.5.35)式相比,上式右方多了一个负号.

于是我们可将矢量波函数的宇称写成

$$P = -P_L, \tag{1.5.38}$$

其中 $P_L$ 为轨道宇称,等于+1或-1,视 $f_j(x)$为 $\boldsymbol{x}$ 的偶函数还是奇函数而定. 而(1.5.38)式中的附加负号,代表矢量波函数还有一个内禀宇称,其值为-1. 其总的宇称即为内禀宇称与轨道宇称的乘积,结果与(1.5.31)式相似.

还有一种叫赝矢量的波函数或场. 赝矢量是这样一种量,它在转动变换下和矢量一样的变换,而在反射变换下与矢量的变换差一个符号. 磁场强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$就是这种赝矢量场(设想磁力线是可见的,从镜子里看一根直导线上电流所产生的磁力线,就会得出,它与电流是左手螺旋关系). $B$ 在反射变换下的变换公式为

$$\hat{P}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{x}). \tag{1.5.39}$$

而矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$和电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$都是矢量场,它们的变换由(1.5.37)表示. 由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$代表电磁场的广义坐标和广义动量,因此电磁场或光子的内禀宇称为负.

两个矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 可以做成一个赝矢量 $\boldsymbol{V}$,它的分量可以表为(对重复指标要求和)

$$V_j = \varepsilon_{jkl} F_k G_l, \tag{1.5.40}$$

其中 $\varepsilon_{jkl}$ 总是由下式确定(不论是在右手坐标架还是左手坐标架)

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1,$$

$$\varepsilon_{jkl} = 0 \text{ 当有两个脚标相同或三个脚标都相同时}. \tag{1.5.41}$$

在变换后的坐标架 $c'$ 中(无论是转动变换还是反射变换),$\boldsymbol{V}'$ 的分量仍通过

$$V'_j = \varepsilon_{jkl} F'_k G'_l \tag{1.5.42}$$

来确定,用通常的符号表示即为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{F}' \times \boldsymbol{G}' \tag{1.5.43}$$

(注:在左手坐标架中,矢量叉乘的规则仍是 $\boldsymbol{n}'_1 \times \boldsymbol{n}'_2 = \boldsymbol{n}'_3$,等等,因而是按左手螺旋规则. 作这样的定义,为的是把左手坐标架放在与右手坐标架对等的地位上). 从(1.5.42)或(1.5.43)式来看,在作反射变换时,$F'_k = -F_k$,$G'_l = -G_l$,从而 $V'_j = V_j$,即与矢量的变换差一个符号,因此赝矢量波函数或场的内禀宇称为(+1).

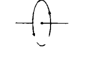


图 1.5.1

在物理学中用赝矢量来描写的物理量除了磁场强度外,还有转动、角速度、角加速度、力矩、角动量等. 从物理上来说,赝矢量与矢量的差别在于:赝矢量如图 1.5.1 所示的转动轴只是其方位有直接意义,至于两个可能的指向取哪一个,要看你采用的是右手螺旋规则还是左手螺旋规则.

从代数学的意义来说,$\varepsilon_{jkl}$ 代表数字三阶赝张量. 三阶的意义是说,在转动变换中,它的三个脚标都按矢量的脚标那样变换,赝字是说:在反射变换中它除了按三阶张量那样要乘一个因子$(-1)^3$ 外,还要再多乘一个(−1). 至于"数字张量"意思是说,它的各分量的值都为不变的数字. 例如 $\varepsilon_{ikl}$ 总是由(1.5.41)给定. 换句话说,在作转动和反射变换时按上述方案得出的各分量数值还与原来的一样. 在三维空间中总共只有两个数字张量,另一个是二阶张量 $\delta_{jk}$.

还有一种赝标量波函数或赝标量场. 如核物理中的 $\pi$ 介子场 $\chi(\boldsymbol{x})$,或磁场的散度$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$. 在反射变换下,$\chi$ 的变换为

$$\hat{P}\chi(\boldsymbol{x}) = -\chi(\boldsymbol{x}). \tag{1.5.44}$$

至于$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$,算符$\nabla$ 的三个分量像矢量的三个分量一样地变换,即在转动时

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} = \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial x'_k},$$

因此转动后的$\frac{\partial B'_j}{\partial x'_j}$等于$\frac{\partial B_j}{\partial x_j}$. 而在反射时,$\frac{\partial B'_j}{\partial x'_j}$等于$\left(-\frac{\partial B_j}{\partial x_j}\right)$,变了一个符号.

通过 $\varepsilon_{kjl}$ 可从三个矢量$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ 作成一个赝标量

$$\chi = \varepsilon_{jkl} E_j F_k G_l. \tag{1.5.45}$$

用通常的符号表示即为 $\chi = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{F} = \cdots$.

物理量的变换性质在我们核对一个理论公式或假设某个理论公式时有着实际的价值. 例如在一个电磁理论公式中,各项除了必须具有同样的量纲以外,还必需在转动和反射变换下具有同样的变换性质. 例如作为电磁基本规律的麦克斯韦方程组,只要我们假设它对 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$,

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$,$\rho(\boldsymbol{x})$和$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$是线性的,各项至多出现对时间或空间的一次微商,方程中只含一个带量的常数 $c$(真空中光速),那么除了可能的数字系数(如 1/2,π)外,基本上就可将它确定下来. 因为总共可能出现项只有 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\rho,\boldsymbol{J},\nabla\circ\boldsymbol{E},\nabla\circ\boldsymbol{B},\nabla\times\boldsymbol{E},\nabla\times\boldsymbol{B},\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\nabla\rho,\nabla\circ\boldsymbol{J},\nabla\times\boldsymbol{J},\frac{\partial\rho}{\partial t},\frac{\partial J}{\partial t}$.

在配量纲时唯一可使用的常数是 $c$:首先,$\nabla\circ\boldsymbol{E}$ 为标量,其他为标量的项只有 $\rho,\frac{\partial\rho}{\partial t}$和$\nabla\cdot\boldsymbol{J}$,但$\frac{\partial\rho}{\partial t}$和$\nabla\cdot\boldsymbol{J}$ 都不可能通过乘上 $c$ 的幂次而与$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 一样,因此$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 只能正比于$\rho$,两者量纲相同(我们用的是高斯单位制),其次,$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ 必须为零,因以上各项中无其他的项是赝标量. $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 是赝矢量,其他赝矢量的项有 $\boldsymbol{B},\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\nabla\times\boldsymbol{J}$,只有其中的$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$项可通过除以 $c$ 来与$\nabla\times\boldsymbol{E}$ 量纲相配. $\nabla\times\boldsymbol{B}$ 为矢量,其他的矢量项有 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{J},\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}$,只有其中的 $\boldsymbol{J}$ 和$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$可通过除以 $c$ 与$\nabla\times\boldsymbol{B}$ 量纲相匹配. 除上述四式外,再也得不出其他等式. 这样除了附加的无量纲的系数外,基本上就得出了麦克斯韦方程组.

## 4. 具有确定能量、总角动量和宇称的自由光子态

根据第 1 小节的讨论,具有能量 $E=\hbar kc$、总角动量的平方(量子数)$J(J+1)$和它的第三分量(量子数)$M$ 的自由光子态共有两个,其矢势波函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$分别正比于 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})$和 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(2)}(\boldsymbol{x})$. $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})$具有确定的轨道角动量 $l=J$. 而 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(2)}(\boldsymbol{x})$则为两个轨道角动量 $l=J+1$ 和 $l=J-1$ 状态的叠加. 这表明轨道角动量量子数已不适宜于来标志具有横波性的光子态,需要用另外一个量子数来代替. 这个量子数就是宇称. 我们知道轨道角动量为 $l$ 的态具有轨道宇称$(-1)^l$,光子的内禀宇称为$(-1)$,因此 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})$的总宇称为$(-1)^{J+1}$,而 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(2)}(\boldsymbol{x})$态中两项的总宇称都是$(-1)^J$,即 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(2)}$具有确定的总宇称$(-1)^J$. 于是$\hat{H},\hat{J}^2,\hat{J}_3$ 和宇称$\hat{P}$构成确定光子态的一个完全集合. 如果用 $\boldsymbol{F}_{kJMP}$表示它们的共同本征态,即有

$$\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)}=\boldsymbol{F}_{kJM}^{(-1)J+r},\qquad r=1,2. \tag{1.5.46}$$

它们满足下述正交归一化条件:

$$\int_V\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)*}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{F}_{k'J'M'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=\delta_{kk'}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{rr'}, \tag{1.5.47}$$

其中 $V$ 代表半径为$R$ 的大球. $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)}$与它的复共轭函数间的关系是

$$\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)*}(\boldsymbol{x})=(-1)^{M+r}\boldsymbol{F}_{kJ(-M)}^{(r)}(\boldsymbol{x}). \tag{1.5.48}$$

下面我们写出这两个矢势所对应的电磁场. 它们分别称为电多极场和磁多极场,因为分别与电多极辐射和磁多极辐射相联系. 关于这一点我们将在第四章中讨论.

(1) 电多极场　这时自由光子的矢势波函数为(关于下式中因子$\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}$,参见

(1.3.24)式)

$$A_{kJM}^{(-1)^J}(x,t)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}F_{kJM}^{(2)}(x)e^{-i\omega t},\omega\equiv kc. \tag{1.5.49}$$

相应的电场强度和磁场强度为

$$E(x,t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}=i\sqrt{2\pi\hbar\omega}F_{kJM}^{(2)}(x)e^{-i\omega t},$$

$$B(x,t)=\nabla\times A(x,t)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k^3}}\nabla\times\nabla\times F_{kJM}^{(1)}(x)e^{-i\omega t}$$

$$=-i\sqrt{2\pi\hbar\omega}F_{kJM}^{(1)}(x)e^{-i\omega t}. \tag{1.5.50}$$

在推导(1.5.50)第二式的最后一步中，我们利用了$\nabla\times\nabla\times F_{kJM}^{(1)}=\nabla(\nabla\cdot F_{kJM}^{(1)})-\nabla^2F_{kJM}^{(1)}$，以及$\nabla\cdot F_{kJM}^{(1)}=0$，$(\nabla^2+k^2)F_{kJM}^{(1)}=0$.

以上就是电多极辐射所产生的电磁场，其宇称为$(-1)^J$. $J=1$(这是$J$的最小取值)对应于电偶极场，$J=2$对应于电四极场，如此类推. 在经典电磁场论中电多极场又常称为TM型球面波. 因由(1.5.24)和(1.5.19)式，$x\cdot B$处处为零.

(2) 磁多极场　这时自由光子的矢势波函数为

$$A_{kJM}^{(-1)^{J+1}}(x,t)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}F_{kJM}^{(1)}(x)e^{-i\omega t}, \tag{1.5.51}$$

相应的电场强度和磁场强度为

$$E(x,t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)=i\sqrt{2\pi\hbar\omega}F_{kJM}^{(1)}(x)e^{-i\omega t},$$

$$B(x,t)=\nabla\times A(x,t)=\nabla\times F_{kJM}^{(1)}(x)e^{-i\omega t}=i\sqrt{2\pi\hbar\omega}F_{kJM}^{(2)}(x)e^{-i\omega t}. \tag{1.5.52}$$

当$J$取其最低值1时，上述场就是磁偶极场，$J=2$时即为磁四极场，如此类推. 磁多极场又常称为TE型球面波，因$E$的径向分量恒为零. 它的宇称为$(-1)^{J+1}$.

一般的自由矢势$A(x,t)$按多极势展开的表式为

$$A(x,t)=\sum_{kJMr}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}\left[a_{kJMr}F_{kJM}^{(r)}(x)e^{-i\omega t}+a_{kJMr}^{*}F_{kJM}^{(r)*}(x)e^{i\omega t}\right]. \tag{1.5.53}$$

在某些最后的计算中，我们常将归一化的大球的半径$R$取得很大，以便对$k$的求和可转化为对$k$的积分. 在下文小字中，我们将证明$\frac{dn}{dk}=\frac{R}{\pi}$，其中$dn$代表$dk$范围内$k$的取值的数目，这样就有

$$\sum_k\to\int\frac{R}{\pi}dk. \tag{1.5.54}$$

在量子化后，$\boldsymbol{A}$ 和 $a_{kJMr}$ 都转化为算符，于是(1.5.53)式化为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{kJMr}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}\left[\hat{a}_{kJMr}\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \hat{a}_{kJMr}^{\dagger}\boldsymbol{F}_{kJM}^{(r)*}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right], \tag{1.5.55}$$

$\hat{a}_{kJMr}$ 和 $\hat{a}_{kJMr}^{\dagger}$ 分别为吸收和发射一个能量为 $\hbar kc$、角动量量子数为 $(J,M)$ 以及宇称为 $(-1)^{J+r}$ 的光子的算符. (1.5.55)式与平面波情况的(1.3.29)第一式相对应. 相应的光子数算符为

$$\hat{n}_{kJMr} = \hat{a}_{kJMr}^{\dagger}\hat{a}_{kJMr}. \tag{1.5.56}$$

场的能量和总角动量的第三分量可表成

$$\hat{H} = \sum_{kJMr}\left(\hat{n}_{kJMr} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

$$\hbar\hat{J}_3 = \sum_{kJMr}\left(\hat{n}_{kJMr} + \frac{1}{2}\right)M\hbar, \tag{1.5.57}$$

即多极场的能量和总角动量第三分量的取值是量子化的，每个量子具有能量 $\hbar\omega$，总角动量第三分量 $M\hbar$. 由于坐标轴 $\boldsymbol{n}_3$ 可取在空间任一方向，故以上结果也表明总角动量沿任意方向的分量都是量子化的.

最后我们来求态密度 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}k}$ 以及波函数的归一化常数.

如前所设，电磁场是局限在一个半径为 $R$ 的大球内. 具体的实现可取球形腔的腔壁为理想导体. 于是在 $r=R$ 的面上的边条件即为 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量等于零. 对于磁多极场，电场就在切向，从而由(1.5.52)、(1.5.16)和(1.5.15)式，边条件即化为

$$\mathrm{g}_J(kR) = 0. \tag{1.5.58}$$

再通过球贝塞尔函数 $\mathrm{g}_J(z)$ 的节点 $z_n^{(J)}$ ($z_n^{(J)}$ 代表 $g_J(z)=0$ 的第 $n$ 个根)，即可求出一系列允许的 $k$ 值：

$$k_n^{(J)} = \frac{1}{R}z_n^{(J)}. \tag{1.5.59}$$

在 $R \gg J/k$ 情况下

$$\mathrm{g}_J(kR) \approx \frac{1}{kR}\sin\left(kR - \frac{J}{2}\pi\right), \tag{1.5.60}$$

于是 $\mathrm{g}_J(kR)$ 的零点位于 $kR - \frac{J}{2}\pi = n\pi$，从而得出

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k} = \frac{R}{\pi}. \tag{1.5.61}$$

对于电多极场，要先求出电场的切向分量 $\boldsymbol{E}_t$. 计算的结果为

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{RJ(J+1)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\mathrm{g}_J(kr)]\nabla\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi),$$

于是边条件化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[rg_J(kr)]\bigg|_{r=R} = 0. \tag{1.5.62}$$

在大 $R$ 的条件下,利用(1.5.60)式从上式即得出

$$\cos\left(kR - \frac{J}{2}\pi\right) = 0. \tag{1.5.63}$$

于是零点位置在 $kR - \frac{J}{2}\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. 从而仍得出(1.5.61)式.

下面转到归一化常数的推导(参见(1.5.27)式上). 先看标量波函数情况. 由(1.5.2)式以及球函数的归一性,即得

$$|a_{kl}|^2 = \left[\int_0^R r^2 \mathrm{d}r g_l(kr)^2\right]^{-1}, \tag{1.5.64}$$

由此可求出

$$|a_{kl}|^2 = \frac{2}{R^3[g_l^2(kR) - g_{l-1}(kR)g_{l+1}(kR)]}.$$

将(1.5.60)式代入后,最后求出

$$|a_{kl}|^2 = \frac{2k^2}{R}. \tag{1.5.65}$$

此式表明 $|a_{kl}|^2$ 实际与 $l$ 无关. 其实当 $R$ 远大于 $l/k$ 时,(1.5.64)式中的积分主要来自 $r \gg l/k$ 的区域,因此我们可将被积函数中的 $g_l(kr)$ 用 $\frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi\right)$ 代入,积分即可容易积出.

再看矢量波函数情况. 对于 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})$,情况比较简单,因 $r$ 和 $(\theta, \varphi)$ 是分离的,在对 $(\theta, \varphi)$ 积分后,剩下对 $r$ 的积分就是 $\int_0^R r^2 \mathrm{d}r g_J(kr)^2$. 因此归一化常数与标量波一样即为 $\sqrt{\frac{2k^2}{R}}$. 至于 $\boldsymbol{f}_{kJM}^{(2)}(\boldsymbol{x})$,其归一化常数的平方应等于

$$\int_0^R r^2 \mathrm{d}r \left[\frac{J}{2J+1} g_{J+1}(kr)^2 + \frac{J+1}{2J+1} g_{J-1}(kr)^2\right].$$

而 $\int_0^R r^2 \mathrm{d}r g_{J+1}(kr)^2$ 和 $\int_0^R r^2 \mathrm{d}r g_{J-1}(kr)^2$ 都等于 $\frac{2k^2}{R}$,故其归一化常数同样等于 $\sqrt{\frac{2k^2}{R}}$. 这样就证明了(1.5.27) 式.

# 第二章　狄拉克方程　电子场的量子化

电子是自旋为$\frac{1}{2}$的费米子，在非相对论的量子力学中，它的波函数是用二分量的泡利"旋量波函数"来描写的. 我们知道相对论不变性(也就是洛伦兹变换下的不变性)是物理规律的基本性质，就基本规律而言. 我们需要寻求电子的相对论不变的方程. 就是对于本门课程，讲授相对论性的电子场也是需要的，理由参见前言中的注，这里不再复述.

虽然也有可能建立一个相对论不变的具有二分量的旋量波函数的方程①，但这个方程只能描写质量等于零的费米子，而且不具有空间反射的对称性. 对于自旋为$\frac{1}{2}$质量不为零的费米子，为了建立相对论不变并具有反射对称性的方程，需要引入两个耦合在一起的泡利旋量波函数，或者说一个具有四分量的狄拉克旋量波函数. 后者所满足的就是1928年狄拉克提出的方程. 我们将看到，狄拉克方程并不是普通意义下的单粒子的量子力学方程. 它不仅具有正能量(包括静止质量所对应的能量在内)的解，也具有负能量的解. 即使对于正能级的 $\psi(\boldsymbol{x})$，其绝对值的平方也不具有"电子在 $\boldsymbol{x}$ 点的概率密度"的意义. 我们在课文中将指明，实际上电子在空间的定位精度不能小于它的康普顿波长. 研究表明，狄拉克方程描述的是正反两个1/2自旋的粒子，它对应于两个耦合的泡利方程. 一个更恰当的理解，是把狄拉克方程看作是某种旋量场的方程，并要将它量子化. 这种旋量场在用来描述电子时就称为电子场. 它的量子即为电子和反电子. 电子和反电子可以成对的产生或湮没. 狄拉克提出的电子海概念和空穴理论，在当时是为了解决"电子不断地向更深的负能级跃迁"的困难，其实是在量子力学框架内用一个方程描述正反两种粒子的一种等效处理. 在电子海理论中，真空对应于"正能级中无电子，而所有的负能级都被电子填满"的状态. 这样一种处理实际上已超出了单粒子理论的范围.

在本章中我们先对狄拉克方程本身和它的物理内涵进行阐述，然后再引入动量和螺度一定的态，以及"能量、角动量和宇称一定"的态，并对电子场进行量子化. 通过量子化才清楚地显示出量子数不同的正反电子是如何结合在同一方程的解中.

---

① Weyl, Zs. Phys. **56**, 330(1929)，该方程即称为Weyl方程.

# §2.1 狄拉克方程和旋量波函数

狄拉克方程是描述自旋为$\frac{1}{2}$、质量不为零的费米子的相对论性方程. 目前已知的基本费米子(无论是轻子还是夸克子)都是自旋为 1/2 的费米子,这就使得狄拉克方程在近代物理学中占有十分重要的地位. 在这一节里,我们将根据本课的性质对此方程作适当的讨论,其中对方程的推导,主要采用阿希叶泽尔和别列斯捷茨基《量子电动力学》书中的讲法.

**1. 泡利旋量的变换性质**

从第一章中的讨论,我们看到一个矢量 $\boldsymbol{f}$ 在无穷小的转动变换中,其三个分量间的转换由量子数为 1 的自旋算符 $\boldsymbol{s}$ 生成:

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = (1 + \mathrm{i}\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{s}) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

同样,一个旋量在无穷小的转动变换中,其二个分量的转换也由量子数为$\frac{1}{2}$的自旋算符$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)$来生成:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \boldsymbol{n}_1 + \sigma_2 \boldsymbol{n}_2 + \sigma_3 \boldsymbol{n}_3$ , $\sigma_j$ 为泡利矩阵,通常表示为

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.3}$$

它们之间并满足关系

$$\sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j = 2\mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\sigma_l , \tag{2.1.4a}$$

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_j k . \tag{2.1.4b}$$

(2.1.4a)式即为一般的角动量算符所满足的对易关系式.

对于绕 $\boldsymbol{n}$ 轴的有限转动 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n}$ ,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\sigma_n} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\sigma_n\right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1.5}$$

其中 $\sigma_n$ 为 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影.

由(2.1.5)式可知，当 $\theta=2\pi$ 即围绕任一轴旋转 $2\pi$ 时，旋量并不还原到原值而是变了一个符号. 旋量的这一性质与经典的物理量如标量、矢量、张量等不同，这些量在旋转 $2\pi$ 后都还了原样. 旋量的上述性质表明它自身不是可观测的物理量:任何可观测的物理量都必须是偶数个旋量的乘积，即旋量只能成对地出现在物理量中.

与转动 $2\pi$ 的情况相似，在作两次反射变换 $\hat{P}$ 时，旋量也可以不还原而是改变一个符号，即

$$\hat{P}^2 = \pm 1. \tag{2.1.6}$$

我们可以定义旋量的内禀宇称 $\eta$ 为 $\hat{P}$ 的本征值，

$$\hat{P}\varphi = \eta\varphi. \tag{2.1.7}$$

其中 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$. 由(2.1.6)式，$\eta$ 取值可为 $\pm 1$ 和 $\pm \mathrm{i}$.

如上面所指出的，在物理量中，旋量都是以 $\varphi_1^\dagger A\varphi_2$（$A$ 为某个 $2\times 2$ 矩阵）的形式成对地出现，其中 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 可以是不同的费米子)，因此实际上重要的是两个旋量配对乘积 $\varphi_1^\dagger\varphi_2$ 在空间反射下的变换. 换句话说，在物理上有意义的不是两个配对旋量各自的内禀宇称，而是两者之间的相对内禀宇称，亦即两者 $\eta$ 的比值. 进一步考虑得出①，这种比值只能为 $\pm 1$. 在 $+1$ 的情况称两者相对宇称为正，在 $-1$ 的情况则称相对宇称为负.

## 2. 狄拉克方程

在本章引言中我们已经指出，描述质量(在理论物理中，通常说一个粒子的质量都是指它的静止质量)不为零、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子并具有空间反射不变性相对论性方程(即狄拉克方程)是两个泡利旋量的联立方程:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} - mc^2\varphi = -\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\chi,$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} + mc^2\chi = -\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi. \tag{2.1.8}$$

首先，此方程满足相对论性方程的某些基本要求:如时空的微商都以一次微商的形式出现(从而使空间微商与时间微商具有平权地位). 在空间转动变换下，方程中各项具有相同的变换性质($\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla$ 为标量算符). 另外在(2.1.8)式中，除了时空的一次微商和自旋矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 以外，就只含普适常数 $\hbar$，$c$ 和一个质量参数 $m$. 对于电子来

---

① 例如通过 $\varphi_1^\dagger A\varphi_2$ 与标量场或矢量场的耦合.

说，$m$ 即为电子的静止质量.

为使(2.1.8)式具有空间反射不变性，其中两个泡利旋量 $\varphi$ 和 $\chi$ 的相对内禀宇称必须取为 $-1$. 这是因为自旋作为角动量的一部分，应为赝矢量(从而 $\boldsymbol{\sigma}$ 为赝矢量算符，在坐标架反射时，各个分量 $\sigma_j$ 的矩阵表示不变). 这样(2.1.8)式中的 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla$ 为赝标量算符，从而 $\varphi$ 与 $\chi$ 的相对内禀宇称必须为负以使得(2.1.8)式两侧在反射变换下具有相同的变换性质. 这也是在狄拉克方程中需要引入两个不同泡利旋量的原因[若把(2.1.8)第一式中的 $\chi$ 换成 $\varphi$，就破坏了反射不变性].

上述 $\varphi$ 和 $\chi$ 都满足克莱因-戈登方程. 为显示这一结果只需将 $\left(\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}+mc^2\right)$作用到(2.1.8)第一式，再将(2.1.8)第二式代入其右方以消去 $\chi$，然后利用(2.1.4)式消去 $\sigma$ 就可得出

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi=0. \tag{2.1.9}$$

这就是克莱因-戈登方程，它是任何自由的相对论波函数都必须满足的方程，因为在动量表象中它就是

$$(E^2-p^2c^2-m^2c^4)\varphi=0,$$

代表相对论中能量与动量间的关系. 以上的三项要求(时空微商平权，具有空间转动和反射的不变性，各个分量满足克莱因-戈登方程)基本上决定了自旋为$\dfrac{1}{2}$的费米子所服从的相对论性方程不外乎(2.1.8)那样的架构. 甚至其中的质量项前的符号要一个为正、一个为负.

顺带指出，自由的麦克斯韦方程组的两个旋度方程也可写成(2.1.8)的形式. 只须作代换 $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{i}B_1\\ \mathrm{i}B_2\\ \mathrm{i}B_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{s}$，$m\to 0$ 即可. 一个有趣的情况是，由于光子的质量为零，才导致普朗克常数从方程中消去使得电动力学方程中不出现 $\hbar$. 同样有趣的是，若没有 $\hbar$，由于量纲上无法匹配，质量项亦无法进入(2.1.8)式.

两个泡利旋量可以合起来写成为一个具有四分量的 $\psi$，它形如

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}, \tag{2.1.10}$$

通常称为狄拉克旋量，或者称为洛伦兹变换下的旋量. 正像洛伦兹变换下的矢量

是由三维转动变换下的一个矢量和一个标量所构成. 洛伦兹变换下的旋量是由三维转动变换下的二个旋量构成. 因为 $\varphi$ 和 $\chi$ 的内禀宇称相反,故若用 $\eta$ 代表 $\varphi$ 的内禀宇称,则 $\chi$ 的内禀宇称即为 $-\eta$,即在反射变换下

$$\hat{P}\varphi = \eta\varphi, \quad \hat{P}\chi = -\eta\chi, \tag{2.1.11a}$$

合起来可写成

$$\hat{P}\psi = \eta\gamma_4\psi, \tag{2.1.11b}$$

其中 $\gamma_4$ 为一个 $4\times4$ 的对角矩阵,其前两个对角元为 1,后两个对角元为 $-1$. (2.1.11b)式是对某个指定的狄拉克旋量而言,如果是指狄拉克旋量波函数,则因反射变换后该旋量的空间坐标反了一个号,故(2.1.11b)式应写作

$$\hat{P}\psi(\boldsymbol{x}) = \eta\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x}). \tag{2.1.12}$$

如同(1.5.35)和(1.5.37)式一样. 通常把 $\eta$ 称作该狄拉克旋量粒子的内禀宇称.

$\psi$ 含有二个泡利旋量,因而其中又多了一个自由度. 这个新增加的自由度实际上代表正反粒子的自由度,但并不简单地就是说上、下两个旋量一个代表正粒子,一个代表反粒子,除非经过特殊的变换(但此变换将使得方程变成非定域的方程. 在§2.4 中我们将提到这一变换). 为了把(2.1.8)写成一个单一的方程,我们引入 $4\times4$ 的狄拉克矩阵

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.13}$$

上式中的 0 代表二维零矩阵,而 $\beta$ 中的 1 代表二维的单位矩阵. $\beta$ 也就是(2.1.11b)式中的 $\gamma_4$. $\alpha_j(j=1,2,3)$ 和 $\beta$ 都是厄米矩阵并满足下述反对易关系(可利用 $\sigma_j$ 的性质推出):

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}, \quad \beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0, \quad \beta^2 = 1. \tag{2.1.14}$$

利用所引入的 $\alpha_j$ 和 $\beta$ 矩阵,(2.1.8)式可化为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi, \tag{2.1.15}$$

其中 $\hat{H}$ 为 $4\times4$ 矩阵,表达式为

$$\hat{H} = -\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + mc^2\beta. \tag{2.1.16}$$

需要指出的是,尽管 $\boldsymbol{\alpha}$ 由赝矢量矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 构成(见(2.1.13)第一式),但由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 位于 $\boldsymbol{\alpha}$ 中的非对角位置从而将下旋量变到上旋量位置上,将上旋量变到下旋量位置上,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 将成为一个矢量(而不是赝矢量) $4\times4$ 矩阵. 此结论可论证如下:将(2.1.11b)式中的 $\psi$ 取为 $\boldsymbol{\alpha}\psi$,即有 $\hat{P}\boldsymbol{\alpha}\psi = \eta\gamma_4\boldsymbol{\alpha}\psi$,上式右方又可化为 $\eta\gamma_4\boldsymbol{\alpha}(\eta\gamma_4)^{-1}\eta\gamma_4\psi = \eta\gamma_4\boldsymbol{\alpha}(\eta\gamma_4)^{-1}\hat{P}\psi$. 左方 $\hat{P}\boldsymbol{\alpha}\psi$ 亦可写成 $(\hat{P}\boldsymbol{\alpha}\hat{P}^{-1})\hat{P}\psi$. 将两者比较,即可得出 $\hat{P}\boldsymbol{\alpha}\hat{P}^{-1} = \eta\gamma_4\boldsymbol{\alpha}(\eta\gamma_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$-\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\alpha}$，与矢量矩阵在反射变换下的变换一致.

狄拉克旋量的自旋算符为$\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$的定义是

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{2.1.17}$$

总角动量算符即为轨道角动量算符与自旋算符之和：

$$\hat{J}_j = \begin{pmatrix} \hat{L}_j + \frac{1}{2}\sigma_j & 0 \\ 0 & \hat{L}_j + \frac{1}{2}\sigma_j \end{pmatrix}. \tag{2.1.18}$$

通常引入另外四个 4×4 矩阵 $\gamma_\mu(\mu=1,2,3,4)$来代替 $\boldsymbol{\alpha}$ 和$\beta$. 这样可把方程(2.1.15)～(2.1.16)式写成更对称的形式. $\gamma_\mu$ 的定义为

$$\gamma_j = -\mathrm{i}\beta\alpha_j, \qquad j = 1,2,3. \qquad \gamma_4 = \beta. \tag{2.1.19}$$

$\gamma_\mu$ 具体写出来即为

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_j \\ \mathrm{i}\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.20}$$

四个 $\gamma_\mu$ 都是厄米矩阵，满足下列对易关系：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{2.1.21}$$

方程(2.1.15)在用 $\gamma$ 矩阵表示时即为

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \chi_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0. \tag{2.1.22}$$

下面简单介绍 $\psi$ 的洛伦兹变换. 设两惯性参考系的坐标架 $S$ 和$S'$的轴互相平行，但 $S'$相对$S$ 有一速度$\boldsymbol{v}$. 在$\frac{v}{c}\ll 1$ 情况下旋量 $\varphi$ 和$\chi$ 在两惯性系的表示之间有下述变换关系：

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{2c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi,$$

$$\chi' = \varphi - \frac{1}{2c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi. \tag{2.1.23}$$

这一结果并不难理解，因对二维旋量来说，变换矩阵为 2×2 矩阵. 而 $1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 构成 2×2 矩阵的完全集合. 于是 2×2 的变换矩阵总可按它们展成四项. 在无穷小洛伦兹变换下变换矩阵只取到$\frac{\boldsymbol{v}}{c}$的一次方. 此变换矩阵应为三维转动变换的不变量，于是上述 2×2 的变换矩阵只能由 1 和$\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 两项组成. 再由反射不变性考虑，1 和$\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 要分别作用到内禀宇称相反的两个旋量上. 这样就基本上确定了(2.1.23)式的结构. 剩下的就只是$\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 前的系数. 在(2.1.23)式

中其值取为 $-\frac{1}{2}$，是使得方程(2.1.22)在洛伦兹变换下保持不变.

(2.1.23)式又可表示成

$$\psi' = \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right)\psi \tag{2.1.24}$$

值得指出的是，由于 $\boldsymbol{\alpha}^\dagger = \boldsymbol{\alpha}$（而不是 $\boldsymbol{\alpha}^\dagger = -\boldsymbol{\alpha}$）故此变换不是幺正变换. 而这正是物理上所要求的. 因若变换矩阵为幺正矩阵，则 $\psi^\dagger\psi$ 将在洛伦兹变换下保持不变，这与"长度的洛伦兹收缩"相矛盾，因长度的收缩将导致"密度"不是洛伦兹标量. 至于$\frac{v}{c}$不是小量时的变换公式可参见一般量子场论的书，此处不再引述.

在电动力学中，不会出现费米子之间的转化，物理上的观测量应只由 $\psi^\dagger$ 与 $\psi$ 构成. 如上面所述，$\psi^\dagger\psi$ 不是洛伦兹标量，不难证明（利用 $\gamma_4$ 与 $\alpha_j$ 的反对易性），$\bar{\psi}\psi$ 为洛伦兹标量，其中

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4, \tag{2.1.25}$$

而 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 为洛伦兹矢量（证明从略），其中系数 i 是使前三个分量为实，第 4 分量为虚.

从 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 所满足的方程不难推出

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathrm{j}_\mu = 0, \tag{2.1.26}$$

其中

$$j_\mu = \mathrm{i}c\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{1.2.27}$$

上式乘上了系数 $c$ 是使$j_\mu$ 具有流密度的量纲. 若再乘上电荷 $q$（对于电子，$q$ 等于 $-e$）就成为电流密度，它的分量明显写出如下：

$$q\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = qc\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}\psi(\boldsymbol{x}),\quad qj_4(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}cq\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}). \tag{2.1.28}$$

由第二式可见 $q\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})$代表 $\boldsymbol{x}$ 点的电荷密度. 再据此来看(2.1.28)第一式，$c\boldsymbol{\alpha}$ 应代表粒子的速度算符. 这种看法也可从海森伯图象中坐标的变化方程[$\hat{H}$见(2.1.16)式]

$$\dot{x}_j = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[x_j, \hat{H}] = c\alpha_j \tag{2.1.29}$$

得到支持. 但这种解释会引起下述问题：$\alpha_j$ 的本征值为 $\pm 1$，于是速度在任一方向的分量都具有本征值 $\pm c$，因为坐标架的轴向可任意旋转. 另外，在海森伯图象中 $\dot{\alpha}_j = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\alpha_j, \hat{H}]$也不为零，即在自由粒子情况，速度也不恒定. 除此以外，沿三个轴向的速度分量不能同时具有确定值（因三个 $\alpha_j$ 彼此不对易）也与非相对论量子力学很不一样. 以上各点皆与相对论经典力学中由$\frac{c^2}{E}\boldsymbol{p}$ 定义的速度 $\boldsymbol{v}$ 完全不同.

不难写出 $\alpha_j$ 所满足的方程并对它求解. 结果显示 $c\alpha_j$ 除了一常数项 $\hat{p}_j c^2 \hat{H}^{-1}$ (相当于经典速度 $\frac{c^2}{E}\boldsymbol{p}$ 的 $j$ 分量)外,还有一个快速的振动项,其振动的幅度的量级为 $\hbar/mc$,即电子的康普顿波长(参见狄拉克的《量子力学》§6.9). 这意味着 $\frac{c^2}{E}\boldsymbol{p}$ 只代表平均速度,电子的瞬时速度要在其平均速度上附加一个颤动.

但要指出的是,上述图象有它的局限性. 我们将看到 $\psi(x)$ 并不具有通常量子力学波函数的意义. $|\psi(\boldsymbol{x})|^2$ 不等于电子定位在 $\boldsymbol{x}$ 点上的概率密度,从而 $\boldsymbol{x}$ 并不代表粒子位置的力学量. 下文中还将说明相对论粒子的定位精度至多只能到其康普顿波长 $\hbar/mc$ 的大小(见§2.2节). 因而对上述在量子力学基础上的解释不能太认真. 尽管如此,"颤动"仍不失为一种有意义的直观图象,并可作为相对论粒子位置不确定度的某种表示.

## §2.2　动量和螺度确定的态函数

本节和下节都是讨论狄拉克方程的解. 本节所讨论的是平面波型的解,它具有确定的能量和动量. 由于粒子有自旋,所以还需补充一个量子数. 在相对论情况,此量子数就是螺度,即自旋在动量方向上的投影. 除此而外,狄拉克波函数由两个泡利波函数构成,它应当描叙两个自旋为1/2的粒子. 现在知道它们就对应于正负电子. 负电子就是普通的电子,正电子是它的反粒子,两者波函数不能直接地合在一起构成狄拉克方程解的完备集. 正电子的波函数需要先经过"正反共轭"变换才能与电子的波函数相合配. 这种变换后的正电子波函数就是狄拉克方程中所出现的负能级解. 在本节中我们将对此进行阐明.

### 1. 薛定谔图象中狄拉克方程的平面波型的解

我们先来求这种波型的解,然后对它们的物理意义进行诠释. 由于 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 与 $\hat{H}$ 互相对易,它们共同的本征态是存在的,此解具有平面波的形式:

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}u(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-cp_0 t)}, \tag{2.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 和 $cp_0$ 分别代表动量和能量的本征值. $u(\boldsymbol{p})$ 为四分量的旋量. 将(2.2.1)式代入狄拉克方程(2.1.15)中,即得出 $u(\boldsymbol{p})$ 所满足的方程:

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc\beta)u(\boldsymbol{p}) = p_0 u(\boldsymbol{p}). \tag{2.2.2}$$

写成矩阵形式即为

$$\begin{pmatrix} mc - p_0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc - p_0 \end{pmatrix} u(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{2.2.3}$$

这是一组齐次方程，$u(\boldsymbol{p})$有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} mc-p_0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc-p_0 \end{vmatrix}=0, \tag{2.2.4}$$

对于一定的 $\boldsymbol{p}$ 由此即可决定相应的 $p_0$.

将上式中的行列式乘开并利用 $\sigma_j$ 矩阵的公式$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=\boldsymbol{p}^2$，即得

$$p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2c^2=0. \tag{2.2.5}$$

这正是相对论中动量与能量之间的关系式. 于是得出

$$p_0=\pm E/c, \qquad E\equiv\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4}>0. \tag{2.2.6}$$

上式表明：对于一定的 $\boldsymbol{p}$，$p_0$ 并不唯一地被确定，它可取符号相反的二个值$\pm E/c$. 这意味着$\hat{\boldsymbol{H}}$是与$\hat{\boldsymbol{p}}$相独立的算符（与非相对论中$\hat{H}=\frac{1}{2m}\hat{p}^2$ 的情况不同）.

但$\hat{\boldsymbol{p}}$和 $\hat{H}$还不构成完全集合. 不难证明螺度算符$\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p$.（$\boldsymbol{n}_p$ 为 $\boldsymbol{p}$ 方向的单位矢量）与$\hat{\boldsymbol{p}}$和 $\hat{H}$互相对易①，并与$\hat{\boldsymbol{p}}$和 $\hat{H}$一起构成完全集合. 对于一定的 $\boldsymbol{p}$ 共有四个解 $u(\boldsymbol{p})$，分别对应于（$p_0=\pm E/c$，螺度$=\pm\frac{1}{2}$）四组不同的本征值. “狄拉克方程包含两个泡利旋量”所增加的自由度即为 $p_0$ 的两种取值所反映.

我们令 $\phi_+(\boldsymbol{n}_p)$和 $\phi_-(\boldsymbol{n}_p)$代表 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p$ 的本征为$+1$ 和$-1$ 的两个泡利旋量，即

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p)\phi_+=\phi_+, \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p)\phi_-=-\phi_-. \tag{2.2.7}$$

它们的明显形式不难求出. 如令 $\boldsymbol{n}_p$ 的方向角为$\theta$ 和$\varphi$，则有

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.2.8}$$

由此解出

$$\phi_+(\boldsymbol{n}_p)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix},$$

$$\phi_-(\boldsymbol{n}_p)=\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}. \tag{2.2.9}$$

① 注意，$\boldsymbol{\Sigma}$ 在三个坐标轴上的投影，即 $\Sigma_j$，并不与 $\hat{H}$相对易.

$u(\boldsymbol{p})$的四个解可用 $\phi_+$ 和 $\phi_-$ 表示如下：

$$u^{(1)}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}\phi_+\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\phi_+\end{pmatrix},\ u^{(2)}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}\phi_-\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\phi_-\end{pmatrix},$$

$$u^{(3)}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\phi_+\\ -\phi_+\end{pmatrix},\ u^{(4)}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\phi_-\\ -\phi_-\end{pmatrix},\tag{2.2.10}$$

其中$\sqrt{\dfrac{E+mc^2}{2E}}$为狄拉克旋量$u(\boldsymbol{p})$的归一化常数，使得

$$u^{(j)}(\boldsymbol{p})^\dagger u^{(l)}(\boldsymbol{p}) = \delta_{jl},\quad j,l = 1,2,3,4.\tag{2.2.11}$$

在上述四个解中，前两个(即上标＝1,2)对应于$\hat{H}$的本征值为 $E$，后两个(即上标＝3,4)对应于 $\hat{H}$的本征值为 $-E$. 在$\dfrac{p}{mc}\ll 1$ 的情况下，$u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$ 中的上两分量为大分量，而 $u^{(3)}$ 和 $u^{(4)}$ 中的下两分量为大分量.

在量子力学中，$\hat{H}$的本征值应即为粒子可能具有的能量值. 但对狄拉克方程不能作这样解释. 因若作这样解释，电子的能量没有下限可一直趋向 $-\infty$. 于是当电子与光子或其他粒子相互作用时，可以跃迁到愈来愈低的能量态，从而无止境地放出能量. 这个结论肯定是不符合实际的.

我们也不能简单地认为 $p_0 = -E/c$ 的解不合理并把它们抛弃掉. 因为在抛掉它们以后，所剩下来的解不构成完备集. 当我们求解在外场中运动的解时，即使初态只含 $p_0$ 为正的态，随后也会演化出 $p_0$ 为负的成分.

为了解决这一难题，狄拉克在 1928 年提出这一方程时做了这样一个大胆的物理假设，即真空态是对应于“每个 $p_0$ 为负的态都被电子占满(由于泡利原理，每个状态只容许有一个电子)，而 $p_0$ 为正的态都没有电子”的情况. 如果有一个处于负能级的电子被激发到正能级的态，那么我们除了看到一个处于正能级的电子外，还在电子海(指占据负能级的全部电子)中看到一个空穴. 与真空比较，出现一个空穴相当于多了一个带正电的粒子，其能量也是正的(因为减少了一个负能量). 当时，狄拉克把这个带正电粒子认作质子. 1932 年安德孙发现正电子后，人们才认定为正电子，它与电子具有相同的质量. 这样，上述从负能级到正能级的跃迁就代表正负电子对的产生. 反过来若一个负电子(指带负电的电子)从正能级跃迁到一个空穴中时，就代表正负电子对的湮没.

**2. 对负能级解的正确解释**

上述空穴理论如果作为现实的物理理论，显然是不自然的，实际上它只是一种

等效的描述. 前面已经提到,狄拉克方程不只是描述电子的运动,而要同时描述正负两种电子. 通常人们把电子算作正费米子,它的费米子数定为 +1,把正电子算作反费米子它的费米子数为 −1. 费米子数已证实为一种具有更普遍意义的守恒量子数,因而正电子(即反电子)的波函数不能直接与(负)电子波函数合起一起成为同一方程解的完备集合. 否则通过发射或吸收光子而实现两者之间的跃迁时,费米子数守恒律就将被破坏. 对上述四个解的正确理解是:前两个解

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x},t) = u^{(1)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{\sqrt{V}}e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)},\quad \psi^{(2)}(\boldsymbol{x},t) = u^{(2)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{\sqrt{V}}e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)},$$

描述的是动量为 $\boldsymbol{p}$,能量为 $E$[$E$ 由(2.2.6)式定义恒为正]、螺度分别为 $\pm\frac{1}{2}$ 的电子,$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\psi^{(2)}(\boldsymbol{x},t)$ 分别就是这两个态的波函数,但(根据前面的说明)(2.2.10)式的 $u^{(3)}(\boldsymbol{p})$ 和 $u^{(4)}(\boldsymbol{p})$ 在乘上相应的时空函数 $\frac{1}{\sqrt{V}}e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+Et)}$ $(E>0)$ 后并不就是反电子的波函数. 而应是反电子波函数在“正反共轭变换”后的结果. 只有经过这一变换,它才能与电子波函数出现在同一方程中. 由于本课程的性质,在这里将不详细介绍正反共轭(也称 $C$ 共轭)变换和电磁规律在正反共轭变换下的不变性(它的物理意义是,若把电子作为反费米子,把正电子作为费米子,则写出的运动方程不变),而只指出,若原来的波函数为 $\psi(\boldsymbol{x},t)$,作正反共轭变换后的波函数设为 $\psi_c(\boldsymbol{x},t)$,则两者之间的关系是 $\psi_c(\boldsymbol{x},t)=C\psi^*(\boldsymbol{x},t)$,其中的矩阵 $C$ 就称为正反共轭矩阵. 由此可见:原来动量为 $-\boldsymbol{p}$、能量为 $E$ 的时空因子 $e^{\frac{i}{\hbar}(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}$ 在正反共轭变换后即变为动量为 $\boldsymbol{p}$、能量为 $-E$ 的时空因子 $e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+Et)}$ 它就是狄拉克方程负能级解中出现的时空因子,以上讨论简明地说明了负能级解的物理意义.

于是我们把狄拉克方程的一般解分成两个部分:

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \psi_+(\boldsymbol{x},t) + \psi_-(\boldsymbol{x},t) \tag{2.2.12}$$

其中 $\psi_+(\boldsymbol{x},t)$ 为正能级波函数的和,$\psi_-(\boldsymbol{x},t)$ 为负能级波函数的和.

$$\psi_+(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p},s}\alpha_{\boldsymbol{p}s}u^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)},\ s=1,2. \tag{2.2.13}$$

在 $\psi_-(\boldsymbol{x},t)$ 的展式中,我们先把求和指标 $\boldsymbol{p}$ 换成 $-\boldsymbol{p}$,并令

$$u^{(3)}(-\boldsymbol{p}) = v^{(1)}(\boldsymbol{p}),\quad u^{(4)}(-\boldsymbol{p}) = v^{(2)}(\boldsymbol{p}), \tag{2.2.14}$$

则 $\psi_-(\boldsymbol{x},t)$ 可表为

$$\psi_-(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p},s}\beta^*_{\boldsymbol{p}s}v^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)},\ s=1,2. \tag{2.2.15}$$

前面已经说明了正、负能级解的物理意义,关于“这两类解合在一起”的问题,

我们将在讲述电子场的量子化时再作进一步的说明.

从(2.2.12)式即得

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t) = \bar{\psi}_+(\boldsymbol{x},t) + \bar{\psi}_-(\boldsymbol{x},t), \tag{2.2.16}$$

其中 $\bar{\psi}_+$ 和 $\bar{\psi}_-$ 可从(2.2.13)和(2.2.14)式直接写出

$$\bar{\psi}_+(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}\alpha_{ps}^*\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}, s = 1,2$$

$$\bar{\psi}_-(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}\beta_{ps}\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}, s = 1,2 \tag{2.2.17}$$

$\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的定义与 $\bar{\psi}$ 相同,即

$$\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p}) = u^{(s)}(\boldsymbol{p})^\dagger\gamma_4, \quad \bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p}) = v^{(s)}(\boldsymbol{p})^\dagger\gamma_4. \tag{2.2.18}$$

$u(\boldsymbol{p})$ 和 $v(\boldsymbol{p})$ 之间的正交归一化条件为

$$\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})u^{(s')}(\boldsymbol{p}) = \frac{mc^2}{E}\delta_{ss'}, \quad \bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})v^{(s')}(\boldsymbol{p}) = -\frac{mc^2}{E}\delta_{ss'}, \tag{2.2.19a}$$

$$\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})v^{(s')}(\boldsymbol{p}) = \bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{2.2.19b}$$

(2.2.19a)可通过 $u(\boldsymbol{p})$ 的具体表达式以及

$$v^{(1)}(\boldsymbol{p}) = -\gamma_4 u^{(3)}(\boldsymbol{p}), \quad v^{(2)}(\boldsymbol{p}) = -\gamma_4 u^{(4)}(\boldsymbol{p}) \tag{2.2.20}$$

来验证,(2.2.19b)式可通过上式和(2.2.11)式直接看出.

最后,我们指出,不仅 $\psi(\boldsymbol{x})$ 不具有电子在坐标空间的概率密度幅的意义,就是 $\psi_+(\boldsymbol{x})$ 也不具有这种意义. 从量子化后的结果返回来看,(2.2.13)展式中的 $\alpha_{ps}$ 具有波矢空间中概率幅的含意,但 $\alpha_{ps}$ 与 $\psi_+(\boldsymbol{x})$ 之间并不是傅里叶变换的关系,原因是:$u^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 中含有的 $\boldsymbol{p}$ 和 $E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$ 对应于坐标空间的微分算符,而出现在分母中时即对应于积分算符. 情况与光子波函数所遇到的相似(参见§1.3第3小节). 另一个更直接的理由是,如果 $\psi_+(\boldsymbol{x})$ 具有坐标空间概率幅的意义,那么它应包括具有确定位置 $\boldsymbol{x}_0$ 的波函数 $w\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$,其中 $w$ 为常数旋量(不包含微商算符). 但这是不可能的. 因为 $u^{(1)}(\boldsymbol{p})$ 和 $u^{(2)}(\boldsymbol{p})$ 不构成旋量自由度的完备集. 从而任何 $w\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 都不能表示为正能级解 $u^{(1)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ 和 $u^{(2)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ 的叠加. 在 $w\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 的展式中还将含有 $u^{(3)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ 和 $u^{(4)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$(或者说含 $v^{(1)}(\boldsymbol{p})$ 和 $v^{(2)}(\boldsymbol{p})$ 乘上指数因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$)的成分. 只有把 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 换成尺度为 $d$ 的波包如 $\frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2d^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2}$,并且当 $d\gg\frac{\hbar}{mc}$ 时,展式中的 $u^{(3)}(\boldsymbol{p})$ 和 $u^{(4)}(\boldsymbol{p})$ 的部分才可忽去(参见 Itzykson 与 Zuber, Quantum Field

Theory). 换句话说,仅用正能级解不可能叠加出尺度$\lesssim\frac{\hbar}{mc}$的波包. 这就说明了电子定位精度的极限就是它康普顿波长$\frac{\hbar}{mc}$.

## §2.3　能量、角动量和宇称确定的自由电子态

与光子的情况相似,我们也可以引入具有确定能量、角动量和宇称的自由电子态. 其他的电子状态可按这种态来展开. 下面,我们将先对二分量的泡利旋量进行讨论,然后再转到四分量的狄拉克旋量的情况.

**1. 球旋量**

像球矢量一样,我们称具有确定轨道角动量量子数 $l$、总角动量量子数 $J$ 以及总角动量第三分量量子数 $M$ 的泡利旋量 $\Omega_{JlM}$ 为球旋量,或者旋量球函数. 利用C-G系数,即得

$$\Omega_{JlM}(\theta,\varphi) = \sum_{s=\pm 1/2} C^{JM}_{l(M-s),\frac{1}{2}s}\mathrm{Y}_{l(M-s)}(\theta,\varphi)\phi^{(s)}, \tag{2.3.1}$$

其中

$$\phi^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \phi^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

于是 $\Omega_{JlM}$ 也可表示成

$$\Omega_{JlM} = \begin{pmatrix} C^{JM}_{lM-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{lM-\frac{1}{2}} \\ C^{JM}_{lM+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{lM+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.3.2}$$

它们满足正交归一化条件

$$\int \Omega^{\dagger}_{J'l'M'}\Omega_{JlM}\mathrm{d}\Omega = \delta_{JJ'}\delta_{ll'}\delta_{MM'}. \tag{2.3.3}$$

对于每个 $J$,$l$ 只有两个取值$J\pm\frac{1}{2}$. 如果用 $l_1$ 表示 $J+\frac{1}{2}$,用 $l_2$ 表示 $J-\frac{1}{2}$. 则有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_x)\Omega_{Jl_1M} &= -\Omega_{Jl_2M},\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_x)\Omega_{Jl_2M} &= -\Omega_{Jl_1M}.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{n}_x$ 为 $\boldsymbol{x}$ 方向的单位矢量. 实际上(2.3.4)式不用具体计算即可基本上确定. 因 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_x$ 为一个赝标量矩阵,它作用到球旋量上将不改变 $J$ 和 $M$,而使 $l_1$ 和 $l_2$ 互变(从而在空间反射时多一个负号). 另外,$\boldsymbol{\sigma}$ 在任一方向上分量的平方都为 1. 这

样,为得出(2.3.4)剩下待定的就是一个绝对值为 1 的系数.

$\hat{H},\hat{J}^2,\hat{L}^2,\hat{J}_3$ 构成旋量粒子的完全集合. 在自由粒子情况,此完全集合的共同本征函数为

$$\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x}) = a_{kJl}\,\mathrm{g}_l(kr)\,\Omega_{JlM}(\theta,\varphi), \tag{2.3.5}$$

$a_{kJl}$为归一化常数. 当取归一化的球体的半径 $R\gg\frac{l}{k}$时,$|a_{kJl}|^2=\frac{2k^2}{R}$,与光子相应的归一化常数一样,因它们都由 $\mathrm{g}_l(kr)$平方的积分确定.

如果该旋量的内禀宇称为 $\eta$(关于内禀宇称参见(2.1.7)式),则 $\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x})$的宇称即为 $\eta(-1)^l$.

**2. 能量、总角动量和宇称一定的狄拉克旋量波函数**

如前所述,狄拉克旋量波函数是由两个泡利旋量波函数构成:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{x})\\ \chi(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},$$

$\varphi$ 与 $\chi$ 之间满足方程(2.1.8)式. 考虑能量一定的正能级自由电子态($P_0>0$). 利用(2.1.8)第二式即得

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{x})\\ -\mathrm{i}\hbar c\,\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla}{E+mc^2}\varphi(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}. \tag{2.3.6}$$

当将上式中的 $\varphi(\boldsymbol{x})$取作$\sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x})$时(加上常数因子$\sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}$是为了狄拉克旋量的归一化),即得出相应的 $\psi_{kJlM}(\boldsymbol{x},t)$为

$$\psi_{kJlM}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x})\\ -\mathrm{i}\hbar c\,\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla}{E+mc^2}\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}. \tag{2.3.7}$$

顺便指出,这里的归一化常数与(2.2.10)中的一样.

为了进一步化简(2.3.7)式,我们利用公式

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x}) = k(-1)^{\frac{1}{2}(l-l'-1)}\phi_{kJl'M}(\boldsymbol{x}), \tag{2.3.8}$$

其中 $l$ 和$l'$为$J$ 所允许的两个轨道角动量量子数:当 $l$ 取$J+\frac{1}{2}$时,$l'$即为$J-\frac{1}{2}$,反之,当 $l$ 取$J-\frac{1}{2}$时,$l'$即为$J+\frac{1}{2}$. 由于 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla$ 为赝标量算符故它作用到 $\phi_{kJlM}$上时将不改变$J$ 和$M$ 而只改变宇称即使$l\to l'$. 上式右方的系数 $k$ 保持了量纲上的

一致．剩下的是一个常数因子．当然这只是对(2.3.8)式的一个说明或估推，不是具体的推导．但这种估推对理论物理工作者很重要．至于该式的具体推导，这里就省略了．

将(2.3.8)式代入(2.3.7)式即可将 $\psi_{kJlM}$ 表为

$$\psi_{kJlM}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2E}}\begin{pmatrix} \sqrt{E+mc^2}\,\phi_{kJlM}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{i}(-1)^{\frac{l-l'-1}{2}}\sqrt{E-mc^2}\,\phi_{kJl'M}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \tag{2.3.9}$$

其中 $l$ 和 $l'$ 分别为 $J$ 所允许的两个可能的轨道角动量量子数 $J\pm\frac{1}{2}$．如(2.3.8)式下面所说明．

最后我们来考察 $\psi_{kJlM}$ 的宇称．(2.3.9)式上分量代表(2.1.10)式中的 $\varphi$，设其内禀宇称为 $\eta$．其轨道宇称为 $(-1)^l$，下分量代表(2.1.10)式中的 $\chi$，其内禀宇称为 $-\eta$(参见(2.1.11a)式)，轨道宇称为 $(-1)^{l'}=-(-1)^l$．这样无论是上分量还是下分量，总的宇称都是 $\eta(-1)^l$．它也就是狄拉克旋量波函数的宇称 $P$

$$P = \eta(-1)^l. \tag{2.3.10}$$

需要指出的是，对于狄拉克波函数来说，$l$ 已不再代表轨道角动量的量子数，因 $\psi_{kJlM}(\boldsymbol{x})$ 已不是 $\hat{L}^2$ 的本征态(它的上分量和下分量具有不同的轨道角动量量子数．指标 $l$ 实际代表宇称，它与 $P$ 之间为一一对应的关系如(2.3.10)式所示．波函数 $\psi_{kJlM}$ 也可标志为 $\psi_{kJMP}$，因而也就是我们所要推求的能量、总角动量和宇称一定的自由电子波函数．

对于 $p_0<0$ 的解，即自由反电子波函数的 $C$ 共轭(正反共轭)，也可类似地讨论，由于在本课中用处不大，故不再重复．任意的 $\psi(\boldsymbol{x})$ 可按这种能量、总角动量和宇称一定的波函数来展开．

## §2.4　狄拉克方程的非相对论近似和它的物理内涵

为了考察狄拉克方程的物理内涵，我们需要研究有电磁场存在时该方程的非相对论近似．这是因为：一个对象的物理特点总是通过相互作用来体现的，而在坐标表象中非相对论的旋量波函数又具有位置的概率幅的物理意义．

在 $\frac{v}{c}\ll 1$ 的情况下，如果在方程中只保留到 $\frac{v}{c}$ 的一次项，得到的结果就是泡利方程．它比薛定谔方程只多出一个自旋磁矩与磁场的作用项．在下一级近似即保留到 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 项时，方程中又将多出三项：动能的相对论修正项，运动磁偶极子与电场的作用项和所谓的达尔文项．这最后一项显示出电子不能精确定位在 $\boldsymbol{x}$ 点的物

理效应.

**1. 有电磁场时的狄拉克方程和它的初级非相对论近似**

在经典力学中当存在电磁场时,电子的四维动量 $p_\mu$ 由两部分构成. 一项可称为运动动量(或称力学动量)$K_\mu$,表达式为$\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\frac{\mathrm{i}mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$,第四分量为$\frac{\mathrm{i}U}{c}$. $U=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$包括动能和静止质量所对应的能量 $mc^2$,$p_\mu$ 中另一项可称为四维势动量$\left(\frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t),\frac{\mathrm{i}q}{c}A_0(\boldsymbol{x},t)\right)$,其中 $\boldsymbol{x}$ 为电子的坐标. 第四分量即电磁势能乘上常数$\frac{\mathrm{i}}{c}$. 于是运动动量 $K_\mu$ 可表为$p_\mu-\frac{q}{c}A_\mu(x)$,其中$(\boldsymbol{x},t)$已简单地表示为 $x$. 在转到量子力学时,$p_\mu$ 变成了微分算符$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}$,从而运动动量亦变成算符①,即$\hat{K}_\mu=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{q}{c}A_\mu(x)$,狄拉克方程仍为

$$(\gamma_\mu\hat{K}_\mu-\mathrm{i}mc)\psi(x)=0. \tag{2.4.1}$$

在经典力学中,有

$$K_\mu^2+m^2c^2=0. \tag{2.4.2}$$

它代表相对论中动能与三维"运动动量"间的关系,即 $K_0^2=\boldsymbol{K}^2+m^2c^2$. 但在狄拉克理论中,相应的结果$\hat{K}_\mu^2+m^2c^2=0$一般地并不成立,只在 $A_\mu$ 为常数的特殊情况下,通过将 $\gamma_\nu\hat{K}_\nu+\mathrm{i}mc$ 作用到(2.4.1)上才可以化出$\hat{K}_\mu^2+m^2c^2=0$. 物理上的原因是,狄拉克粒子带有自旋磁矩,当 $A_\mu$ 不是常数时相应的$\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{E}$ 不为零,电子与电磁场间将出现附加的作用(参见 Dirac Quantum Mechanics).

(2.4.1)式也可写成

$$\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}\frac{q}{\hbar c}A_\mu(x)\right)+\frac{mc}{\hbar}\right]\psi(x)=0. \tag{2.4.3}$$

如用泡利旋量波函数表示出来即为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}-mc^2\varphi-qA_0\varphi&=-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\chi,\\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}+mc^2\chi-qA_0\chi&=-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\varphi.\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

在非相对能情况,可只需考虑正能级的狄拉克波函数 $\psi_+(x)$. 这时在 $\psi_+(x)$中,

---

① 若在发生作用前和发生作用后,电子波函数所在的区域 $\boldsymbol{A}=0$,则这时$-\mathrm{i}\hbar\nabla$ 仍代表运动动量.

$\chi$ 与 $\varphi$ 相比为一小量. 我们可消去 $\chi$、化出 $\varphi$ 所满足的方程. 在自由场的情况,从(2.2.10)式可以看出

$$\chi \sim \frac{v}{c}\varphi. \tag{2.4.5}$$

在存在通常的电磁场情况下,这一量级关系仍然成立. 于是在初级近似中,(2.4.4)第二式的左方可以只保留 $mc^2\chi$ 的项,从而得出

$$\chi = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\varphi. \tag{2.4.6}$$

此式与(2.4.5)式所给出的量级估计是一致的.

将(2.4.6)式代入到(2.4.4)上式的右方,即得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} - mc^2\varphi - qA_0\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2\varphi.$$

上式右方中的 $\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2$ 为 $2\times2$ 矩阵,而任意 $2\times2$ 矩阵均可用$(1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$来展开. 展开系数不难求出. 由此化出

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} - mc^2\varphi - qA_0\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\varphi - \frac{q\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\varphi.$$

在非相对论量子力学中,通常不计能量中静质量所对应的部分. 也就是说,要从 $\varphi$ 中分出 $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}mc^2t}$ 的因子. 这是由于在非相对论量子力学中不考虑正反电子对的产生和湮没,能量中分出一个常数不影响物理结果. 换句话说,非相对论中的波函数可取为 $\phi = \varphi\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}mc^2t}$. 将它代入上式后,得出 $\phi$ 的方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\phi + qA_0\phi - \frac{q\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\phi. \tag{2.4.7}$$

(2.4.7)式右方第一项为电子的动能项,第二项为势能项,它们都是薛定谔方程中所原有的. 最后一项为新多出的自旋磁矩与磁场的作用项,其中的$\frac{q\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}$ 就代表电子的磁矩$\hat{\boldsymbol{m}}$. 附带指出,磁矩与磁场强度都是赝矢量,它们两个的点乘即为标量,故不影响空间转动和反射的对称性.

由于作了非相对论近似,(2.4.7)式中的 $\phi(\boldsymbol{x},t)$已具有坐标空间中概率密度幅的意义. 但从对自旋电流项和达尔文项的分析来看(见下文),$\phi$ 中的坐标 $\boldsymbol{x}$ 是指略去颤动后的坐标,也就是对颤动平均后的坐标.

我们知道,在经典电动力学中,磁性都来自电流. 电子的自旋磁矩是否也来自电流? 回答是肯定的. 为了阐明这一点,下面来考察电子的电流密度 $q\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$. 由(2.1.28)式,$q\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$等于 $qc\psi^*\boldsymbol{\alpha}\psi$,将其中 $\psi$ 用 $\varphi$ 和 $\chi$ 表示出来,并将 $\chi$ 用(2.4.6)式代入后,可以化出

$$
\begin{aligned}
q\boldsymbol{j}(x) &= -\frac{\mathrm{i}q\hbar}{2m}\left[\varphi^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\right]\varphi-(\nabla\varphi^{\dagger}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}\varphi-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\varphi^{\dagger}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\sigma}\varphi\right] \\
&= \left[\frac{q}{2m}\varphi^{\dagger}\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi+\mathrm{h.c.}\right]+\frac{q\hbar}{2m}\nabla\times(\varphi^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\varphi)
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

上式中的 $\varphi$ 可直接换成(2.4.7)式中的 $\phi$. 因为因子 $\mathrm{e}^{\pm\frac{\mathrm{i}}{\hbar}mc^2t}$将互相消去. (2.4.8)第二等式中的方括号项可化作$\frac{q}{m}\phi^{\dagger}\ \hat{\boldsymbol{K}}\phi$,因而代表迁移电流,后一项即为自旋电流,它与电动力学中的介质内磁化电流相似,并可写成 $c\nabla\times(\phi^{\dagger}\boldsymbol{m}\phi)$,$\boldsymbol{m}$代表电子的磁矩算符[见(2.4.7)式下]. 而 $\phi^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{m}\phi(\boldsymbol{x},t)$可看作是电子所处状态的磁化密度.

以上得出的自旋磁矩的大小为$\frac{q\hbar}{2mc}$,它可以写成$\frac{1}{2c}(qc)\bar{\lambda}_c$ 的形式,其中,$\bar{\lambda}_c=\frac{\hbar}{mc}$为电子的(约化)康普顿波长. 这就是说电子的自旋磁矩相当于带电荷 $q$ 的粒子以速度$c$ 在半径为$\bar{\lambda}_c$ 的圆周上运动时所生成的磁矩. 而$\frac{\hbar}{mc}$正是相对论电子颤动的范围. 因此直观的说法就是,电子的自旋磁矩是由它的颤动所引起的.

**2. 二级相对论近似**

在某些情况下,初级近似的精度不够,需要作下一级近似. 例如研究类氢原子能级的精细结构时就有这样的需要. 最简单的想法是:把 $\chi$ 的初级解(2.4.6)代入到(2.4.4)第二式左方原被抛去的两项中去,并将它们移到右方以求出准到二级小量的 $\chi$. 再将此表达式代回(2.4.4)第一式的右方,以消去 $\chi$. 但是,这样化出的形如 $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\hat{H}\varphi$ 的方程,不能作为二级近似的量子力学方程,因为其中的$\hat{H}$不是厄米算符,它的本征值将不是实数,$\varphi$ 的归一性也不能保持. 出现这一情况并不难理解:原来的狄拉克方程能保持$\int(\varphi^{\dagger}\varphi+\chi^{\dagger}\chi)\mathrm{d}^3x$ 的归一性不随时间改变. 其中$\chi^{\dagger}\chi$ 为二级小量,因此当准到二级小量时,只 $\varphi^{\dagger}\varphi$ 一项的体积分不具有归一性.

人们曾经寻求一个幺正变换 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{S}}$, 使得变换后的 $\psi$ 中,上分量 $\varphi$ 与下分量$\chi$在运动方程中互相不耦合,而且 $p_0>0$ 的解只有 $\varphi$,$p_0<0$ 的解只有 $\chi$. 这样当我们只考虑正能级的波函数时,要求解的就只是一个二分量的 $\varphi$ 的方程,归一化的条件也自然地能满足(因变换是幺正的,变换后的$\hat{H}$保持为厄米算符). 虽然 Fouldy 和 Wouthuysen 得出了这一变换,但作为寻求替代狄拉克方程的相对论性方程,并不是成功的,因为所得出的方程不仅不具有对称形式的时空微商,而且它对空间的依赖关系不是定域的. 只有在非相对论的条件下只保留有限阶时,它才

是一个定域的方程. 但这一变换正符合我们现在的需要. 变换后的哈密顿量可通过逐次近似求出. 在二级近似下,$\phi=\varphi e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}$所满足的方程为

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2+qA_0-\frac{q\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\right.$$
$$\left.-\frac{\hbar^4\nabla^4}{8m^3c^2}-\frac{iq\hbar^2}{4m^2c^2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\nabla\right)-\frac{q\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right]\phi. \tag{2.4.9}$$

关于它的推导可参见一般相对论量子力学或量子场论的书①,此处只对它的物理内容予以说明.

与(2.4.7)式相比较,(2.4.9)式右方多了后三项:其中第一项是$\sqrt{m^2c^4-\hbar^2c^2\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2}$展开中的第三项,代表动能的相对论修正$\left(如果\frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{A}与\nabla相比不能忽略,则(2.4.9)式中的\nabla^4应换成\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^4\right)$;"后三项"中的第二项来自运动磁偶子与电场的作用. 因为当一个磁偶极子运动时,按照相对论的变换将会出现一个电偶极矩. 对于原子核所产生的静电场,$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,如果电场又是球对称的,则有$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{r}\frac{dA_0}{dr}\boldsymbol{x}$,这时第二项即化为

$$-\frac{iq\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dA_0}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{x}\times\nabla)=\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dA_0}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}, \tag{2.4.10}$$

即通常所谓的自旋-轨道耦合项;(2.4.9)式最后一项称为达尔文项,在直观上它亦可用电子的颤动来解释. 狄拉克粒子颤动范围的尺度为其康普顿波长$\frac{\hbar}{mc}$,经过Foldy-Wouthuysen 变换后的波函数$\phi(\boldsymbol{x})$中的$\boldsymbol{x}$是忽略了颤动后的电子坐标,也就是对颤动位置进行平均后的值,因此电子的电势能并不就是上述$\boldsymbol{x}$处的$qA_0(\boldsymbol{x},t)$,而应当是$qA_0(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t)$在颤动范围内的平均值$\langle qA_0(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t)\rangle$,当对$\delta\boldsymbol{x}$展开时,与$\delta\boldsymbol{x}$一次方成正比的项平均后虽然等于零,但展开到$\delta\boldsymbol{x}$的平方项时就会多出一个修正项,即

$$\langle qA_0(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t)\rangle=qA_0(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{2}q\frac{\partial^2A_0}{\partial x_j\partial x_k}\langle\delta x_j\delta x_k\rangle$$

再由$\langle\delta x_j\delta x_k\rangle=\frac{1}{3}\langle(\delta r)^2\rangle\delta_{jk}$,上式即化为

① 如Bjorken and Drell, Relativistic Quantum Mechanics, p. 51; Sweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, p. 102; Itzykson and Zuber, Quantum Field Theory, p. 71.

$$\langle qA_0(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t)\rangle = qA_0(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{6}\nabla^2 A_0\langle(\delta r)^2\rangle. \tag{2.4.11}$$

如按颤动的范围来估计$\langle(\delta r)^2\rangle$,其量级应为$\frac{\hbar^2}{m^2c^2}$,于是(2.4.11)式右方第二项～$-\frac{q\hbar^2}{6m^2c^2}\nabla\cdot\boldsymbol{E}$,此值与(2.4.9)式右方最后一项在形式、符号和数量级上都完全一致,相差不过是一个量级为1的常数因子$\frac{3}{4}$.

以上讨论表明,尽管在非相对论近似下,我们可以说粒子在空间的分布概率,也可以构造具有确定坐标$\boldsymbol{x}_0$的波函数$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$. 但这里的$\boldsymbol{x}$是作非相对论近似后的坐标,它实际是指略去电子颤动后的坐标. 颤动的效应是通过一些附加的修正项表现在非相对论的方程中.

## §2.5 电子场的量子化和负能级问题的最终解决

我们知道通常的量子力学方程描写的是单个粒子的运动. 在量子力学的框架内无法描写正反粒子对的产生和湮没的现象,除非是像狄拉克那样引进一个粒子海把所有负能级都占满. 但这样做,对象已不是单个粒子,方程也失去了单粒子量子力学方程的意义. 在前面还曾指出,即使正能级的狄拉克波函数也不严格具有粒子在空间的概率密度幅的意义. 通过 Foldy-Wouthuysen 变换后的波函数,虽然可解释为概率密度幅,但在相对论情况它满足的却是一个非定域的方程,而且不具有协变的形式.

对狄拉克方程的更自然的理解是,它是一种旋量场的方程,并需对它进行量子化. 对于描述电子的狄拉克方程(狄拉克方程还可用来描述其他的自旋为1/2的粒子),相应的旋量场就称为电子场. 它的量子就是正反电子.

旋量场与矢量场或标量场的一个根本差异是,它并非一个可观察量. 因为它在旋转2π角度后要变一个符号(至于$\psi$是复数,则不是一个原则性的困难,因为我们可将$\psi$分解为实部和虚部两个实函数,并通过联立方程将它们联系起来). 这表明它不是具有经典意义的场,而从头就是量子性的场. 这种场既然没有经典对应,也就不能按第一章所述的正则量子化办法来量子化. 在本节中我们将根据泡利原则也就是费米统计性来讨论旋量场的量子化问题.

### 1. 费米统计性和反对易子的量子化

将狄拉克方程看作是场方程,研究的对象就从粒子转到了场. 为了求出电子场的能量和(平)动量,我们需要先找出狄拉克方程的拉格朗日函数,得出的结果是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\hbar c\left(\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\psi\right) + mc^2\bar{\psi}\psi, \tag{2.5.1}$$

因为按此 $\mathscr{L}$,通过变分原理可以导出狄拉克方程(在作变分时独立变量本应取为 $\psi$ 的实部 $\psi_R$ 和虚部 $\psi_I$,在数学上也相当于用这两者的线性组合 $\psi$ 和 $\psi^*$ 作为形式上的独立变量来作变分). 也可直接验证从上述 $\mathscr{L}$ 导出的拉格朗日方程就是狄拉克方程.

有了拉格朗日函数即可求出场的能量动量张量,结果是

$$U(t) = \int\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)(-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + mc^2\beta)\psi(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x, \tag{2.5.2a}$$

$$\boldsymbol{P}(t) = \int\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)(-\mathrm{i}\hbar\nabla)\psi(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x. \tag{2.5.2b}$$

在形式上(2.5.2a)和(2.5.2b)与“把 $\psi$ 看作是量子力学波函数”而写出的电子的能量平均值和动量平均值结果一样,这两个平均值是在量子力学课程中就已熟悉的. 同样,电子场的电荷为

$$Q(t) = -e\int\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x. \tag{2.5.3}$$

此结果也可从规范变换下的不变性来导出,电荷就是这一不变性所对应的守恒量.

电子场按螺度一定的平面行波的展开式为

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p},s}\left[\alpha_{ps}(t)u^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \beta^*_{ps}(t)v^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right]. \tag{2.5.4}$$

此式不限于自由电子场,在自由电子场情况 $\alpha_{ps}(t) = \alpha_{ps}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}$, $\beta^*_{ps}(t) = \beta^*_{ps}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}$,这时(2.5.4)形式上就与(2.2.12)~(2.2.15)式一样. 相应地,

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p},s}\left[\alpha^*_{ps}(t)\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \beta_{ps}(t)\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right]. \tag{2.5.5}$$

将(2.5.4)式和它的厄米共轭代入(2.5.2)和(2.5.3)式并进行积分后即得出

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{\boldsymbol{p},s}[\alpha^*_{ps}(t)\alpha_{ps}(t) - \beta_{ps}(t)\beta^*_{ps}(t)]E, \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \\ \boldsymbol{P}(t) &= \sum_{\boldsymbol{p},s}[\alpha^*_{ps}(t)\alpha_{ps}(t) - \beta_{ps}(t)\beta^*_{ps}(t)]\boldsymbol{p}, \\ Q(t) &= -\sum_{\boldsymbol{p},s}[\alpha^*_{ps}(t)\alpha_{ps}(t) + \beta_{ps}(t)\beta^*_{ps}(t)]e. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

在自由场情况,$U$,$\boldsymbol{P}$ 和 $Q$ 都与 $t$ 无关.

下面来考虑电子场的量子化问题. 仍在海森伯图象中来进行. 量子化后,$\psi(\boldsymbol{x},t)$和 $\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)$变成了算符,相应地各个平面行波自由度的动力学变量 $\alpha_{ps}(t)$,$\beta^*_{ps}(t)$以及 $\alpha^*_{ps}(t)$和 $\beta_{ps}(t)$也随之变成算符. 这时(2.5.4)和(2.5.5)式即化为

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}(t)u^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}(t)v^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}],$$

$$\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}(t)\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+\hat{\beta}_{ps}(t)\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}].$$

$$(2.5.7)$$

相应地,能量、动量和电荷也相应地变成了算符:

$$\begin{aligned}\hat{U}(t)&=\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}(t)\hat{\alpha}_{ps}(t)-\hat{\beta}_{ps}(t)\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}(t)]E,\\ \hat{\boldsymbol{P}}(t)&=\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}(t)\hat{\alpha}_{ps}(t)-\hat{\beta}_{ps}(t)\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}(t)]\boldsymbol{p},\\ \hat{Q}(t)&=-\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}(t)\alpha_{ps}(t)+\hat{\beta}_{ps}(t)\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}(t)]e.\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

这里遗留了一个问题,即两个算符 $\hat{\alpha}^{\dagger}$ 与 $\hat{\alpha}$(以及 $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}^{\dagger}$)排列的顺序,上式是照着(2.5.6)式排序的,但(2.5.6)式中 $\alpha,\beta$ 等为 $c$ 数,顺序可以随便排. 这里顺序就不能随便了. 关于这个问题我们留到后面讨论.

在自由场的情况下,$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$和它的厄米共轭即为

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}u^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}+\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}v^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}],$$

$$\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}u^{(s)}(\boldsymbol{p})^{\dagger}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}+\hat{\beta}_{ps}v^{(s)}(\boldsymbol{p})^{\dagger}e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}].$$

$$(2.5.9)$$

量子化的关键问题是引入算符的对易关系,如果我们仿照电磁场那样来引入量子化条件,基本对易关系即为

$$[\hat{\alpha}_{ps}(t),\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}(t)]=\delta_{pp'}\delta_{ss'},\quad[\hat{\beta}_{ps}(t),\hat{\beta}_{p's'}^{\dagger}(t)]=\delta_{pp'}\delta_{ss'}.\tag{2.5.10}$$

但这样导出的结果将与泡利原则(或费米统计性)相矛盾. 我们来考察(2.5.8)式中右方第一项 $\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}$, $\hat{\alpha}_{ps}$,仍定义它为 $\hat{n}_{ps}$,则由(2.5.10)中第一式即可得出 $\hat{n}_{ps}$ 的本征值为0,1,2,3,…. 推导的过程如§1.3中的一样. (2.5.8)式中的这一项代表正能级模对 $U,\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 各量的贡献. 上面结果虽然表明该模的能量、动量和电荷是量子化的,但量子(即该模中的电子)的数目都无上限. 这就与泡利原则相矛盾. 按照泡利原则,每个模中,电子数目只能为0或1. (2.5.8)式右方第二项亦有类似的问题,我们将留在下一小节单另讨论.

为了使泡利原则得到满足,若当(Jordan)和维格纳(Wigner)提出了反对易子的量子化方案,即

$$\begin{aligned}&\{\hat{\alpha}_{ps}(t),\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}(t)\}=\delta_{pp'}\delta_{ss'},\\ &\{\hat{\alpha}_{ps}(t),\hat{\alpha}_{p's'}(t)\}=\{\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}(t),\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}(t)\}=0.\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

其中曲括号代表反对易子,其定义为

$$\{\hat{L},\hat{M}\} = \hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L}.$$

在高等量子力学的课程中,曾讲授过薛定谔波函数的二次量子化,并用它来处理多体问题. 在薛定谔波函数的二次量子化中,就是采用像(2.5.11)式一样的反对易子公式. 这种反对易子的量子化与多体波函数的反对称化相对应.

正能级($ps$)态中电子数算符仍由

$$\hat{n}_{ps}^{(+)} = \hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps} \tag{2.5.12}$$

来定义. 根据(2.5.11)式,有

$$\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps} = 1 - \hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger},\quad \hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}_{ps} = \hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger} = 0. \tag{2.5.13}$$

于是由(2.5.13)第二式,$\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}=0$. 利用以上结果即得

$$\hat{n}_{ps}^{(+)2} = (\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps})(\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps}) = (\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps})(1 - \hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}) = \hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps} = \hat{n}_{ps}^{(+)}, \tag{2.5.14}$$

从而$\hat{n}_{ps}^{(+)}$的本征值只能为 0 和 1. 这就满足了泡利原则的要求:每个正能级的($ps$)模中至多只能有一个电子,我们把这两个态记作$|0\rangle_{ps}$和$|1\rangle_{ps}$.

利用(2.5.13)式不难证明

$$[\hat{n}^{(+)},\hat{\alpha}] = -\hat{\alpha},\quad [\hat{n}^{(+)},\hat{\alpha}^{\dagger}] = \hat{\alpha}^{\dagger}, \tag{2.5.15}$$

为书写简便我们暂时略去了脚标($ps$). (2.5.15)第一式意味着$\hat{\alpha}$为吸收算符,因为它可写作$\hat{n}^{(+)}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{n}^{(+)}-1)$,当作用到$\hat{n}^{(+)}$的本征态$|n_0\rangle$上时即得出

$$\hat{n}^{(+)}(\hat{\alpha}\,|\,n_0\rangle) = \hat{\alpha}(\hat{n}^{(+)} - 1)\,|\,n_0\rangle = (n_0 - 1)(\hat{\alpha}\,|\,n_0\rangle).$$

于是$\hat{\alpha}|n_0\rangle$正比于$|n_0-1\rangle$. 再通过$(\langle n_0|\hat{\alpha}^{\dagger})(\hat{\alpha}|n_0\rangle)=\langle n_0|\hat{n}^{(+)}|n_0\rangle=n_0$,即得出对于 $n_0=0$ 和 1 的两个态,

$$\hat{\alpha}\,|\,0\rangle = 0,\quad \hat{\alpha}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle. \tag{2.5.16}$$

同样通过$\hat{n}^{(+)}(\hat{\alpha}^{\dagger}|n_0\rangle) = \hat{\alpha}^{\dagger}(\hat{n}^{(+)}+1)|n_0\rangle = (n_0+1)(\hat{\alpha}^{\dagger}|n_0\rangle)$以及$\langle n_0|\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{\dagger}|n_0\rangle=\langle n_0|1-\hat{\alpha}^{\dagger}\hat{\alpha})|n_0\rangle=1-n_0$,即得出

$$\hat{\alpha}^{\dagger}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle,\quad \hat{\alpha}^{\dagger}\,|\,1\rangle = 0, \tag{2.5.17}$$

故$\hat{\alpha}^{\dagger}$代表发射算符. (2.5.17)第二式正是泡利原则的要求,它表示当一个模中已有一个电子时,再在该模中增加一个电子,结果将为零(表示不存在那样的态). 注意 0 与$|0\rangle$不同,后者表示该模中没有电子,但这种态是存在的.

**2. 正电子的吸收和发射算符,负能级问题的最终解决**

下面我们转到(2.5.4)~(2.5.6)式中的第二项即负能级所贡献的部分. 如果亦采用正则量子化方案,则同样可以得出$\hat{n}_{ps}^{(-)}\equiv\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}\hat{\beta}_{ps}$的本征值为 0,1,2,3,…,

于是$\hat{U}$, $\hat{\boldsymbol{P}}$和$\hat{Q}$中该项分别为$-\sum_{ps}(\hat{n}_{ps}^{(-)}+1)E$, $-\sum_{ps}(\hat{n}_{ps}^{(-)}+1)\boldsymbol{p}$和$\sum_{ps}-(\hat{n}_{ps}^{(-)}+1)e$. 其取值都是量子化的,但量子的数目无上限,而且其中能量仍为负值.

注:即使当初把(2.5.4) $\hat{\psi}$中第二项的算符不认定为$\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}$而仍认定为$\hat{\beta}_{ps}$(从而与第一项相似),那么能量、动量和电荷的第二项将分别为$-\sum_{ps}\hat{n}_{ps}^{(-)}E$, $-\sum_{ps}\hat{n}_{ps}^{(-)}\boldsymbol{p}$和$-\sum_{ps}\hat{n}_{ps}^{(-)}q$,情况亦无实质性改变.

同样,只有在改用反对易子量子化后,才可解决这一问题. 这时有

$$
\begin{gathered}
\{\hat{\beta}_{ps}(t), \hat{\beta}_{p's'}^{\dagger}(t)\} = \delta_{pp'}\delta_{ss'}, \\
\{\hat{\beta}_{ps}(t), \hat{\beta}_{p's'}(t)\} = \{\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}(t), \hat{\beta}_{p's'}^{\dagger}(t)\} = 0.
\end{gathered} \tag{2.5.18}
$$

仿照(2.5.14)式处的论证,可知

$$
\hat{n}_{ps}^{(-)}(t) = \hat{\beta}_{ps}^{\dagger}(t)\,\hat{\beta}_{ps}(t) \tag{2.5.19}
$$

的本征值也只能取0和1. 在$\hat{n}_{ps}^{(-)}$解释为粒子数算符的情况下,$\hat{\beta}_{ps}$和$\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}$同样代表相应的吸收和发射算符.

利用(2.5.18)式,能量、动量和电荷算符$\hat{U}$, $\hat{\boldsymbol{P}}$和$\hat{Q}$中的第二项类似地亦可用$\hat{n}_{ps}^{(-)}$表示出来,于是总起有

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(t) &= \sum_{ps}[\hat{n}_{ps}^{(+)}(t) + \hat{n}_{ps}^{(-)}(t) - 1]E, \\
\hat{\boldsymbol{P}}(t) &= \sum_{ps}[\hat{n}_{ps}^{(+)}(t) + \hat{n}_{ps}^{(-)}(t) - 1]\boldsymbol{p}, \\
\hat{Q}(t) &= -\sum_{ps}[\hat{n}_{ps}^{(+)}(t) - \hat{n}_{ps}^{(-)}(t) + 1]e.
\end{aligned} \tag{2.5.20}
$$

在自由场情况,这些量实际与$t$无关.

从(2.5.20)式可以看出,电子场的能量、动量和电荷都是量子化的,而且有两种量子,$\hat{n}^{(\pm)}$分别为它们的"数算符". 它们的能量都是正的,但电荷符号相反. $\hat{n}^{(+)}$代表电子(正费米子)数算符,而$\hat{n}^{(-)}$代表正电子(反费米子)的数算符. $\hat{\psi}$中含有的是正费米子的吸收算符和反费米子的发射算符,$\hat{\psi}^{\dagger}$中则反过来. 在(2.5.9)式中,与吸收算符相联系的时空函数因子,不论是正费米子还是反费米子都是$\frac{1}{\sqrt{V}}e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}$,这和量子力学中的动量为$\boldsymbol{p}$,能量为$E$的波函数相同. 而与发射算符相联系的时空函数因子,同样不论是正费米子还是反费米子,都是$\frac{1}{\sqrt{V}}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}$,和量子力学中动量为$\boldsymbol{p}$、能量为$E$的波函数的复共轭相同. 在这里$E$总取正值. 吸收算符和发射算符与时空函数因子的这种联系,与电磁场矢势的展式中完全相似. 参见(1.3.33)式. 这就明确地显示出:狄拉克方程中所谓的负能级解($p_0<0$),其实并非具有负能量的电子(正费米子)波函数,而是具有正能量的正电子(反费米子)波函数的$C$共轭(即正反共轭,参见§2.2第2小节).

另外,在量子化之前,将 $\psi_+(\boldsymbol{x},t)$和 $\psi_-(\boldsymbol{x},t)$加在一起(如(2.2.12)式所示)其意义并不清楚,而在量子化后的(2.5.9)第一式中,第一项代表减少一个费米子的项,第二项代表增加一个反费米子的项,都是使费米子数的代数总值减少一个.总起来说,$\hat{\psi}$代表费米子数减少算符,它可以通过吸收一个正费米子来实现,也可以通过发射一个反费米子来实现.

到此,问题基本上都理顺了,剩下的只是(2.5.20)式中的一个不大的问题.按照通常的理解.真空态应是各个模的电子数和正电子数都为零的状态,于是按(2.5.20)式,真空态的能量和电荷都将是无穷大.这一情况对应于狄拉克理论中每个负能级的态都为电子所占满的设想.在量子化以后这一设想是不需要的,通过适当的考虑(见下文)可将这一发散的能量和电荷除去.

我们注意到(2.5.2)和(2.5.3)式对正反粒子是不对称的,其中电子的发射算符排在吸收算符的左边(这种顺序将称为正规序)而正电子的发射算符却排在吸收算符右边(反正规序).而电磁规律实际上具有正反粒子变换($C$ 变换)的对称性.为了将$\hat{U}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$和$\hat{Q}$改成对"正反粒子"对称的形式,最简单的办法就是把正电子的算符的顺序改过来即可.这一操作就称为正规编序.具体的操作办法是:对于任意的发射算符和吸收算符的乘积,通过相邻算符的位置对换(就是简单的对换,不论其对易子是否为零,因这里是对原公式的改造)把乘积中所有的发射算符都换到吸收算符的左边,当进行对换的是两个费米子算符时(无论对换的两个都是发射算符,还是一个发射算符一个吸收算符,还是两个吸收算符),每次对换都要引入一个$(-1)$的因子.当进行对换的是两个玻色子算符或一个玻色子算符一个费米子算符时,则不必引入$(-1)$因子.对某个"算符乘积"进行正规编序通常就在前面加上一个N或用前后两个:来表示①.这样对称化后的能量算符$\hat{U}$即为

$$\begin{aligned}\hat{U}(t)&=\mathrm{N}\int\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)(-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+mc^2\beta)\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x\\&=\mathrm{N}\sum_{ps}[\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}(t)\hat{\alpha}_{ps}(t)-\hat{\beta}_{ps}(t)\hat{\beta}^{\dagger}_{ps}(t)]E\\&=\sum_{ps}[\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}(t)\hat{\alpha}_{ps}(t)+\hat{\beta}^{\dagger}_{ps}(t)\hat{\beta}_{ps}(t)]E\\&=\sum_{ps}[\hat{n}^{(+)}_{ps}(t)+\hat{n}^{(-)}_{ps}(t)]E,\end{aligned}\tag{2.5.21}$$

同样正规编序后$\hat{\boldsymbol{P}}$和$\hat{Q}$为

$$\hat{\boldsymbol{P}}(t)=\mathrm{N}\sum_{ps}[\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}(t)\hat{\alpha}_{ps}(t)-\hat{\beta}_{ps}(t)\hat{\beta}^{\dagger}_{ps}(t)]\boldsymbol{p}=\sum_{ps}[\hat{n}^{(+)}_{ps}(t)+\hat{n}^{(-)}_{ps}(t)]\boldsymbol{p},$$

① 在本书中,我们只用N来表示正规编序,而用前后两个:表示某种正规加时间编序,见§7.4节.

$$\hat{Q}(t) = -\mathrm{N}\sum_{ps}[\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}(t)\hat{\alpha}_{ps}(t) + \hat{\beta}_{ps}(t)\hat{\beta}^{\dagger}_{ps}(t)]e$$

$$= -\sum_{ps}[\hat{n}^{(+)}_{ps}(t) - \hat{n}^{(-)}_{ps}(t)]e, \qquad (2.5.22)$$

我们看到正规编序后的$\hat{U}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$和$\hat{Q}(t)$和原来的表达式(2.5.20)是不一样的,差别就在于消除了真空态中的无穷大的能量和电荷. 从而(2.5.21)和(2.5.22)式代表实际观测的值(从物理上说,并不存在什么量子原则要求电子场具有真空能量和真空电荷).

与此相应,电流密度算符亦要加上正规编序符号:

$$-e\,\hat{j}_{\mu}(\boldsymbol{x},t) = -\mathrm{i}ec\mathrm{N}[\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)]. \qquad (2.5.23)$$

以上的讨论表明,约当—维格勒的反对易子量子化方案能给出电子统计性的正确结果. 量子化条件(2.5.11)和(2.5.18)式也可用$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$和$\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)$表示出来,结果就是

$$\{\hat{\psi}_{\rho}(\boldsymbol{x},t), \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{x}',t)\} = \delta_{\rho\sigma}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

$$\{\hat{\psi}_{\rho}(\boldsymbol{x},t), \hat{\psi}_{\sigma}(\boldsymbol{x}',t)\} = \{\hat{\psi}^{\dagger}_{\rho}(\boldsymbol{x},t), \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{x}',t)\} = 0, \qquad (2.5.24)$$

其中$\rho$和$\sigma$为旋量的分量指标,$\rho,\sigma=1,2,3,4$.

### 3. 几点附注

(1) 在粒子数表象中,无论是电子还是正电子,各个模的$\hat{n}$都由对角矩阵$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$表示,粒子数为零的本征态由$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$表示,而粒子数为1的本征态为$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 吸收算符和发射算符分别表示为$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. 但值得指出的是,对不同模式的运算并不能完全独立地进行,因为不同模式的算符是反对易的,这一点与电磁场的情况不同. 为了避免在计算中发生符号误差(使本来相减的项变成相加),通常采用另外一种方式来表示状态,即把"动量为$\boldsymbol{p}$、螺度为$s$"的一个电子态表示为$\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}|0\rangle$,而将同样模的一个正电子态表式为$\hat{\beta}^{\dagger}_{ps}|0\rangle$. 若几个模中都有电子或正电子,则该态可表示为这些模的发射算符的乘积作用到真空态上,如$\hat{\alpha}^{\dagger}_{p_1s_1}\hat{\beta}^{\dagger}_{p_2s_2}\hat{\alpha}^{\dagger}_{p_3s_3}|0\rangle \equiv |A\rangle$. 在此表示中各个发射算符的顺序可以任意取(不同取法所对应的态可能差一个符号,但一个量子态乘上一个绝对值为1的因子从物理上说并无不同),但一经取定后就要保持不变. 当用吸收算符例如$\hat{\beta}_{p_2s_2}$作用到该态上时,应先通过对易将它移到$\hat{\beta}^{\dagger}_{p_2s_2}$前面,然后再将($\hat{\beta}_{p_2s_2}\hat{\beta}^{\dagger}_{p_2s_2}$)作为一个整体通过对易将它移到$|0\rangle$的前面. 在$\hat{\beta}_{p_2s_2}$与$\hat{\alpha}^{\dagger}_{p_1s_1}$交换位置时,要出来一个符号,而当($\hat{\beta}_{p_2s_2}\hat{\beta}^{\dagger}_{p_2s_2}$)整体

与后面的$\hat{\alpha}^{\dagger}_{p_3 s_3}$交换位置时，就不再加负号了．再利用$\hat{\beta}_{p_2 s_2}\hat{\beta}^{\dagger}_{p_2 s_2}|0\rangle=|0\rangle$，最后得出

$$\hat{\beta}_{p_2 s_2}\mid A\rangle=-\hat{\alpha}^{\dagger}_{p_1 s_1}\hat{\alpha}^{\dagger}_{p_3 s_3}\mid 0\rangle.$$

值得注意的是，如果在某个问题中得出多个项并要对它们求和时，每项前面的正负号就有实质性的意义（因为它们代表这些项之间的相对位相关系），不能把符号弄错．

(2) 在量子力学中，如所周知电子的多体波函数需要反对称化．在量子场论中已不再有这种需要．因为量子场论的态说的是，"在场的某个模($\boldsymbol{p}_1, s_1$)中有一个量子（电子），在场的另一个模($\boldsymbol{p}_2, s_2$)中也有一个量子（电子），等等"．根本不存在第一个电子在哪个态、第二个电子在哪个态……这样的概念，当然也就谈不上交换电子的指标来反对称化的问题．至于电子的费米统计性，则已体现在$\hat{\alpha}_{p_1 s_1}$，$\hat{\alpha}_{p_2 s_2}$，…的反对易性质上．

(3) 以上我们是将$\hat{\psi}$和$\hat{\psi}^{\dagger}$按动量$\boldsymbol{p}$和螺度$s$一定的波函数来作展开．自然也可按其他力学量完全集合（如能量、总角动量和宇称）的本征态来展开，这里不再复述．

(4) 在量子光学所讨论的问题中，电子的速度$v$一般比光速$c$小得多即$\frac{v}{c}\ll 1$，而且不涉及正负电子对的产生和湮灭过程．这时我们可以作非相对论近似．即用§2.4中所讨论的二分量波函数$\phi(\boldsymbol{x})$来代替狄拉克波函数$\psi(\boldsymbol{x})$．由于$\phi(\boldsymbol{x})$中只含正能级解，故在自由场情况量子化后即为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)&=\sum_{ps}\frac{1}{\sqrt{V}}\hat{\alpha}_{ps}\phi_s e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)},\\ \hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)&=\sum_{ps}\frac{1}{\sqrt{V}}\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}\phi^{\dagger}_s e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}.\end{aligned}\right\} E>0 \tag{2.5.25a}$$

这时$s$不一定要取为螺度（因为动量与任一个自旋分量都可有共同本征态），$\phi_s$可取为$\sigma_3$的本征态．对于非自由场，相应的展开即为

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ps}\frac{1}{\sqrt{V}}\hat{\alpha}_{ps}(t)\phi_s e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}},\quad \hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ps}\frac{1}{\sqrt{V}}\hat{\alpha}^{\dagger}_{ps}(t)\phi^{\dagger}_s e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{2.5.25b}$$

(2.5.25)式也就是高等量子力学中将薛定谔波函数二次量子化时所用的表达式．

# 第三章　量子电动力学的基本方程组　S 算符的协变微扰论

在以上两章中,我们分别讨论了自由电磁场与自由电子场,没有考虑它们之间的相互作用.实际情况是,不仅电子(或正电子)可以吸收和发射光子,而且"正负电子对"也可以转化为光子.反过来光子也可以转化为正负电子对.由于这种相互作用,电磁场和电子场形成了统一的动力学系统,这个系统的运动方程即为量子电动力学的基本方程组.

量子电动力学的基本方程组为联立的非线性泛函方程,它的求解极为困难,需要采用近似的方法来处理.由于电磁相互作用比较弱,作为度量其作用强度的无量纲参数$\frac{e^2}{\hbar c}$只有$\frac{1}{137}$,比 1 小得多(参见(4.1.38)式下的说明).人们常用的一个方法是,将相互作用项作为小量,把解对它来展开.这就是 $S$ 算符的微扰理论.它是计算各种电磁过程的跃迁概率和反应截面的有效方法.

近代的 $S$ 算符协变微扰论,是 20 世纪中叶由费曼和戴逊发展起来的,它巧妙地把原来要分开计算的许多项结合在一起,不仅大大减轻了计算工作量,减少了遗漏的可能性,而且配合着对应的图形(即所谓的费曼图),具有直观的形象.它的建立是量子电动力学在方法上的一个巨大进展.

## §3.1　电子场与电磁场的相互作用　量子电动力学的基本方程组

电动力学理论是一种规范理论,它具有一种特殊的对称性,即定域规范变换的不变性.电磁场也被称作是一种规范场(阿贝尔规范场),规范场的量子化有一定的复杂性.我们知道,在规范变换时,矢势的四个分量($\boldsymbol{A}$ 和 $A_4 = \mathrm{i}A_0$)之中,只有 $\boldsymbol{A}$ 的横场部分保持不变,它们代表电磁场真正的动力学变量,"量子化"可以只对它们来进行.在第一章中我们就是通过规范变换把 $\boldsymbol{A}$ 的纵场部分消去,然后对剩下的横场部分来量子化.但从相对论的协变性来看,又应保持四个分量之间的对称.这两者各有自己的优势.在许多问题中,保持理论的协变形式,即使在计算低能过程也有方便处,上面提到的费曼-戴逊微扰论就是建立在协变形式上面的.因此在本节中,我们将同时给出协变和非协变量子化情况下的基本方程组.

协变量子化合遇到一些麻烦,读者可跳过一些细节把重点放在最后的结论上.

**1. 量子力学中的规范变换**

在量子力学中，规范变换具有比经典电动力学中更深一层的物理意义．本小节先对此进行讨论．

我们知道量子力学中波函数的相位，并无绝对意义．如果 $\psi(x)$ 为电子的波函数，描述它的某个状态，将它乘上因子 $e^{i\theta}$ 即相位改变 $\theta$ 后，所描述的仍是同一个状态．在动量算符取定为 $-i\hbar\nabla$，方程取定为 $\hat{H}\psi=i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ 的情况下，上述 $\theta$ 只能为常数，与 $(\boldsymbol{x},t)$ 无关．变换 $\psi(\boldsymbol{x},t)\to e^{i\theta}\psi(\boldsymbol{x},t)$ 就称为电子波函数的整体规范变换．如果 $\theta$ 是 $(\boldsymbol{x},t)$ 的函数，则相应的变换就称为定域规范变换．在自由电子的情况下，进行这种变换将不可避免地要导致动量算符和运动方程的改变．三维动量算符不再是 $-i\hbar\nabla$，方程也不再是原来的样子．以狄拉克方程为例，在作变换

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\to\psi'(\boldsymbol{x},t)=e^{i\theta(\boldsymbol{x},t)}\psi(\boldsymbol{x},t)$$

的情况下，有

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\mu}=e^{-i\theta(\boldsymbol{x},t)}\frac{\partial\psi'(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\mu}-i\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\mu}e^{-i\theta(\boldsymbol{x},t)}\psi'(\boldsymbol{x},t),$$

代入 $\psi$ 的狄拉克方程(2.1.22)中即化出

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-i\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\mu}\right)\psi'(\boldsymbol{x},t)+\frac{mc}{\hbar}\psi'(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{3.1.1}$$

$\psi'$ 的方程与 $\psi$ 的方程相比多出了 $-i\gamma_\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial x_\mu}$ 一项．对于非相对论的薛定谔方程，情况也类似．只有电子与某种矢量场以特定形式相作用的情况下，才有可能使运动方程的形式保持不变．如以 $A_\mu(x)$ 表示这种矢量场（为书写简便，用 $x$ 代替 $\boldsymbol{x},t$）那么所需的具有特定形式作用的方程为

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-i\frac{q}{\hbar c}A_\mu(x)\right)\psi(x)+\frac{mc}{\hbar}\psi(x)=0, \tag{3.1.2}$$

当 $\psi$ 变成 $\psi'=\psi e^{i\theta(x)}$ 时，只要 $A_\mu$ 也变成 $A'_\mu=A_\mu+\dfrac{\hbar c}{q}\dfrac{\partial\theta(x)}{\partial x_\mu}$，那么 $\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_\mu}$ 所多出的项正好与 $-\dfrac{iq}{\hbar c}A'_\mu$ 所多出的项相消，于是 $\psi'$ 和 $A'$ 将满足

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-i\frac{q}{\hbar c}A'_\mu(x)\right)\psi'(x)+\frac{mc}{\hbar}\psi'(x)=0, \tag{3.1.3}$$

形式上与 $\psi$ 和 $A_\mu$ 所满足的方程(3.1.2)一样．我们看到(3.1.2)式正是 §2.4 中所讲的电子在电磁场中的运动方程，$q$ 即为电子电荷 $-e$．

这表明在量子力学中，规范变换不应是电磁势 $A_\mu$ 独自的变换而是 $\psi$ 和 $A_\mu$ 的

一种联合变换：

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) - \frac{\hbar c}{e}\frac{\partial \theta(x)}{\partial x_{\mu}}, \quad \psi(x) \rightarrow \psi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}.$$

在此变换下，电子的"运动动量"仍由 $-\mathrm{i}\hbar\nabla - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$ 表示，它的运动方程不变. 旋量场与电磁场的这种作用称作规范作用. 规范作用的形式完全由定域规范变换的不变性来确定. 现在知道，规范作用在物理学的基本规律中有着更为广泛的意义，但需要从这里所讲的较为简单的阿贝尔规范作用推广到非阿贝尔规范作用(有兴趣的读者可参阅量子规范场论方面的书).

从(3.1.2)式可以证明，$j_{\mu} \equiv \mathrm{i}c\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ 现仍满足连续性方程，

$$\frac{\partial j_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} = 0, \tag{3.1.4}$$

也就是说，在有电磁场时，上述 $j_{\mu}(x)$ 仍代表电子场的守恒流.

**2. 协变规范下电磁场的量子化和基本方程组**

在本章的引言中已经提到了采用协变规范的优点，费曼和戴逊的微扰论就是在协变规范中建立的. 在电动力学课中讲的洛伦兹规范就是协变的规范. 下面我们就讨论协变规范中的量子化问题，采用的亦是洛伦兹规范.

洛伦兹规范的条件是

$$\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} = 0, \tag{3.1.5}$$

也就是 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t} = 0$. 将此条件代入麦克斯韦方程组即将它化为四个分量 $A_{\mu}$ 各自的非齐次波动方程($q$ 代表粒子的电荷，对于电子来说，$q = -e$)

$$\Box A_{\mu}(x) = -\frac{4\pi q}{c}j_{\mu}(x), \Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{3.1.6}$$

其中 $j_{\mu}(x)$的表达式如(3.1.4)上面所示. 为了使四个分量 $A_{\mu}$ 都有共轭的正则动量，我们选取新的拉格朗日函数，使得"由它得出的拉格朗日方程"直接就是(3.1.6)式. 符合这一要求的 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{q}{c}A_{\mu}j_{\mu} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{q}{c}A_{\mu}j_{\mu}. \tag{3.1.7}$$

从上述 $\mathscr{L}$ 得出的"与 $A_{\mu}$ 共轭的"正则动量场为

$$\pi_{\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}} = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial t}, \quad \mu = 1,2,3,4. \tag{3.1.8}$$

这样,无论从波动方程(3.1.6)还是从正则动量表达式(3.1.8)来看,四个分量 $A_\mu$ 间都保持着对称的形式.剩下的问题是,在量子化后如何对待洛伦兹条件?

量子化后的 $A_\mu$ 都变成了算符,在海森伯图象中(3.1.6)~(3.1.8)式都成了算符方程.若(3.1.5)式也变成了算符方程,即

$$\frac{\partial \hat{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0,$$

则将引起困难.因若上式成立,$\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu}$与任何算符的对易子都应为零.但按照(3.1.8)式和正则量子化条件,$\left[\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu}, \hat{A}_4\right]$等于$\frac{1}{\mathrm{i}}[4\pi c\ \hat{\pi}_4, \hat{A}_4] \neq 0$.这就导致了矛盾.

1932 年费米提出一个解决此困难的建议方案:不把洛伦兹条件看作是对算符 $\hat{A}_\mu$ 的要求(即不要求$\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu}=0$),而把它看作是对物理上允许的状态的要求,即任何物理上现实的态应使

$$\langle | \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} | \rangle = 0 \tag{3.1.9}$$

成立.对费米这一建议可这样来理解:在经典理论中,洛伦兹条件实际上只对初始条件给予了限制.一旦初始状态满足了要求,则由电流连续性方程(3.1.4)和运动方程(3.1.6)即可证明洛伦兹条件在以后的时间总是成立(参见曹昌祺《电动力学》).在海森伯图象的量子理论中,这种对初始条件的要求,常表现为对状态的限制.

以上的处理也可这样来解释.当我们把四个分量 $A_\mu$ 都作为独立的自由度时,所生成的态空间就被扩大了,实际的物理态空间只是它的一个子空间.此子空间即由(3.1.9)式所限定.

但(3.1.9)式作为子空间的限定条件存在一个问题.物理的子空间应当具有线性结构,即若$|A\rangle$和$|B\rangle$皆属于此空间,则它们的叠加态 $a|A\rangle + b|B\rangle$也应属于该空间.不难看出条件(3.1.9)所规定的子空间并不具有这一性质,因此需要加以修改.我们先看自由电磁场的情况.(非自由场情况见(3.1.37)式下).这时修改后的子空间条件为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\hat{A}_\mu^{(+)}(x) | \rangle = 0, \tag{3.1.10}$$

其中 $\hat{A}_\mu^{(+)}$ 表示 $\hat{A}_\mu$ 中含吸收算符的部分.不难看出由(3.1.10)式所规定的子空间具有线性结构并且能使(3.1.9)式满足.因为对(3.1.10)式取厄米共轭得 $\langle | \frac{\partial}{\partial x_\mu}\hat{A}_\mu^{(-)}(x) = 0$.将此式右乘$|\rangle$,将(3.1.10)式左乘$\langle|$然后相加,即得出:

(3.1.9)式仍能满足. 换句话说,由(3.1.10)式所限定的子空间只是原来子空间(由(3.1.9)式限定)的一部分.

既然现在作为算符方程的$\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu}=0$并不成立,那么从量子化后的麦克斯韦方程组$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\hat{F}_{\mu\nu}(x)=-\frac{4\pi e}{c}\hat{j}_\mu(x)$并不能得出波动方程组

$$\Box \hat{A}_\mu(x)=-\frac{4\pi}{c}\hat{J}_\mu(x), \quad \hat{J}_\mu=-e\hat{j}_\mu. \tag{3.1.11}$$

这也是要把拉格朗日函数修改成(3.1.7)式的形式的一个原因. 以上讨论表明,在上述协变量子化方案中,麦克斯韦方程组作为算符方程已不成立. 成立的只是它在物理状态中的期望值,即

$$\langle\frac{\partial}{\partial x_\mu}\hat{F}_{\mu\nu}(x)\rangle=-\frac{4\pi}{c}\langle\hat{J}_\mu(x)\rangle. \tag{3.1.12}$$

下面来把$\hat{\boldsymbol{A}}(x)$和$\hat{A}_0(x)$按平面波来展开. 现在$\hat{\boldsymbol{A}}$中既有横波部分也有纵波部分. 这里并用$\hat{A}_0(x)$代替$\hat{A}_4(x)$,因为$\hat{A}_0$为厄米算符. 在自由场情况下结果即为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(x)=\sum_{\boldsymbol{k},s=1,2,3}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}_{ks}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}],$$

$$\hat{A}_0(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}[\hat{a}_{k0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}_{k0}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}]. \tag{3.1.13}$$

其中$e_{k1}$和$e_{k2}$代表两个横向线偏振基矢,$e_{k3}$代表纵向偏振基矢.

将(3.1.13)式代入(3.1.10)式,即得出:对任意$\boldsymbol{k}$,下式成立:

$$(\hat{a}_{k3}-\hat{a}_{k0})|\rangle=0 \tag{3.1.14}$$

此式显示出洛伦兹条件只是对状态中的纵光子和标光子的情况作了限制.

采用正则量子化后,得出的对易关系为

$$[\hat{a}_{ks},\hat{a}_{k's'}^\dagger]=\delta_{kk'}\delta_{ss'},\ [\hat{a}_{k0},\hat{a}_{k'0}^\dagger]=-\delta_{kk'}. \tag{3.1.15}$$

(3.1.15)第二式多了一个负号原因是:当用$A_0$代替$A_4$时,(3.1.7)式右方最后一式中的$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$化成了

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_0}{\partial x_i}\frac{\partial A_0}{\partial x_i}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial A_j}{\partial t}\frac{\partial A_j}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}\frac{\partial A_0}{\partial t}(i,j=1,2,3),$$

其中$\frac{\partial A_j}{\partial t}\frac{\partial A_j}{\partial t}$项与$\frac{\partial A_0}{\partial t}\frac{\partial A_0}{\partial t}$项差了一个符号. (3.1.15)第二式可写成$[\hat{a}_{k'0}^\dagger,\hat{a}_{k0}]=\delta_{k'k}$,这样$\hat{a}_{k0}^\dagger$将成为吸收算符而$\hat{a}_{k0}$将成为发射算符,从而将产生两个问题:一、在

$\hat{A}_0(\boldsymbol{x})$中，自由情况下的发射算符的时间演化因子变为 $e^{-i\omega t}$ 而吸收算符的时间演化因子，变为 $e^{i\omega t}$；二、当 $\hat{a}_{k0}$成为发射算符时，纵光子和标光子为零的态将不满足洛伦兹条件(3.1.14)，并可证明满足(3.1.14)的态不能归一化. ①

不过，以上问题的出现，并不一定就表示物理上的困难. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的纵场部分 $\boldsymbol{A}_L$ 和标势 $A_0$ 本来就不代表电磁场的真实自由度. 这些问题只是说明，我们不能用通常的理论框架来实现 $\boldsymbol{A}$ 和 $A_0$ 的协变量子化. 要将 $A$ 的四个分量都作为独立的自由度来实现协变量子化，需要对原来的理论框架作进一步的研究. 1950 年古普塔(Gupta)和布劳勒(Bleulei)分别提出了用不定度规来解决这一问题的方案. 这个方案的根据在于，在闵可夫斯基空间中(它用 $x_0$ 即 $ct$ 代替 $x_4$)，一个四矢量($x_0$，$x_1$，$x_2$，$x_3$)的长度平方为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2$，它可表示成

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=(x_1\ x_2\ x_3\ x_0)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_0\end{pmatrix},\tag{3.1.16}$$

其中的 4×4 矩阵称为度规矩阵. 由于在此空间中，矢量的长度平方可能为正也可能为负，故这种度规称为不定度规. 这表明当我们用 $x_0$ 代替 $x_4$ 时度规矩阵要作相应改变. 矢势的情况与此相同：采用 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 和 $A_4$ 时 $A$ 的平方为$A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2$，而在改用 $A_0$，$A_1$，$A_2$，$A_3$ 时就成了 $A_1^2+A_2^2+A_3^2-A_0^2$. 古普塔和布劳勒在将不定度量引入到量子电磁场的态矢量空间时，也遵循这一规矩，即对矢量光子(包括横光子和纵光子)的自由度部分度规保持不变，只是改变标光子部分的度规. 由于本课的性质，我们不拟在正文中对此作仔细地讨论，只将结果用小号字说明如下，读者可跳过它，但需知道最后的结论.

仿照(3.1.16)式，我们定义量子电磁场的态矢量$|\rangle$的长度平方为$\langle|\hat{\eta}|\rangle$，$\hat{\eta}$代表不定度规算符. 它是厄米的，

$$\hat{\eta}^\dagger=\hat{\eta}.\tag{3.1.17}$$

下面将$\langle|\hat{\eta}$表示成$\langle\|$，称作不定度规下的共轭态矢量. 采用这一表示，态矢量的长度平方即写成$\langle\|\rangle$，而算符 $\hat{L}$在状态中的期望值相应地定义为$\langle\|\hat{L}|\rangle$. 对于算符本身亦作若干新的定义：首先，定义 $\hat{L}$在不定度规下的共轭算符为

$$\hat{L}^{\neq}=\hat{\eta}^{-1}\hat{L}^\dagger\hat{\eta},\tag{3.1.18}$$

其中 $\hat{L}^\dagger$ 为 $\hat{L}$的厄米算符. 如果

$$\hat{L}^{\neq}=\hat{L},\tag{3.1.19}$$

则称 $\hat{L}$为不定度规下的自共轭算符，这种算符在任何态中的期望值都为实数. 因为$\langle|\hat{\eta}\hat{L}|\rangle^*=$

---

① 参见阿希叶泽尔和别列斯捷茨基《量子电动力学》p. 123～125.

$\langle|\hat{L}^{\dagger}\hat{\eta}|\rangle=\langle|\hat{\eta}\hat{L}^{\neq}|\rangle=\langle|\hat{\eta}\hat{L}|\rangle=\langle||\hat{L}\rangle$. 由于 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 和 $\hat{A}_0$ 的期望值都是实数，因此它们都是不定度规下的自共轭算符. 但它们之间又是有区别的：$\hat{\boldsymbol{A}}$ 与 $\hat{\eta}$ 对易而 $\hat{A}_0$ 与 $\eta$ 反对易. 由此及(3.1.18)式即得：$\hat{\boldsymbol{A}}$ 的不定度规共轭就是它的厄米共轭，而 $\hat{A}_0$ 的不定度规共轭则等于它的厄米共轭的负值. 相应地有

$$\hat{a}_{ks}^{\neq}=\hat{a}_{ks}^{\dagger},\quad \hat{a}_{k0}^{\neq}=-\hat{a}_{k0}^{\dagger}. \tag{3.1.20}$$

对易关系为

$$[\hat{a}_{ks},\hat{a}_{k's'}^{\neq}]=\delta_{kk'}\delta_{ss'},\quad [\hat{a}_{k0},\hat{a}_{k'0}^{\neq}]=-\delta_{kk'} \tag{3.1.21}$$

(3.1.21)第一式与(3.1.15)第一式实际一样，而(3.1.21)第二式则由于 $\hat{a}_{k'0}^{\neq}=-\hat{a}_{k'0}^{\dagger}$ 而与(3.1.15)式差了一个负号，使得 $\hat{a}_{k'0}^{\dagger}$ 又可与发射算符相联系(但又有一些差别，见(3.1.25)下一行).

自由场的 $\boldsymbol{A}(x)$ 和 $A_0(x)$ 的展式现为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(x)=\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}_{ks}^{\neq}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}],\quad s=1,2,3,$$

$$\hat{A}_0(x)=\sum_{k}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}[\hat{a}_{k0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}_{k0}^{\neq}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}], \tag{3.1.22}$$

从而它们在任何态中的期望值都将为实数.

横光子数算符和纵光子数算符实际上没有改变. 标光子数算符则定义为

$$\hat{n}_{k0}=-\hat{a}_{k0}^{\neq}\hat{a}_{k0}=\hat{a}_{k0}^{\dagger}\hat{a}_{k0}. \tag{3.1.23}$$

因为这样定义的 $\hat{n}_{k0}$ 其本征值将为 $0,1,2,\cdots$. 这可从(3.1.23)式以及对易关系

$$[\hat{a}_{k0},\hat{a}_{k'0}^{\dagger}]=\delta_{kk'} \tag{3.1.24}$$

推出，$\hat{a}_{k0}$ 和 $\hat{a}_{k0}^{\neq}$ 对 $\hat{n}_{k0}$ 本征态的作用由下式表示：

$$\hat{a}_{k0}\,|\,n_{k0}\rangle=-\sqrt{n_{k0}}\,|\,n_{k0}-1\rangle,$$

$$\hat{a}_{k0}^{\neq}\,|\,n_{k0}\rangle=\sqrt{n_{k0}+1}\,|\,n_{k0}+1\rangle. \tag{3.1.25}$$

上式表明 $\hat{a}_{k0}$ 已恢复为吸收算符，$\hat{a}_{k0}^{\neq}$ 为发射算符($\hat{a}_{k0}^{\dagger}$ 与它差一个负号).

由(3.1.25)第二式，$\langle n_{k0}+1\,\|\,n_{k0}+1\rangle=\dfrac{1}{n_{k0}+1}\langle n_{k0}\,|\,\hat{a}_{k0}\hat{a}_{k0}^{\neq}\,|\,n_{k0}\rangle$，再利用对易关系 $\hat{a}_{k0}\hat{a}_{k0}^{\neq}=\hat{a}_{k0}^{\neq}\hat{a}_{k0}-1=-(\hat{n}_{k0}+1)$，即得

$$\langle n_{k0}+1\,\|\,n_{k0}+1\rangle=-\langle n_{k0}\,\|\,n_{k0}\rangle,$$

如取 $\langle 0\,\|\,0\rangle=1$，则由上式可递推出

$$\langle n_{k0}\,\|\,n_{k0}\rangle=(-1)^{n_{k0}}. \tag{3.1.26}$$

这表明在不定度规下，标光子态的长度可能为正也可能为负. 这一点对光子态的归一化很重要(参见(3.1.31)式). 至于横光子和纵光子态的长度则无变化，总是为 $+1$

既然在采用不定度规后，$\hat{a}_{k0}$ 已变为吸收算符，纵光子数和标光子数都为零的态就满足洛伦兹条件(3.1.14)式.

作为例子，我们来看波矢为确定值 $\boldsymbol{k}$ 的光子态矢量所具有的形式. 设两种横光子数为 $n_1$ 和 $n_2$，它们是物理光子，洛伦兹条件对它们没有限制. 满足洛伦兹条件的态有

$$|\phi_0\rangle = |n_1,n_2\rangle|0,0\rangle,\qquad |\phi_1\rangle = |n_1,n_2\rangle(|1,0\rangle - |0,1\rangle),$$
$$|\phi_2\rangle = |n_1,n_2\rangle(|2,0\rangle - \sqrt{2}|1,1\rangle + |0,2\rangle),\cdots \tag{3.1.27}$$

一般的表达式为

$$|\phi_l\rangle = |n_1,n_2\rangle \frac{1}{\sqrt{l!}}(\hat{a}_3^{\neq} - \hat{a}_0^{\neq})^l |0,0\rangle. \tag{3.1.28}$$

利用

$$[\hat{a}_3 - \hat{a}_0, \hat{a}_3^{\neq} - \hat{a}_0^{\neq}] = 0, \tag{3.1.29}$$

不难证明(3.1.28)式确实满足洛伦兹条件(3.1.14),而满足洛伦兹条件的一般态可表为$|\phi_l\rangle$的叠加

$$|\phi\rangle = a_0|\phi_0\rangle + a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + \cdots. \tag{3.1.30}$$

根据(3.1.26)式,可以证明

$$\langle\phi_1\|\phi_1\rangle = \langle\phi_2\|\phi_2\rangle = \cdots = 0,$$

因此只有(3.1.30)式右方的第一项对$\langle\phi\|\phi\rangle$有贡献:

$$\langle\phi\|\phi\rangle = |a_0|^2. \tag{3.1.31}$$

这表明$|\phi\rangle$是可归一的.归一化要求$|a_0|^2=1$,即所有含纵光子和标光子的态$|\phi_l\rangle(l\geqslant 1)$都对归一化无贡献.另外,对于满足洛伦兹条件的态,纵光和标光子对场的能量和动量的贡献都为零.因此在自由电磁场情况,我们将恒取纵光子数和标光子数为零.

在以后的 $S$ 算符的协变微扰计算中,我仍将采用 $\hat{A}_4$ 来代替 $\hat{A}_0$. $\hat{A}_4$ 的展开式可通过 $\hat{A}_0$ 的展开式(3.1.22)乘上 i 而得出,再利用

$$\mathrm{i}\hat{a}_{k0}^{\neq} = -\mathrm{i}\hat{a}_{k0}^{\dagger} = \hat{a}_{k4}^{\dagger}\quad(\text{因 } \hat{a}_{k4} = \mathrm{i}\hat{a}_{k0}), \tag{3.1.32}$$

即得

$$\hat{A}_4(x) = \sum_{k}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}[\hat{a}_{k4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t} + \hat{a}_{k4}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}]. \tag{3.1.33}$$

此式表明,在不定度规下,$\hat{A}_4$ 已成了厄米算符.但它的期望值为虚数,因$\langle\|\hat{A}_4|\rangle = \mathrm{i}\langle\|\hat{A}_0|\rangle$而$\langle\|\hat{A}_0|\rangle$如前所述为实数.另外,从$[\hat{a}_{k0},\hat{a}_{k'0}^{\neq}] = -\delta_{kk'}$,还可得出$[\hat{a}_{k4},\hat{a}_{k'4}^{\dagger}] = \delta_{kk'}$.于是对于四个偏振,对易关系可统一地表示为

$$[\hat{a}_{kl},\hat{a}_{k'l'}^{\dagger}] = \delta_{kk'}\delta_{ll'},\ l,l' = 1,2,3,4. \tag{3.1.34}$$

为了把 $\hat{A}_4$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合在一起用 $\hat{A}_\mu(\mu=1,2,3,4)$表示,我们引入偏振基矢 $e_\mu^{(A)} = \delta_{\mu 4}$,总共的四个偏振矢量用四维列矩阵表示出来即为

$$\mathrm{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_{k1}\\0\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{(2)}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_{k2}\\0\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_{k3}\\0\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{(4)}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.1.35}$$

它们构成正交完备集:

$$\sum_{l=1}^{4} e_\mu^{(l)}(\boldsymbol{k})e_\nu^{(l)}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\mu\nu}, \tag{3.1.36}$$

而自由 $\hat{A}_\mu(x)$的展式可以统一地表示为(用 $k\cdot x$ 表示 $k_\mu x_\mu = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t$)

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{kl}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vh}}e_\mu^{(l)}(\boldsymbol{k})(\hat{a}_{kl}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{kl}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}). \tag{3.1.37}$$

以上我们比较详尽地讨论了自由电磁场的情况.对于非自由电磁场,只简单地指出,上式将改写成

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{kl}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}e_\mu^{(l)}(\boldsymbol{k})[\hat{a}_{kl}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{kl}^\dagger(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]. \tag{3.1.38}$$

而等时的 $\hat{a}_{kl}(t)$和 $\hat{a}_{k'l'}^\dagger(t)$满足与(3.1.34)一样的对易关系式.

由于洛伦兹条件只对初态施加限制,一旦初态满足洛伦兹条件,以后任何时间洛伦兹条件都将成立,而在协变微扰论中又因为用了浸渐移引,其初态将为自由电磁场和自由电子场的状态,故用(3.1.14)式已经足够,不必再考虑非自由场时它的替代式.

总结起来,在应用不定度规后的最后结果为:

i) $\hat{a}_{k0}$已恢复为吸收算符,纯粹横光子的状态满足洛伦兹条件;

ii) $\hat{A}_4$ 已变成厄米算符,但它在物理态中的期望值为虚数;

iii) $\hat{A}_\mu(x)(\mu=1,2,3,4)$的展式可统一地用(3.1.37)或(3.1.38)式表示,吸收算符和发射算符的对易关系统一地用(3.1.34)式;

iv) 在浸渐移引的理论方案下(参见§3.3节),只需取初态中纵光子数和标光子数为零,即可保证以后任何时刻洛伦兹条件皆能满足.由于态矢量中纵光子和标光子部分对归一化无贡献,故在计算 $S$ 算符的矩阵元时,末态亦只需取含横光子的态.

在解决了电磁场的协变量子化后,我们可以回到协变的量子电动力学的联立方程组.在海森伯图象中,任何一个场算符 $\hat{\chi}$(包括电子场 $\hat{\psi}$和电磁场 $\hat{A}_\mu$)的运动方程都将由

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial t} = [\hat{\chi},\hat{H}], \tag{3.1.39}$$

给出,其中哈密顿量由三部分组成:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{rad}}(t) + \hat{H}_{\text{el}}(t) + \hat{H}_{\text{int}}(t), \tag{3.1.40}$$

分别代表电磁场、电子场和相互作用三个分项,其中 $\hat{H}_{\text{rad}}(t)$和 $\hat{H}_{\text{el}}(t)$与自由场的哈密顿量形式一样,只是现在它确已变得与 $t$ 有关(当用相应的粒子数算符 $\hat{n}$来表示时,$\hat{n}$必须写成 $\hat{n}(t)$),$\hat{H}_{\text{int}}(t)$由下式表示

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \frac{e}{c}\int\hat{j}_\mu(x)\hat{A}_\mu(x)d^3x = ie\text{N}\int\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)d^3x, \tag{3.1.41}$$

其中N代表取正规乘积,它实际上只对电子场起作用,因其中并不出现光子算符的乘积.如前所述,$\mu=1,2,3,4$.在不定度规下,四个 $\hat{A}_\mu$ 算符都是厄米算符,如果把 $\hat{\bar{\psi}}(x)$,$\hat{\psi}(x)$及 $\hat{A}_\mu(x)$的展开式(2.5.7)和(3.1.38)代入 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$中,并为简明

计，用 $r$ 代替电子的指标$(\boldsymbol{p},s)$、用 $f$ 代替光子的指标$(\boldsymbol{k},l)$，结果即为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}}(t) = \mathrm{i}\sum_{rr'f}\hbar[&g_{rr'f}\hat{\alpha}_r^\dagger(t)\hat{\alpha}_{r'}(t)(\hat{a}_f(t)\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}} + \hat{a}_f^\dagger(t)\delta_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'})\\ &- g_{rr'f}\hat{\beta}_r^\dagger(t)\hat{\beta}_{r'}(t)(\hat{a}_f(t)\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}} + \hat{a}_f^\dagger(t)\delta_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'})\\ &+ \bar{g}_{rr'f}\hat{\alpha}_r^\dagger(t)\hat{\beta}_{r'}^\dagger(t)(\hat{a}_f(t)\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}',\hbar\boldsymbol{k}} + \hat{a}_f^\dagger(t)\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k},0})\\ &- \bar{g}_{rr'f}\hat{\alpha}_r(t)\hat{\beta}_{r'}(t)(\hat{a}_f(t)\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k},0} + \hat{a}_f^\dagger(t)\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}',\hbar\boldsymbol{k}})],\end{aligned}\tag{3.1.42}$$

其中 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 为电子和正电子的湮没算符 $\hat{a}$ 为光子的吸收算符，$g_{rr'f}$ 和 $\bar{g}_{rr'f}$ 将称作耦合系数，其量纲与频率相同，表达式为

$$g_{rr'f} = e\sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar kV}}\bar{u}_r\gamma_\mu e_\mu^f u_{r'} = e\sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar kV}}\bar{v}_{r'}\gamma_\mu e_\mu^f v_{r'},\tag{3.1.43a}$$

$$\bar{g}_{rr'f} = e\sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar kV}}\bar{u}_r\gamma_\mu e_\mu^f v_{r'} = e\sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar kV}}\bar{v}_{r'}\gamma_\mu e_\mu^f u_r,\tag{3.1.43b}$$

$e_\mu^f$ 为 $e_\mu^{(l)}(\boldsymbol{k})$ 的简写，都取为实矢量. (3.1.42)式右方第一项代表电子从 $r'$ 态跃迁到 $r$ 态同时吸收或放出一个 $f$ 态光子，第二项代表正电子从 $r'$ 态跃迁到 $r$ 态同时吸收或放出一个 $f$ 态光子，第三项代表“生成一对正负电子”并吸收或放出一个 $f$ 态光子，第四项代表一对正负电子湮没并吸收或放出一个 $f$ 态光子. 从(3.1.43a)第一等式可见，第一项的系数等于相对论量子力学中电子在光子势作用下从 $r'$ 态到 $r$ 态的跃迁矩阵元(对空间的积分已积出)；而从(3.1.43a)第二等式可见. 正电子跃迁的耦合系数与相对论量子力学中负能级之间的跃迁矩阵元相联系，但初末态的位置发生了颠倒(其意义将在后文中说明). 第三、四项正负电子对的产生和湮没的耦合系数则对应于相对论量子力学中正、负能级间的跃迁矩阵元.

在上述各项跃迁中，动量是守恒的，如 $\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}}$ 等符号所显示. 这是因为作用遍及了整个空间. 能量则不一定守恒，因为作用是瞬时的. 只有在研究从 $t$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个过程时才有能量守恒(参见§3.5节).

将流密度 $\hat{j}_\mu$ 满足的连续性方程对空间积分，在归一化的空域足够大而且其表面 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 为零的情况下，即得 $\hat{n}_T(t) \equiv \int\hat{\rho}(t)\mathrm{d}^3x$ 为一守恒量(即 $\hat{n}_T$ 实际与 $t$ 无关)，其中 $\hat{\rho} = \frac{1}{\mathrm{i}c}\hat{j}_4$. 将 $\hat{\psi}$ 和 $\hat{\psi}^\dagger$ 的展式代入 $\hat{j}_4$ 后即得出

$$\hat{n}_T = \sum_{ps}[\hat{n}_{ps}^{(+)}(t) - \hat{n}_{ps}^{(-)}(t)].\tag{3.1.44}$$

上式中 $\hat{n}_{ps}^{(+)}$ 和 $\hat{n}_{ps}^{(-)}$ 分别为§2.5中所定义的电子和正电子数算符. $\hat{n}_T$ 为常数表明，尽管在有相互作用时电子数和正电子数分别不守恒(由于正反电子对的产生或湮没)，但它们的差却是守恒的. $-e\hat{n}_T$ 的意义就是电荷算符，$\hat{n}_T$ 在这里也代表费

米子数算符.在电子与电磁场的作用中,费米子守恒等价于电荷守恒,但在一般情况它们是互相独立的守恒律.例如中子作 $\beta$ 衰变时,电荷守恒表现为电子电荷与质子电荷数值要完全相等(符号相反),而费米子守恒则表现为衰变产物中还要有一个反中微子.

**3. 非相对论情况　库仑规范下的基本方程组**

原子中电子的速度一般比光速小得多,因此在处理原子与光相互作用时,常可作非相对论近似(但对重原子核的内层电子,相对论修正是重要的).这时不必采用协变规范,采用库仑规范更为方便,连不定度规也不需引入.

在一级近似中,我们可以用泡利方程来代替狄拉克方程,而且对于光波中的磁场来说,在非相对论情况下自旋磁矩与磁场的作用项$\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$是一个小量(它与$\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}$相比,量级为$\frac{1}{2}ka$,其中 $a$ 为原子半径,因而亦等于$\frac{1}{2}\frac{v}{c}$),在许多情况下可以略去[但亦非总可以略去,例如在磁偶极辐射中(电偶极辐射被禁戒的情况),它具有重要作用].

在库仑规范下,原子与光场的总哈密顿量为

$$\hat{H}=\hat{H}_{\text{rad}}(t)+\hat{H}_{\text{at}}(t)+\hat{H}_{\text{int}}(t),\tag{3.1.45}$$

其中 $\hat{H}_{\text{rad}}$只含横光子的贡献.用 $\hat{n}_{ks}$表示$(\boldsymbol{k},s)$模的光子数,即有

$$\hat{H}_{\text{rad}}(t)=\sum_{\boldsymbol{k},s}\left[\hat{n}_{\boldsymbol{k}s}(t)+\frac{1}{2}\right]\hbar\omega,\quad s=1,2.\tag{3.1.46}$$

$\hat{H}_{\text{at}}$为原子中电子的哈密顿量,其中包括电子与核库仑场(看作是一种外场)的作用以及电子-电子之间的瞬时库仑作用(参见§1.2中关于库仑规范的介绍).当原子处于强外磁场中时,电子自旋磁矩与外磁场的作用项也可归入 $\hat{H}_{\text{at}}$中.如果电子-电子之间的库仑作用可用某种自洽势来近似表示,那么原子中电子定态波函数$\phi_{ld}(\boldsymbol{x})$将由下述方程确定:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{x})\right)\phi_{ld}(\boldsymbol{x})=E_l\phi_{ld}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $d$ 代表除能级 $l$ 以外的其他量子数集合,$V(\boldsymbol{x})$代表电子所经受的外场势和电子之间自洽势的和.这时我们可将电子场算符 $\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)$按 $\phi_{ld}(\boldsymbol{x})$来展开

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ld}\hat{\alpha}_{ld}(t)\phi_{ld}(\boldsymbol{x}),\tag{3.1.47}$$

$\hat{\alpha}_{ld}$代表吸收一个能量为$E_l$,其他量子数为 $d$ 的电子的算符.而 $\hat{H}_{\text{at}}(t)$可以表示为

$$\hat{H}_{\text{at}}(t)=\int\hat{\phi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{x})\right)\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x=\sum_{ld}E_l\hat{\alpha}^\dagger_{ld}(t)\hat{\alpha}_{ld}(t).\tag{3.1.48a}$$

相互作用项 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$代表电子场与横电磁场的作用，在略去电子自旋磁矩与光场中磁场的作用项后它的表达式即为

$$\hat{H}_{\text{int}}(t)=-\frac{\mathrm{i}\hbar e}{mc}\int\hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\left[\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla+\frac{\mathrm{i}e}{2\hbar c}\hat{A}^{2}(\boldsymbol{x},t)\right]\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^{3}x. \tag{3.1.48b}$$

此式可从(2.4.7)式右方第一项得出，为该项展开的后两项所贡献(展开的第一项与 $qA_0$ 项已含于 $\hat{H}_{\text{at}}$中).将(3.1.47)式及 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)$的展式(1.3.29)式代入后，即将 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$化为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}}(t)=&\mathrm{i}\hbar\sum_{rr'f}\hat{\alpha}_{r}^{\dagger}(t)\hat{\alpha}_{r'}(t)\left[g_{rr'f}\hat{a}_{f}(t)-g_{r'rf}^{*}\hat{a}_{f}^{\dagger}(t)\right]\\&+\mathrm{i}\hbar\sum_{rr'ff'}\hat{\alpha}_{r}^{\dagger}(t)\hat{\alpha}_{r'}(t)\left[G_{rr'ff'}\hat{a}_{f}(t)\hat{a}_{f'}(t)-G_{r'rff'}^{*}\hat{a}_{f}^{\dagger}(t)\hat{a}_{f'}^{\dagger}(t)\right]\\&+\mathrm{i}\hbar\sum_{rr'ff'}\hat{\alpha}_{r}^{\dagger}(t)\hat{\alpha}_{r'}(t)F_{rr'ff'}\left[\hat{a}_{f}(t)\hat{a}_{f'}^{\dagger}(t)+\hat{a}_{f'}^{\dagger}(t)\hat{a}_{f}(t)\right],\end{aligned} \tag{3.1.49}$$

其中 $r$ 和$r'$代表$(l,d)$和$(l',d')$，$f$ 和$f'$代表$(\boldsymbol{k}s)$和$(\boldsymbol{k}'s')$，

$$g_{rr'f}=\frac{-e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi_{ld}^{\dagger}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\nabla)\phi_{l'd'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^{3}x,$$

$$G_{rr'ff'}=-\frac{\mathrm{i}\pi e^{2}}{mcV\sqrt{kk'}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\boldsymbol{e}_{k's'})\phi_{ld}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\phi_{l'd'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^{3}x,$$

$$F_{rr'ff'}=-\frac{\mathrm{i}\pi e^{2}}{mcV\sqrt{kk'}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\boldsymbol{e}_{k's'})\phi_{ld}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\phi_{l'd'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^{3}x, \tag{3.1.50}$$

$\boldsymbol{e}_{ks}$为横偏振实矢量. $g_{rr'f}$, $G_{rr'ff'}$和 $F_{rr'ff'}$ 都具有频率的量纲.

(3.1.49)式右方第一项代表电子从 $r'$态跃迁到$r$ 态同时吸收或放出一个$f$ 态光子，第二项代表电子从 $r'$态跃迁到$r$ 态同时吸收或放出两个光子，第三项与第二项的差别是一个光子被吸收另一个光子则是被放出.第二、三项通常称作双光子作用项，关于它的本源我们将在§4.5 节中阐述.各项前的系数，相当于量子力学中电子在一个或两个光子势作用下的跃迁矩阵元.

我们也常把 $g$ 称为原子与单个光子的有效耦合常数，它与$\sqrt{V}$成反比的原因是，光子是在归一化体积 $V$ 中的电磁场的量子，它的能量为 $\hbar\omega$，因而 $V$ 愈大，电磁场的能量密度$\left(\frac{\hbar\omega}{V}\right)$愈小. 相应的场强正比于$\sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}}$. 这就导致 $g$ 中出现因子$\frac{1}{\sqrt{V}}$. 同样，$G$ 与$F$ 称为原子与双光子的有效耦合常数，它们与 $V$ 成反比，因为作用涉及两个光子.

## §3.2 作用图象和演化算符的微扰展开

在量子理论中,除了海森伯图象和薛定谔图象以外,还有一种介于两者之间的图象,称为作用图象.在处理跃迁问题时,采用这种图象更为适宜.演化算符 $\hat{U}(t,t_0)$就是作用图象中用以描述态矢量从 $t_0$ 到 $t$ 演化的算符.它在浸渐移引下的极限即为 $S$ 算符(或称 $S$ 矩阵,参见§3.3节).戴逊就是通过这一途径建立了费曼图形理论与量子场论之间的联系,从而把费曼的带有直觉性的理论置于量子场论的基础之上.在本节中我们将先介绍作用图象,然后对演化算符进行讨论.

### 1. 作用图象

在量子力学处理跃迁问题时,实际用的就是作用图象.本小节中我们先来对量子力学中作用图象的引入作一些阐释,然后转用到量子场论上来.

对于跃迁问题,通常将哈密顿量分成两个部分,第一部分是基本的哈密顿量 $\hat{H}_0$,另一部分是引起跃迁的微扰项,记作 $\hat{V}$,即

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}. \tag{3.2.1}$$

我们先从薛定谔图象出发,并用上标(S)来标志此图象中的算符和波函数.设 $\hat{H}_0^{(S)}$ 和其他一些力学量 $\hat{L}^{(S)}$(如角动量、宇称等)构成完备集合,它们的共同本征态记为 $\phi_{nq}(\boldsymbol{x})$,相应的本征值为 $E_n^{(0)}$ 和 $L_g$.

当 $\hat{V}^{(S)}$不存在时,$\phi_{nq}(\boldsymbol{x})$为定态,而当 $\hat{V}^{(S)}$存在时,$\phi_{nq}(\boldsymbol{x})$不再为定态.我们要考察的跃迁就是指从初始时的 $\phi_{nq}(\boldsymbol{x})$到其他 $\phi_{n'q'}(\boldsymbol{x})$的变动.由于 $\phi_{nq}(\boldsymbol{x})$构成完备集,故任意的 $\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)$可按 $\phi_{nq}(\boldsymbol{x})$展开:

$$\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{nq}\beta_{nq}(t)\phi_{nq}(\boldsymbol{x}). \tag{3.2.2}$$

在薛定谔图象中,$\beta_{nq}(t)$满足下述运动方程:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_{nq}(t)=\sum_{n'q'}H_{nq,n'q'}\beta_{n'q'}(t), \tag{3.2.3}$$

其中

$$H_{nq,n'q'}=\int\phi_{nq}^*(\boldsymbol{x})\hat{H}^{(S)}\phi_{n'q'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x. \tag{3.2.4}$$

从(3.2.2)式可以看出,$\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)$随时间的变化体现在 $\beta_{nq}$为 $t$ 的函数上.但是 $\beta_{nq}$随 $t$ 而改变并不一定意味着有跃迁,因为即使 $\hat{V}^{(S)}=0$,$\beta_{nq}$也是 $t$ 的函数并可表示为 $\beta_{nq}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}$.为了更明显地表示跃迁,我们把展式改写成,

$$\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{nq}b_{nq}(t)\phi_{nq}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t},\tag{3.2.5}$$

这样,当 $\hat{V}^{(S)}=0$ 时,$b_{nq}$将不随 $t$ 变化.从而 $b_{nq}$ 随 $t$ 的变化就直接表示有跃迁发生.

不难求出 $b_{nq}(t)$所满足的方程:将(3.2.5)式代入薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)=(\hat{H}_0^{(S)}+\hat{V}^{(S)})\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t),\tag{3.2.6}$$

中,即得

$$\mathrm{i}\hbar\sum_{nq}\frac{\mathrm{d}b_{nq}(t)}{\mathrm{d}t}\phi_{nq}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}+\sum_{nq}E_n^{(0)}b_{nq}(t)\phi_{nq}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}$$
$$=\sum_{nq}(E_n^{(0)}+\hat{V}^{(S)})b_{nq}(t)\phi_{nq}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}.$$

将上式中左右方相同的项消去,并将求和指标换成 $n',q'$,然后乘以 $\phi_{nq}^*(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}$ 并对 $\boldsymbol{x}$ 积分,即得出所要求的方程:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b_{nq}(t)=\sum_{n'q'}V_{nq,n'q'}^{(I)}(t)b_{n'q'}(t),\tag{3.2.7}$$

其中

$$V_{nq,n'q'}^{(I)}(t)=\int\phi_{nq}^*(\boldsymbol{x})\hat{V}^{(S)}\phi_{n'q'}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_n^{(0)}-E_{n'}^{(0)})t}\mathrm{d}^3x=V_{nq,n'q'}^{(S)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_n^{(0)}-E_{n'}^{(0)})t}.\tag{3.2.8}$$

(3.2.7)式与(3.2.3)式的差别在于,在(3.2.7)式右方只含 $\hat{V}^{(S)}$ 的矩阵元[参见(3.2.8)式],因此 $b_{nq}(t)$的变化就完全是由 $\hat{V}^{(S)}$ 所引起的.

以上引入的 $\beta_{nq}(t)$实际上是薛定谔图象中$(\hat{H}_0,\hat{L})$表象的波函数,而 $b_{nq}(t)$ 则是作用图象中$(\hat{H}_0,\hat{L})$表象的波函数.(3.2.8)式内的 $V_{nq,n'q'}^{(S)}$ 和 $V_{nq,n'q'}^{(I)}(t)$分别代表两个图象中$(\hat{H}_0,\hat{L})$表象的微扰算符.我们看到,这两种图象中波函数相差的是因子 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}$,而微扰算符相差的是因子 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_n^{(0)}-E_{n'}^{(0)})t}$.这使得作用图象中的微扰算符也是随 $t$ 变化的.

我们再来考察作用图象中 $\boldsymbol{x}$ 表象的波函数 $\phi^{(I)}(\boldsymbol{x},t)$与 $\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)$之间的关系,由

$$\phi^{(I)}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{nq}b_{nq}(t)\phi_{nq}(\boldsymbol{x})=\sum_{nq}\beta_{nq}(t)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^{(0)}t}\phi_{nq}(\boldsymbol{x}).$$

即得

$$\phi^{(I)}(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0^{(S)}t}\sum_{nq}\beta_{nq}(t)\phi_{nq}(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0^{(S)}t}\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t).\tag{3.2.9}$$

在上式最后一步中利用了(3.2.2)式.(3.2.9)式表明 $\phi^{(I)}$ 与 $\phi^{(S)}$之间的变换为一

幺正变换.与一般变换不同的是,在这里是一个与 $t$ 有关的幺正变换,变换算符即为 $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0^{(S)}t}$,它的作用就是消去 $\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)$中由于 $\hat{H}_0^{(S)}$ 所引起的随时间变化.

在波函数作变换(3.2.9)的同时,算符也要作相应的变换:$\hat{O}^{(S)}\to\hat{O}^{(I)}$,两者关系为

$$\hat{O}^{(I)}=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0^{(S)}t}\hat{O}^{(S)}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0^{(S)}t}. \tag{3.2.10}$$

这样,作用图象中的算符一般也将随时间变化,除非 $\hat{O}^{(S)}$ 与 $\hat{H}_0^{(S)}$ 对易.显然 $\hat{H}_0^{(I)}$ 就是一个不随 $t$ 变化的算符,从(3.2.10)式不难得出

$$\hat{H}_0^{(I)}=\hat{H}_0^{(S)}. \tag{3.2.11}$$

故此,对于 $\hat{H}_0$ 不必加上标号($I$)和($S$),从(3.2.10)式还可导出 $\hat{O}^{(I)}$满足的方程:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{O}^{(I)}(t)=-\hat{H}_0e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}\hat{O}^{(S)}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}+e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}\hat{O}^{(S)}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}\hat{H}_0=[\hat{O}^{(I)}(t),\hat{H}_0]. \tag{3.2.12}$$

另外,通过将 $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}$和 $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}$分别左乘和右乘到$[\hat{q}_j^{(S)},\ \hat{p}_k^{(S)}]=i\hbar\delta_{jk}$两侧,还可得出作用图象中的等时正则对易子的形式不变:

$$[\hat{q}_j^{(I)}(t),\hat{p}_k^{(I)}(t)]=i\hbar\delta_{jk}. \tag{3.2.13}$$

利用(3.2.13)式对(3.2.12)式右方进行计算,即可得出:作用图象中算符的运动方程的具体形式与无微扰时的海森伯图象中的方程完全相同.

按照(3.2.10)式作用图象中的微扰算符为

$$\hat{V}^{(I)}(t)=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}\hat{V}^{(S)}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t}. \tag{3.2.14}$$

转到$(\hat{H}_0,\hat{L})$表象后,结果与(3.2.8)式一致.

作用图象中波函数 $\phi^{(I)}(\boldsymbol{x},t)$满足的方程也可通过 $\phi^{(S)}(\boldsymbol{x},t)$满足的薛定谔的方程由(3.2.9)式得出,其结果为

$$i\hbar\frac{d}{dt}\phi^{(I)}(\boldsymbol{x},t)=\hat{V}^{(I)}(t)\phi^{(I)}(\boldsymbol{x},t). \tag{3.2.15}$$

转到$(\hat{H}_0,\hat{L})$表象后结果与(3.2.7)式一致.

通过以上讨论,我们看到作用图象是介于海森伯图象与薛定谔图象中间的一种图象.它把哈密顿量分成两部分,$\hat{H}_0$ 和 $\hat{V}^{(S)}$,它们分别决定算符和波函数的变化.

上面的结果可以直接转到量子场论中来.这时 $\hat{H}_0$ 取作 $\hat{H}_{el}+\hat{H}_{rad}$(在非相对论情况即为 $\hat{H}_{at}+\hat{H}_{rad}$),$\hat{V}$取作相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{int}$.于是电子和光子的吸收算符将像海森伯图象中自由场算符一样地变化,即

$$\hat{\alpha}_{ps}^{(I)}(t)=\hat{\alpha}_{ps}e^{-iEt/\hbar},\quad \hat{a}_{kl}^{(I)}(t)=\hat{a}_{kl}e^{-i\omega t}, \tag{3.2.16}$$

从而 $\hat{\psi}^{(I)}(\boldsymbol{x},t)$和 $\hat{\psi}^{(I)\dagger}(\boldsymbol{x},t)$的展式仍将与(2.5.9)式一样,光场算符 $\hat{A}_{\mu}^{(I)}(\boldsymbol{x},t)$也仍像(3.1.37)式那样展开.

作用图象中的态矢量$|t\rangle^{I}$满足的方程则为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|t\rangle^{(I)}=\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t)|t\rangle^{(I)}. \tag{3.2.17}$$

**2. 演化算符和它的微扰展开**

作用图象中任意 $t$ 时间的状态与初态间的关系可用演化算符来表示

$$|t\rangle^{(I)}=\hat{U}(t,t_0)|t_0\rangle^{(I)}. \tag{3.2.18}$$

$\hat{U}$满足初条件

$$\hat{U}(t_0,t_0)=1. \tag{3.2.19}$$

为了确定 $\hat{U}(t,t_0)$需要找出它所满足的方程,我们将(3.2.18)式代入(3.2.17)式中,得出的结果即为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t,t_0)}{\mathrm{d}t}|t_0\rangle^{(I)}=\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,t_0)|t_0\rangle^{(I)}.$$

由于上式对任何初态$|t_0\rangle^{(I)}$都成立,故得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t,t_0)=\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,t_0). \tag{3.2.20}$$

这就是我们所要求的演化算符所满足的方程.

下面来证明 $\hat{U}(t,t_0)$是幺正算符.对(3.2.20)式取厄米共轭:

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)=\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t),$$

利用上式和(3.2.20)就导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{U}^{\dagger}(t,t_0),\hat{U}(t,t_0)]=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\right]\hat{U}(t,t_0)+\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t,t_0)\right]=0.$$

从而 $\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\hat{U}(t,t_0)$与 $t$ 无.再由(3.2.19)式即得出

$$\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\hat{U}(t,t_0)=1. \tag{3.2.21}$$

这表明 $\hat{U}(t,t_0)$为幺正算符,$|t\rangle^{(I)}$与$|t_0\rangle^{(I)}$通过幺正变换而互相联系.

根据定义,演化算符具有下列性质:

$$\hat{U}(t',t)\hat{U}(t,t_0)=\hat{U}(t',t_0). \tag{3.2.22}$$

如令上式中 $t'=0$,即得出 $\hat{U}(t_0,t)$与 $\hat{U}(t,t_0)$互逆:

$$\hat{U}(t_0,t)=\hat{U}^{-1}(t,t_0). \tag{3.2.23}$$

再由(3.2.21)式,$\hat{U}(t_0,t)$与 $\hat{U}(t,t_0)$互为共轭,即 $\hat{U}(t_0,t)=\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)$.

量子理论的任务是求解方程(3.2.20).但严格求解是极其困难的.我们只能考虑近似解法.由于电磁作用属于弱耦合,无量纲的耦合强度$\frac{e^2}{\hbar c}$只有$\frac{1}{137}$,采用微扰论是适用的一种处理途径.为此我们先把微分方程(3.2.20)转化为积分方程,再通过迭代来求逐步近似解.

将(5.2.20)式两侧从 $t_0$ 到 $t$ 积分,再利用 $\hat{U}(t_0,t_0)=1$,即得出积分方程

$$\hat{U}(t,t_0)=1+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t')\hat{U}(t',t_0)\mathrm{d}t'. \tag{3.2.24}$$

这样,将 $n$ 级近似解代入上式右方,就可求出$(n+1)$级近似解.零级解为 1.由此得出 $\hat{U}(t,t_0)$的一个微扰展开式

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t,t_0)&=\sum_{n=0}^{\infty}U^{(n)}(t,t_0),\\
\hat{U}^{(0)}(t,t_0)&=1,\\
\hat{U}^{(1)}(t,t_0)&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t_1)\mathrm{d}t_1,\\
\hat{U}^{(2)}(t,t_0)&=\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t_2),\\
&\cdots\cdots\\
\hat{U}^{(n)}(t,t_0)&=\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^n}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t_2)\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t_n).
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

在本课中计算跃迁概率时,将只用一级解和二级解.$\hat{U}^{(1)}$用于一次跃迁过程如光子的吸收和辐射,$\hat{U}^{(2)}$用于二级过程如光子-电子散射或电子-电子散射.

为了将(3.2.25)式表示成对所有积分变量 $t_j$ 较为对称的形式,我们引入含时场算符乘积的"时间编序".其操作是通过相邻算符的位置对换,把时间较早的算符移到所有比它晚的算符的右边.当进行对换的是两个旋量场算符时,不论是两个$\hat{\psi}$、两个 $\hat{\psi}^\dagger$ 还是一个 $\hat{\psi}$和一个 $\hat{\psi}^\dagger$,都加且只加一个负号,规则与前面作"正规编序"时一样.时间编序符号用 T 表示.另为书写简单计,在本章后文和下章中我们都略去作用图象中场算符的上标$(I)$.

当两个场算符时间相同时如何处理? 如果这两个算符都是光子算符 $\hat{A}_\mu(x)$,或者一个光子算符 $\hat{A}_\mu(x)$一个电子算符($\hat{\psi}$或 $\hat{\psi}^\dagger$),那么无论将哪个放在左边都一样,因为它们本来就是可对易的.若两个算符都是 $\hat{\psi}$,或两个算符都是 $\hat{\psi}^\dagger$,无论怎样安排它们两个的顺序,结果也是一样,因为两者本来就是反对易的.只当一个是

$\hat{\psi}$另一个是 $\hat{\psi}^\dagger$ 时安排不同的顺序结果才有差异. 现在规定的法则是:两种顺序各取一半,即

$$\mathrm{T}\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t) = \frac{1}{2}[\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t) - \hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x},t)],$$

$$\mathrm{T}\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}',t) = \frac{1}{2}[\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}',t) - \hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}',t)\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x},t)].$$

(3.2.26)

根据以上定义,在时间编序号内,两个光子算符总是可对易的(因编时操作使得对易后的结果与对易前的一样)光子算符与电子算符也是可对易的,两个电子算符则是可反对易的,即

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}[\hat{A}_\mu(\boldsymbol{x},t),\hat{A}_\nu(\boldsymbol{x}',t')] = \mathrm{T}[\hat{A}_\nu(\boldsymbol{x}',t')\hat{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)],\\ &\mathrm{T}[\hat{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}',t')] = \mathrm{T}[\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}',t')\hat{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)],\\ &\mathrm{T}[\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t')] = -\mathrm{T}[\hat{\psi}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t')\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x},t)],\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

值得特别说明的是,算符 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t) = \frac{e}{c}\int \hat{j}_\mu(\boldsymbol{x},t)\hat{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x$ 在时间编序下的性质(其中 $\hat{j}_\mu$ 和 $\hat{A}_\mu$ 皆为作用图象中算符,下同). 有两点需要指出:1) $\hat{j}_\mu(\boldsymbol{x},t)$按(2.5.23)的定义等于 $\mathrm{i}c\mathrm{N}[\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t)\gamma_\mu\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)]$,但根据(3.2.26)式,可以证明它也能写成 $\mathrm{i}.c\mathrm{T}[\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t)\gamma_\mu\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)]$,这样 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}$ 在加上时间编序时将保持不变,2) $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$中含有两个电子场算符 $\hat{\bar{\psi}}$和 $\hat{\psi}$,因此将两个 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}$ 作整体对换时,不出现负号,于是

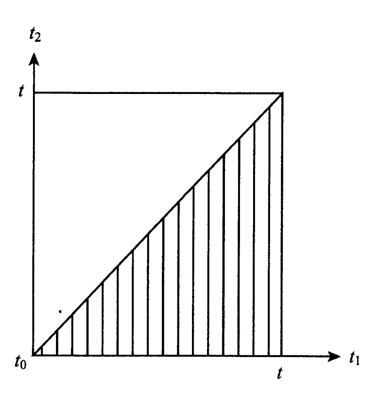


图 3.2.1　(3.2.29)式的积分域

$$\mathrm{T}[\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t')] = \begin{cases}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t'), & 当\ t > t',\\ \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t')\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t), & 当\ t' > t.\end{cases} \tag{3.2.28}$$

为了下一节中约化 $S$ 算符的需要,我们利用时间编序操作把演化算符写成较为对称的形式. 首先来看 $\hat{U}^{(2)}(t,t_0)$中的双重积分项

$$\hat{I} = \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1)\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2). \tag{3.2.29}$$

它的积分域如图 3.2.1 中带竖线的三角形. 上式中的乘积 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1)\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2)$是合乎时间编序的.

将上式中积分变量 $t_1$ 与 $t_2$ 互换，即有

$$\hat{I} = \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2) \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1),$$

在这一表示式中，积分区域即为图 3.2.1 中空白的三角形，于是 $\hat{I}$ 又可表示成上两式之和的一半，即

$$\hat{I} = \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1) \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2) \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1)\right].$$

假如 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1)$ 与 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1)$ 是可对易的，那么上式就化成

$$\hat{I} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1) \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2),$$

积分区域就变成了方形. 但是，实际上 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1)$ 与 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$ 不可对易，故上式并不成立.

前面已经指出(3.2.29)式右方的乘积本来就合乎时间编序，因此将它加上编时符号 T 并不发生任何影响. 而在编时符号内，$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}$ 就像光子场算符一样变成可对易的. 这样再重复上面的步骤就得出

$$\hat{I} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \mathrm{T}[\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1) \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_2)], \tag{3.2.30}$$

它与上面那个不正确的式子的差别就在于增加了一个时间编序符号 T.

尽管在本课中我们只用到 $\hat{U}^{(2)}(t, t_0)$，但也顺带写出一般项($n \geqslant 1$)的结果

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1) \cdots \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_n) \\ &= \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_n \mathrm{T}[\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1) \cdots \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_n)]. \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

利用此式可将 $\hat{U}(t, t_0)$ 的展式改写成

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_n \mathrm{T}[\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_1) \cdots \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_n)]. \tag{3.2.32}$$

编时符号可提到求和号前面，于是上式又可表示为

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathrm{T}e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t')dt'}. \tag{3.2.33}$$

(3.2.33)式也可通过另外的方式更简便地推出. 首先，$\hat{U}(t, t_0)$ 可以表示为

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_n)\hat{U}(t_n, t_{n-1}) \cdots \hat{U}(t_2, t_1)\hat{U}(t_1, t_0) \tag{3.2.34}$$

其中

$$t_j = t_0 + j\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t - t_0}{n + 1}.$$

在 $n$ 取得很大,从而 $\Delta t$ 很小的情况下,

$$\hat{U}(t_{j+1}, t_j) \approx 1 + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_j)\Delta t \approx \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_j)\Delta t}, \tag{3.2.35}$$

将它代入(3.2.34)式,并令 $n \to \infty$.这时近似等式即变成等式,即有

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_n)\Delta t} \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_{n-1})\Delta t} \times \cdots \times \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_0)\Delta t}. \tag{3.2.36}$$

由于上式右方实际上是时间编序的,我们可在前面加上时间编序.而在时间编序号下,$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_j)$与 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_k)$是对易的,于是即得

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{T}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\Delta t\sum_{j=0}^{n}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t_j)} = \mathrm{T}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t')\mathrm{d}t'},$$

与(3.2.33)式一致.

以上处理看起来只是形式上的变换,并无实质性进展,但在下文中通过将编时乘积约化成一系列正规乘积的和,即可系统地求出各级微扰论结果的表达式.每项结果并可通过图形表示出来,既直观又大大地简化了计算工作.这种图形就是通常所谓的费曼图.

## §3.3　S 算符(S 矩阵)和它的约化

量子电动力学中一类重要的问题,就是电磁相互作用引起的系统状态的跃迁,包括光子的吸收和辐射,光子与自由电子(或原子)的散射,电子与电子的散射,轫致辐射,正负电子对的产生和湮没等.这些过程的跃迁率或散射截面(反应截面)都可统一地用 $S$ 算符(又称散射算符,$S$ 矩阵或散射矩阵)来处理.$S$ 算符是指演化算符 $\hat{U}(t_f, t_0)$在 $t_0 \to -\infty$, $t_f \to +\infty$时的极限.因为只有取此极限才有初末态间的能量守恒.下面将光介绍 $S$ 算符的具体定义,然后对它的约化问题进行说明并作准备性的讨论(本节中的场算符都指作用图象中的算符.上标$(I)$仍皆略去)

### 1. 浸渐移引与 $S$ 算符

为了使反应过程(或散射过程)有一个简明的描述,使演化算符在 $t \to \pm\infty$时有确定的极限,戴逊引用了“浸渐移引”的处理方案.下面我们先以量子力学中两个粒子的散射过程为例,对浸渐移引的概念进行说明.

在量子力学中,两个粒子之间的作用是通过它们之间的作用势来实现的.在散射发生之前和发生之后,实际的情况是两个粒子的波函数为互相远离的波包(距离比力程远得多),它们都作自由运动.在实验上,具有“一定动量”的粒子也是一个尺

度比其波长大得多的大波包,并非真是充满无穷空间的平面波.但对这种具有波包形状的初末态的数学处理比较复杂.如果我们将哈密顿量中的作用项 $\hat{H}_{\text{int}}$ 乘上一个浸渐变化的因子 $e^{-\varepsilon|t|}$,其中 $\varepsilon$ 为一个正无穷小的量(在计算完毕后可令它趋于零),那么在遥远的过去和未来(即 $|t| \gg \frac{1}{\varepsilon}$)哈密顿量就只有自由的哈密顿量,两个粒子的波函数即使重叠也互不作用.这样,动量"一定"的粒子就可以用充满无穷空间的理想平面波来描写,从而散射过程的处理将得到很大的简化.

将 $\hat{H}_{\text{int}}$ 乘上一个 $e^{-\varepsilon|t|}$ 的因子的作法,就称为对相互作用的浸渐移引,即缓慢地引入和移去,以避免在引入和移去时引起附加的跃迁(突然的引入和移去会产生某种瞬息效应.或者说其中含有高频率的成分,会引起跃迁).

在量子场论的情况,即使 $t = \pm\infty$ 时,状态为互相远离的波包,$\hat{H}_{\text{int}}$ 仍然在起作用,即产生所谓的虚跃迁.例如一个孤立的电子,它也可以放出一个光子[参见(3.1.42)式所表示的 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$],只是这种光子不可能最终地离开电子而去(因为能量守恒定律不能满足),它将在稍后某个时刻又被电子吸收,故又称作虚光子.换句话说,一个"自由"的(指不受外界作用的)的物理电子,并非一个裸电子,在它的周围可能存在一个或多个虚光子.这种虚光子云相当于经典电动力学中一个电子所携带自有场.这样,对一个自由的物理电子的状态进行描述也不容易,从而更加需要使用浸渐移引来描述.在浸渐移引的方案里,$t = \pm\infty$ 时的自由物理粒子都成为裸粒子,初态和末态都可用其态矢量来表示.同时 $S$ 算符可表示为

$$\hat{S} = \lim_{t_0 \to -\infty,\, t_f \to +\infty} \hat{U}(t_f, t_0) = \mathrm{T}\exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\mathrm{d}t\right],$$

其中 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$ 中带有浸渐因子 $e^{-\varepsilon|t|}$,由于这个因子,$\hat{U}(t_f, t_0)$ 在 $t_f \to +\infty$, $t_0 \to -\infty$ 时的极限是存在的.在 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$ 可表示成 $\mathscr{H}_{\text{int}}^{(I)}(\boldsymbol{x}, t)$ 体积分的情况下,如令 $\mathrm{d}^3 x\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\mathrm{d}^3 x\mathrm{d}x_0 \equiv \frac{1}{c}\mathrm{d}^4 x$,则上式可写成

$$\hat{S} = \mathrm{T}\exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_{\text{int}}^{(I)}(x)\mathrm{d}^4 x\right]. \tag{3.3.1}$$

当体系在 $t = -\infty$ 时的初态为 $|i\rangle$ 时,到 $t = +\infty$ 时的末态即为 $\hat{S}|i\rangle$,因此 $t = \infty$ 时从初态 $|i\rangle$ 跃迁到某个指定态 $|f\rangle$ 的概率幅即为 $\langle f|\hat{\eta}\hat{S}|i\rangle$[$\hat{\eta}$ 为不定度规算符.参见(3.1.17)式下文].

既然初末态都是自由的,其中电磁场部分可取为只含横光子的状态,于是引入不定度规对 $|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 都无影响,$\langle f|\hat{\eta}$ 就等于 $\langle f|$,从而有

$$\langle f|\hat{\eta}\hat{S}|i\rangle = \langle f|\hat{S}|i\rangle. \tag{3.3.2}$$

不定度规所起的作用,如前所述,只是使 $\hat{S}$ 中的 $\hat{A}_4$ 也成为厄米算符,而且满足

$[\hat{a}_{k4},\hat{a}^{\dagger}_{k'4}]=\delta_{kk'}$，$\langle f|\hat{S}|i\rangle$通常称为 S 矩阵元.

**2. S 算符的约化问题　两个场算符的缩并**

在本章下文和下章中我们都采用作用图象，如前所述场算符中上标$(I)$将略去不写. 下面先来说明什么是 S 算符的约化，以及为什么要将它约化.

我们来考虑一个具体例子，如电子与光子的散射过程. 设 $t=t_0$ 时的初态为 $|\boldsymbol{p},s;\boldsymbol{k},l\rangle$，要计算的是到 $t_f$ 时刻跃迁至某指定态 $|\boldsymbol{p},s';\boldsymbol{k}',l'\rangle$ 的概率幅. 按(3.2.34)和(3.2.35)式，$\hat{U}(t_f,t_0)$可表示为下述一系列算符的乘积，该乘积中的算符已是按时序排列的：

$$\hat{U}(t_f,t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\left[1+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}^{(I)}_{\mathrm{int}}(t_n)\Delta t\right]\left[1+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}^{(I)}_{\mathrm{int}}(t_{n-1})\Delta t\right]\cdots\left[1+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}^{(I)}_{\mathrm{int}}(t_0)\Delta t\right]. \tag{3.3.3}$$

当 $\hat{U}(t_f,t_0)$作用到 $t=t_0$ 时的初态 $|\boldsymbol{p},s;\boldsymbol{k},l\rangle$上时，各个算符$\left[1+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}^{(I)}_{int}(t_j)\Delta t\right]$即按时间先后顺序作用到 $|\boldsymbol{p},s;\boldsymbol{k},l\rangle$上面，这样会产生许多项. 我们所需要的，是到 $t=t_f$ 的末态中所含的"只有一个$(\boldsymbol{p}',s')$态电子，一个$(\boldsymbol{k}',l')$态光子"的项. 但是在整个过程的中间时刻，出现的可以有其他状态的电子和光子，甚至加上正负电子对和多个光子. 在取极限 $t_0\to-\infty$，$t_f\to\infty$后，对于初末态，能量是守恒的，但中间出现的态的能量并不一定等于初态的能量. 当某个中间态与初态能量相差 $\Delta E$ 时，该中间态只能存在某个有限的时段 $\Delta t\approx\frac{\hbar}{\Delta E}$，$\Delta E$ 愈大，其存在的时间 $\Delta t$ 就愈短暂. 因而通常把能量不等于初态能量的中间态称为虚中间态，所谓虚并不是说它不存在，而是说它不可能长久地存在，成为末态的一个成分. 从初态到这种虚中间态的跃迁也相应地称为虚跃迁.

由于存在上述虚跃迁过程，使 S 矩阵元的计算变得很复杂. 如果我们能把 S 算符化为一系列正规乘积①的和(其中的每项带有自己的系数)，那么计算从初态 $|\boldsymbol{p},s;\boldsymbol{k},l\rangle$到任意指定的末态 $|\boldsymbol{p}',s';\boldsymbol{k}',l'\rangle$的跃迁振幅就变得直截了当，因为在所化出的一系列正规乘积的和之中，只有一项即 $f(\boldsymbol{p}',s',\boldsymbol{k}',l';\boldsymbol{p},s,\boldsymbol{k},l)\hat{\alpha}^{\dagger}_{p's'}$，$\hat{a}^{\dagger}_{k'l'}$，$\hat{\alpha}_{ps}\hat{a}_{kl}$对我们所需的 S 矩阵元有贡献(见下文)，实际上该矩阵元就等于上述项的系数：

$$\langle\boldsymbol{p},s';\boldsymbol{k}',l'\mid\hat{S}\mid\boldsymbol{p},s;\boldsymbol{k}',l'\rangle=f(\boldsymbol{p}',s';\boldsymbol{k}',l';\boldsymbol{p},s,\boldsymbol{k},l). \tag{3.3.4}$$

理由如下：在正规乘积中，所有的吸收算符都在发射算符的右边，从而这些吸收算

① 这里的正规乘积是一个简称，实为"若干个算符的正规序的乘积"，参见(2.5.21)式上一段.

符将先于发射算符作用到初态$|i\rangle$上．当某项正规乘积含有($\hat{\alpha}_{ps}$, $\hat{a}_{k,l}$)之外的吸收算符时，刻正规乘积作用到$|i\rangle$上即等于零，从而对所求的$S$矩阵元无贡献．反过来当某项正规乘积不含$\hat{\alpha}_{ps}$, $\hat{a}_{kl}$中任何一个时，初态中的该粒子将无法消去，随后的发射算符又只能在该态中增加其他粒子于是最后投影到$|\boldsymbol{p}', s'; \boldsymbol{k}', l'\rangle$亦为零．以上讨论表明：只当该项正规乘积的吸收算符部分恰好等于$\hat{\alpha}_{ps}\hat{a}_{kl}$的正规乘积项时才可能消去初态中的粒子，同样，正规乘积中的发射算符部分也必须正好等于$\hat{\alpha}^{\dagger}_{p's'}$, $\hat{a}^{\dagger}_{k'l'}$，才会产生末态中的粒子，使矩阵元不为零．这就论证了(3.3.4)式．

对于其他过程，也可同样论证正规乘积的和中只有一项有贡献：该项中的吸收算符正好消去初态中的全部粒子使其成为真空态，而该项中的发射算符又随后在真空态上正好产生末态中的粒子．

$\hat{S}$算符本来是算符的编时乘积，见(3.2.32)式或(3.2.33)式．因此问题就变成如何把场算符的编时乘积(T 乘积)化成正规乘积(N 乘积)的和．这一过程就称为$\hat{S}$算符的约化．

在本节的剩下部分我们先来讨论两个作用图象中场算符$\hat{F}_1(x)$和$\hat{F}_2(x')$的T乘积与N乘积的差，即$\mathrm{T}[\hat{F}_1(x)\hat{F}_2(x')] - \mathrm{N}[\hat{F}_1(x)\hat{F}_2(x')]$，如前所述，我们已略去场算符上的$(I)$上标．$\mathrm{N}[\hat{F}_1(x)\hat{F}_2(x')]$的定义是先把$\hat{F}_1$和$\hat{F}_2$分成吸收部分和发射部分的和，乘开后再逐项进行正规编序①．我们将证明上述差值为一个$c$数，并称它为两个场算符的缩并，用$\underbrace{\hat{F}_1(x)\hat{F}_2}(x')$表示：

$$\underbrace{\hat{F}_1(x)\hat{F}_2}(x') = \mathrm{T}[\hat{F}_1(x)\hat{F}_2(x')] - \mathrm{N}[\hat{F}_1(x)\hat{F}_2(x')]. \tag{3.3.5}$$

当上述两个(作用图象中)场算符一个是电磁场算符一个是电子场算符时，其缩并等于零，即

$$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{\psi}_\rho}(x') = 0, \quad \underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{\bar{\psi}}_\rho}(x') = 0. \tag{3.3.6}$$

这是因为作用图象中场算符随时间的变化是已知的，在用平面波展式代入并分出$\mathrm{e}^{\pm i\omega t}$(或$\mathrm{e}^{\pm\frac{i}{\hbar}Et}$)因子后，吸收算符和发射算符本身与$t$无关，而电磁场和电子场的算符之间都是可对易的，于是T乘积与N乘积的差为零．

两个$\hat{\psi}$的缩并以及两个$\hat{\bar{\psi}}$之间的缩并亦可证为零．下面先来考察作用图象中两个$\hat{\psi}$的缩并．先证明$\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\delta(x')$就等于$\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x')$．当$t > t'$时，直接就得

$$\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x') = \hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x'),$$

① 参见§2.5.

而当 $t'>t$ 时按定义有

$$\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x') = -\hat{\psi}_\sigma(x')\hat{\psi}_\rho(x).$$

$\hat{\psi}$中所含的算符是电子的吸收算符 $\hat{\alpha}$和反电子的发射算符 $\hat{\beta}^\dagger$,无论两个 $\hat{\alpha}$之间、两个 $\hat{\beta}^\dagger$ 之间还是一个 $\hat{\alpha}$和一个 $\hat{\beta}^\dagger$ 之间都是反对易的,这样 $\hat{\psi}_\sigma(x')\hat{\psi}_\rho(x)$将等于 $-\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x')$. 于是无论 $t>t'$还是$t'<t$,都有

$$\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x') = \hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x'). \tag{3.3.7}$$

其次来证明 $\mathrm{N}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x')$也等于 $\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x')$. 为此将 $\hat{\psi}(x)$表示为 $\hat{\psi}^{(+)}(x)$和 $\hat{\psi}^{(-)}(x)$之和,其中 $\hat{\psi}^{(+)}$ 含吸收算符,$\hat{\psi}^{(-)}$ 含发射算符. 根据正规编序的定义,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x') = {} & \hat{\psi}_\rho^{(+)}(x)\hat{\psi}_\sigma^{(+)}(x') + \hat{\psi}_\rho^{(-)}(x)\hat{\psi}_\sigma^{(+)}(x') \\ & + \hat{\psi}_\rho^{(-)}(x)\hat{\psi}_\sigma^{(-)}(x') - \hat{\psi}_\sigma^{(-)}(x')\hat{\psi}_\rho^{(+)}(x),\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

同样,由于 $\hat{\psi}_\sigma^{(-)}(x')$含的是正电子的发射算符 $\hat{\beta}^\dagger$,而 $\hat{\psi}_\rho^{(+)}$ 中含的是电子的吸收算符 $\hat{\alpha}$,故 $-\hat{\psi}_\sigma^{(-)}(x')\hat{\psi}_\rho^{(+)}(x) = \hat{\psi}_\rho^{(+)}(x)\hat{\psi}_\sigma^{(-)}(x')$. 这样(3.3.8)式右方也可化成 $\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x)'$,于是(3.3.8)式化为

$$\mathrm{N}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x') = \hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma(x'). \tag{3.3.9}$$

从(3.3.7)和(3.3.9)式即给出

$$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\psi}_\sigma}\,(x') = 0. \tag{3.3.10a}$$

仿此可证

$$\underbrace{\hat{\bar{\psi}}_\rho(x)\bar{\psi}_\sigma}\,(x') = 0. \tag{3.3.10b}$$

剩下要计算的是$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x')$和$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma}(x')$. 它们的值都不为零,先来看前者.

$$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}\,(x') = \mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') - \mathrm{N}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x').$$

当 $t>t'$时,利用展式(3.1.37),其中 $k\cdot x = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t$,得

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') = \hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') = \frac{2\pi\hbar c}{V}\sum_{klk'l'}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\big[\hat{a}_{kl}\hat{a}_{k'l'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x+k'\cdot x')} + {} \\ \hat{a}_{kl}\hat{a}^\dagger_{k'l'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')} + \hat{a}^\dagger_{kl}\hat{a}_{k'l'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')} + \hat{a}^\dagger_{kl}\hat{a}^\dagger_{k'l'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\cdot x+k'\cdot x')}\big]e_\mu^{(l)}(\boldsymbol{k})e_\nu^{(l')}(\boldsymbol{k}'),\end{aligned}$$

而当 $t'>t$ 时,结果为

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') = \hat{A}_\nu(x')\hat{A}_\mu(x) = \frac{2\pi\hbar c}{V}\sum_{klk'l'}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\big[\hat{a}_{k'l'}\hat{a}_{kl}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'\cdot x'+k\cdot x)} \\ + \hat{a}^\dagger_{k'l'}\hat{a}_{kl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k'\cdot x'-k\cdot x)} + \hat{a}_{k'l'}\hat{a}^\dagger_{kl}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'\cdot x'-k\cdot x)} + \hat{a}^\dagger_{k'l'}\hat{a}^\dagger_{kl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k'\cdot x'+k\cdot x)}\big]e_\nu^{(l')}(\boldsymbol{k}')e_\mu^{(l)}(\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

正规乘积的展开式则为

$$\mathrm{N}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') = \frac{2\pi\hbar c}{V}\sum_{klk'l'}\frac{1}{\sqrt{kk'}}[\hat{a}_{kl}\hat{a}_{k'l'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x+k'\cdot x')} + \hat{a}^\dagger_{k'l'}\hat{a}_{kl}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')}$$
$$+ \hat{a}^\dagger_{kl}\hat{a}_{k'l'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')} + \hat{a}^\dagger_{kl}\hat{a}^\dagger_{k'l'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\cdot x+k'\cdot x')}]e^{(l)}_\mu(\boldsymbol{k})e^{(l')}_\nu(\boldsymbol{k}').$$

由此可见，当 $t>t'$ 时，T 乘积与 $N$ 乘积的差别只是展式中的第二项不同，而当 $t'>t$ 时，两者的差别只是第三项不同，于是得

$$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x') = \begin{cases}\dfrac{2\pi\hbar c}{V}\displaystyle\sum_{klk'l'}\dfrac{1}{\sqrt{kk'}}(\hat{a}_{kl}\hat{a}^\dagger_{k'l'} - \hat{a}^\dagger_{k'l'}\hat{a}_{kl})e^{(l)}_\mu(\boldsymbol{k})e^{(l')}_\nu(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')}\\ \dfrac{2\pi\hbar c}{V}\displaystyle\sum_{klk'l'}\dfrac{1}{\sqrt{kk'}}(\hat{a}_{k'l'}\hat{a}^\dagger_{kl} - \hat{a}^\dagger_{kl}\hat{a}_{k'l'})e^{(l)}_\mu(\boldsymbol{k})e^{(l')}_\nu(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\cdot x-k'\cdot x')}\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\dfrac{2\pi\hbar c}{V}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}}\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-x')}\delta_{\mu\nu}, & t>t'\\ \dfrac{2\pi\hbar c}{V}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}}\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-x')}\delta_{\mu\nu}. & t'>t\end{cases}$$

在推导后一等式时，利用了对易关系(3.1.34)和正交完备条件(3.1.36). 将上式最后结果中的第二式的 $\boldsymbol{k}$ 换成 $-\boldsymbol{k}$，即可将 $\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x')$ 统一地表示为

$$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x') = \frac{2\pi\hbar c}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega|t-t'|}\delta_{\mu\nu}. \tag{3.3.11}$$

我们将 $\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x')$ 在 $V\to\infty$ 时的值用函数 $D^F_{\mu\nu}(x-x')$ 表示，并将 $D^F_{\mu\nu}$ 写成

$$D^F_{\mu\nu}(x-x') = -\mathrm{i}\hbar D_F(x-x')\delta_{\mu\nu},$$
$$D_F(x-x') = \mathrm{i}\lim_{V\to\infty}\frac{2\pi c^2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega|t-t'|}$$
$$= \frac{\mathrm{i}c^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega|t-t'|}\mathrm{d}^3k. \tag{3.3.12}$$

在最后一步中我们将 $V\to\infty$ 情况下的求和转化成为积分. 推导如下：$\boldsymbol{k}$ 本来取离散值(见(1.3.1)式)

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(m_1\boldsymbol{n}_1 + m_2\boldsymbol{n}_2 + m_3\boldsymbol{n}_3),\ m_1, m_2, m_3 \text{ 为整数}, \tag{3.3.13}$$

其中 $L$ 代表立方体的边长，$L^3=V$. (3.3.13)式表明 $\boldsymbol{k}$ 的取值构成 $\boldsymbol{k}$ 空间中的格点分布，其密度为 $(\frac{L}{2\pi})^3 = \frac{V}{(2\pi)^3}$. 当 $V$ 愈来愈大时，$\boldsymbol{k}$ 的格点愈来愈密集. 在 $\boldsymbol{k}$ 附

近的 $\mathrm{d}^3k$ 范围内格点数有$\dfrac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k$ 个①,该 $d^3k$ 范围对$D_F$ 的贡献即为

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi c^2}{V}\right)\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega|t-t'|}=\frac{\mathrm{i}c^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega|t-t'|}\mathrm{d}^3k.$$

再把所有小范围 $\mathrm{d}^3k$ 的贡献总加起来就等于对全部格点求了和. 也就是说当 $V\to\infty$时, $\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\to\dfrac{V}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k$. 这样就化出了(3.3.12)式.

下面再来计算 $\underline{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}}(x')$. 将 $\hat{\psi}$ 和 $\bar{\psi}$ 用螺度一定的平面行波展开[见(2.5.9)式]在 $t>t'$和$t'\to t$ 时,T乘积分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma(x')=\frac{1}{V}\sum_{ps,p's'}\Big[&\hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}u_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}_\sigma^{(s)'}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\\&+\hat{\alpha}_{ps}\hat{\beta}_{p's'}u_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x+p'\cdot x')}\\&+\hat{\beta}^\dagger_{ps}\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}v_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x+p'\cdot x')}\\&+\hat{\beta}^\dagger_{ps}\hat{\beta}_{p's'}v_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}_\sigma^{(s')}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\Big],\qquad t>t'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma(x')=-\frac{1}{V}\sum_{psp's'}\Big[&\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}\hat{\alpha}_{ps}u_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\\&+\hat{\beta}_{p's'}\hat{\alpha}_{ps}u_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x+p'\cdot x')}\\&+\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}\hat{\beta}^\dagger_{ps}v_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x+p'\cdot x')}\\&+\hat{\beta}_{p's'}\hat{\beta}^\dagger_{ps}v_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\Big],\qquad t'>t\end{aligned}$$

其中 $p\cdot x=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et$. 而N乘积的展式则为

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma(x')=\frac{1}{V}\sum_{psp's'}\Big[&-\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}\hat{\alpha}_{ps}u_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\\&+\hat{\alpha}_{ps}\hat{\beta}_{p's'}u_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x+p'\cdot x')}\\&+\hat{\beta}^\dagger_{ps}\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}v_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{u}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x+p'\cdot x')}\\&+\hat{\beta}^\dagger_{ps}\hat{\beta}_{p's'}v_\rho^{(s)}(\boldsymbol{p})\overline{v}_\sigma^{(s')}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\Big].\end{aligned}$$

在 $t>t'$时,T乘积与N乘积差别只在于第一项,而在 $t'>t'$时两者差别只在于第四项. 于是得出

---

① 这样,在 $\mathrm{d}^3k$ 内的状态数随着 $V$ 的增大而增大. 但另一方面,每个状态的矢势与$\sqrt{V}$成反比(参见 3.3.11). 导致求出的 $D_F$ 与 $V$ 的取值无关.

$$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma}(x')=\begin{cases}\dfrac{1}{V}\sum\limits_{psp's'}(\hat{\alpha}_{ps}\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}+\hat{\alpha}^\dagger_{p's'}\hat{\alpha}_{ps})u^{(s)}_\rho(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(s')}_\sigma(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\\ -\dfrac{1}{V}\sum\limits_{psp's'}(\hat{\beta}_{p's'}\hat{\beta}^\dagger_{ps}+\hat{\beta}^\dagger_{ps}\hat{\beta}_{p's'})v^{(s)}_\rho(\boldsymbol{p})\bar{v}^{(s')}_\sigma(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p\cdot x-p'\cdot x')}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{V}\sum\limits_{ps}u^{(s)}_\rho(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(s)}_\sigma(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot(x-x')}, & t>t',\\ -\dfrac{1}{V}\sum\limits_{ps}v^{(s)}_\rho(\boldsymbol{p})\bar{v}^{(s)}_\sigma(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot(x-x')}, & t'>t.\end{cases}\tag{3.3.14}$$

剩下的工作主要是计算 $\sum\limits_{s=1,2}u^{(s)}(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 和 $\sum\limits_{s=1,2}v^{(3)}(\boldsymbol{p})\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})$，它们都是 $4\times4$ 矩阵.先来计算前者，利用(2.2.10)前二式所给出的 $u^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 的表达式即得

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})=\frac{E+mc^2}{2E}\sum_s\begin{pmatrix}\phi_s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\phi_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_s^\dagger & \phi_s^\dagger\dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\end{pmatrix},$$

乘开后利用 $\sum\limits_s\phi_s\phi_s^\dagger=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$再利用(2.3.9)式就化出

$$\sum_s u^{(s)}(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{p})=\frac{E+mc^2}{2E}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2} & \dfrac{-\boldsymbol{p}^2c^2}{(E+mc^2)^2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2E}\begin{pmatrix}E+mc^2 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c & -E+mc^2\end{pmatrix}=\frac{1}{2E}(-\mathrm{i}c\gamma_\mu p_\mu+mc^2),\tag{3.3.15}$$

其中 $p_4=\mathrm{i}\dfrac{E}{c}$.同样，利用(2.2.14)和(2.2.10)后二式可得

$$\sum_{s=1,2}v^{(s)}(\boldsymbol{p})\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{p})=\frac{E+mc^2}{2E}\begin{pmatrix}\dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2E}\begin{pmatrix}E-mc^2 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c & -E-mc^2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2E}(\mathrm{i}c\gamma_\mu\rho_\mu+mc^2).\tag{3.3.16}$$

将(3.3.15)和(3.3.16)式代回(3.3.14)式可将它统一地表为

$$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma}(x')=\frac{1}{V}\left(-\hbar c\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+mc^2\right)_{\rho\sigma}\sum_p\frac{1}{2E}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot(x-x')-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E|t-t'|}.\tag{3.3.17}$$

同前一样，我们将$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma}(x')$在 $V\to\infty$ 时的极限值用函数 $S^{\mathrm{F}}_{\rho\sigma}(x-x')$表示，于

是得出 4×4 的矩阵函数 $S^F(x-x')$，它可写作

$$S^F(x-x')=\frac{\mathrm{i}}{4\pi c}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{mc}{\hbar}\right)\Delta_F(x-x'),$$

$$\Delta_F(x-x')=\mathrm{i}\lim_{V\to\infty}\frac{2\pi c^2\hbar}{V}\sum_{p}\frac{1}{E}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E|t-t'|}. \qquad (3.3.18)$$

仿前，上式中对 $\boldsymbol{p}$ 的求和可化为对 $\boldsymbol{p}$ 的积分. 将 $\boldsymbol{p}$ 写成 $\hbar\boldsymbol{k}$，并定义

$$\omega=E/\hbar,$$

$\Delta_F(x-x')$即可表为

$$\Delta_F(x-x')=\frac{\mathrm{i}c^2}{4\pi^2}\int\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega|t-t'|}, \qquad (3.3.19)$$

形式上(3.3.19)式右方与(3.3.12)式右方相同，只是 $\omega$ 与 $k$ 关系不一样.

以上讨论表明，两个场算符的缩并果然都是 $c$ 数. 将(3.3.5)式对真空取期望值，我们亦可将$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x')$和$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma}(x')$表示为

$$\underbrace{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu}(x')=\langle 0|\mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')||0\rangle, \qquad (3.3.20)$$

$$\underbrace{\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma}(x')=\langle 0|\mathrm{T}\hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma(x')|0\rangle.$$

这两个函数分别称为自由光子场的传播子和自由子场的传播子. 对它们的意义我们将在下一节中讨论.

## §3.4　自由场的传播子　推迟格林函数和超前格林函数

在本节中我们将对自由光子场和自由电子场的传播子 $D^F_{\mu\nu}(x)$和 $S_F(x)$的意义和函数性质进行讨论. 我们将指明 $D^F_{\mu\nu}(x)$中的函数 $D_F(x)$实为波动方程的格林函数，但它又不是我们所熟悉的推迟格林函数，也不是超前格林函数，而是一种新的以费曼为命名的格林函数. 类似地 $S_F(x)$中的 $D_F(x)$则是克莱因-戈登方程的费曼格林函数.

### 1. 自由光子场的传播子　波动方程的格林函数

在上一节中我们给出了自由光子场的传播子 $D^F_{\mu\nu}(x)$，并将它表示成$[-\mathrm{i}\hbar\delta_{\mu\nu}D_F(x)]$，$D_F(x)$的积分表达式由(3.3.12)式给出，即

$$D_F(x)=\frac{\mathrm{i}c}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}kc|t|}\mathrm{d}^3k. \qquad (3.4.1)$$

此积分可以积出. 为方便计取 $\boldsymbol{k}$ 空间中的第三个轴与 $\boldsymbol{x}$ 方向重合，当 $t>0$ 时，上式

中被积函数化为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta-\mathrm{i}kct}$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 间夹角(亦即 $\boldsymbol{k}$ 与第三轴的夹角). $\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$ 可写成 $k^2\mathrm{d}k\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 将上式先对 $\varphi$ 积分再对 $\theta$ 积分，得出

$$D_F(x)=\frac{\mathrm{i}c}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_0^\pi k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta-\mathrm{i}kct}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{c}{2\pi r}\int_0^\infty \mathrm{d}k\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-ct)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r+ct)}\right],\quad t>0. \tag{3.4.2a}$$

同样当 $t<0$ 时可得

$$D_F(x)=\frac{c}{2\pi r}\int_0^\infty \mathrm{d}k\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+ct)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-ct)}\right],\quad t<0. \tag{3.4.2b}$$

在作进一步对 $k$ 的积分之前，我们先看一个大家熟悉的一维积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$. 其结果如所周知就是 $2\pi\delta(r)$. 但这个积分的值就其原来的形式而言是不确定的，因按通常的处理，即将积分范围作一直接的截断，再取极限得出的结果为 $\lim\limits_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k$. 此结果在直观上并不显示 $\delta(r)$ 的形貌. 如果改成某种平滑削减的极限，如 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\varepsilon|k|}\mathrm{d}k$，$\varepsilon>0$，则其形象将更接近 $\delta$ 函数的定义. 上述积分不难求出. 因

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\varepsilon|k|}\mathrm{d}k=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr+\varepsilon k}\mathrm{d}k+\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\varepsilon k}\mathrm{d}k=\frac{2\varepsilon}{r^2+\varepsilon^2}. \tag{3.4.3}$$

此函数的图形为一光滑的高峰，峰的位置位于 $r=0$ 处，峰高为 $\frac{2}{\varepsilon}$，峰的半高处宽度为 $2\varepsilon$. 曲线下的面积不难求出为 $2\pi$. 因此当 $\varepsilon\to 0$ 时，此函数的形象就与 $2\pi\delta(r)$ 一致. 对于积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k$ 可作同样处理，结果得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{i}}{r+\mathrm{i}\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{i}r}{r^2+\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon}{r^2+\varepsilon^2}\right]. \tag{3.4.4}$$

在 $\varepsilon\to 0$ 时，上式右方第二项即趋于 $\pi\delta(r)$，而右方第一项趋于 $\frac{\mathrm{i}}{r}$ 的主值即 $\mathrm{i}\mathscr{P}\frac{1}{r}$. 于是(3.4.4)式可表为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}k=\pi\delta(r)+\mathrm{i}\mathscr{P}\frac{1}{r}. \tag{3.4.5}$$

上述结果通常也表示成

$$\frac{1}{r+\mathrm{i}\varepsilon}\to\mathscr{P}\frac{1}{r}-\mathrm{i}\pi\delta(r). \tag{3.4.6a}$$

同样有

$$\frac{1}{r-\mathrm{i}\varepsilon}\to\mathscr{P}\frac{1}{r}+\mathrm{i}\pi\delta(r).\tag{3.4.6b}$$

将以上讨论用到(3.4.2)式,就得出:无论 $t>0$ 还是 $t<0$,$D_F$ 都可表为

$$D_F(x)=\frac{\mathrm{i}c}{2\pi r}\left[\mathscr{P}\frac{1}{r-ct}+\mathscr{P}\frac{1}{r+ct}-\mathrm{i}\pi\delta(r-ct)-\mathrm{i}\pi\delta(r+ct)\right].\tag{3.4.7}$$

虽然 $t>0$ 和 $t<0$ 可用同一个表达式,但实际值并不一样:当 $t>0$ 时,$r+ct$ 恒为正,于是方括号内的项化为 $\left[\mathscr{P}\frac{1}{r-ct}+\frac{1}{r+ct}-\mathrm{i}\pi\delta(r-ct)\right]$,而 $t<0$ 时 $r-ct$ 恒为正,方括号内的项化为 $\left[\frac{1}{r-ct}+\mathscr{P}\frac{1}{r+ct}-\mathrm{i}\pi\delta(r+ct)\right]$. 于是 $t>0$ 的 $D_F(x)$ 中含有"$t=0$ 时从原点向外离散"的球面波 $\frac{c}{2r}\delta(r-ct)$,而 $t<0$ 的 $D_F(x)$ 中含有"$t=0$时到达原点的会聚"球面波 $\frac{c}{2r}\delta(r+ct)$.

通过并项,(3.4.7)式可以写成

$$D_F(x)=\frac{\mathrm{i}c}{\pi}\mathscr{P}\frac{1}{r^2-c^2t^2}+c\delta(r^2-c^2t^2).\tag{3.4.8}$$

这就是通常给出的 $D_F(x)$的表达式. 下面我们将从另外的角度来研究 $D_F(x)$.

在费曼-戴逊理论中,$S$ 矩阵元常用四维 $x$ 的积分来表示,为此我们要将 $D_F(x)$写成四维傅里叶积分的形式. 首先,我们来证明

$$\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|t|}=\frac{1}{\mathrm{i}\pi c}\int_{C_F}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0ct}}{\frac{\omega^2}{c^2}-k_0^2}\mathrm{d}k_0,\tag{3.4.9}$$

其中 $C_F$ 标法 $k_0$ 复平面中的积分途径如图 3.4.1 所示. 此路径基本上与实轴重合,只是以无穷小的半圆从下方绕过 $k_0=-\frac{\omega}{c}$ 点,从上方绕过 $k_0=\frac{\omega}{c}$ 点. (3.4.9)式的特点是,把其左方所示的一个 $t$ 的非解析函数(因含 $t$ 的绝对值)用解析函数的回

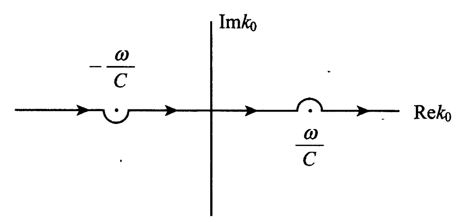



图 3.4.1　在 $k_0$ 的复平面中的积分路径 $C_F$

路积分表示出来.该式的证明如下.

当 $t>0$ 时,(3.4.9)式中的积分路径可补以下半平面的无穷大半圆,补充后的路径用 $C_-$ 表示.这是因为 $e^{-ik_0ct}=e^{-ict\mathrm{Re}k_0+ct\mathrm{Im}k_0}$,在下半无穷大半圆上 $\mathrm{Im}k_0\to-\infty$,故补此半圆对积分值无影响,但却使得我们能用留数定理来将积分求出:

$$\frac{1}{i\pi c}\int_{C_F}\frac{e^{-ik_0ct}}{\frac{\omega_2}{c_2}-k_0^2}dk_0=-\frac{1}{i\pi c}\int_{C_-}\frac{e^{-ik_0ct}}{\left(k_0-\frac{\omega}{c}\right)\left(k_0+\frac{\omega}{c}\right)}dk_0=\frac{1}{\omega}e^{-i\omega t},\ t>0.$$

当 $t<0$ 时,(3.4.9)式中的 $C_F$ 则可补以上半平面的无穷大半圆.我们用 $C_+$ 表示此补充后的积分路径.于是可以求出

$$\frac{1}{i\pi c}\int_{C_F}\frac{e^{-ik_0ct}}{\frac{\omega^2}{c^2}-k_0^2}dk_0=-\frac{1}{i\pi c}\int_{C_+}\frac{e^{-ik_0ct}}{\left(k_0-\frac{\omega}{c}\right)\left(k_0+\frac{\omega}{c}\right)}dk_0=\frac{1}{\omega}e^{i\omega t},t<0,$$

这样我们就证明了(3.4.9)式.

将(3.4.9)式代入(3.4.1)式中并将 $\omega^2$ 用 $c^2\boldsymbol{k}^2$ 代入就得出 $D_F(x)$用四维标量函数的四维积分来表示的形式.

$$D_F(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_F}d^3\boldsymbol{k}dk_0e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ik_0ct}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2}\equiv\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_F}d^4k\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2}.\tag{3.4.10}$$

在此后我们将用 $k^2$ 表示 $k_\mu^2$,即

$$k^2=\boldsymbol{k}^2-k_0^2.\tag{3.4.11}$$

另外值得指出的是,这里 $k_0$ 为一个与 $\boldsymbol{k}$ 独立的积分变量,并非$\frac{\omega}{c}$. $\frac{\omega}{c}$将改用$|\boldsymbol{k}|$表示. $C_F$ 的脚标$F$ 主要是标志$k_0$ 的积分路径的取法,即以何种方式绕过被积函数的奇点.这种路径又称为费曼积分路径.至于对 $k_1,k_2,k_3$ 的积分路径即为普通的从$-\infty$到$+\infty$的积分.

我们也可以把 $k_0$ 的积分路径换成沿实轴的直线,同时把被积函数的极点移到$-\frac{\omega}{c}+i\delta$ 和$\frac{\omega}{c}-i\delta$,其中 $\delta$ 为正无穷小量,以保持"积分路径仍从下方绕过第一个极点从上方绕过第二个极点".这时 $D_F(x)$就改写为

$$D_F(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d^4k\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2-i\varepsilon}.\tag{3.4.12}$$

不难求出被积函数的极点位于

$$k_0=\mp\left(|\boldsymbol{k}|-i\frac{\varepsilon}{2|\boldsymbol{k}|}\right).$$

即第一个极点位于实轴之上,第二极点位于实轴之下$\left(\frac{\varepsilon}{|\boldsymbol{k}|}\text{相当于前面的 }\delta\right)$.通过

补充无穷大半圆用留数定理求出对 $k_0$ 的积分值后，再令 $\varepsilon\to0$，结果仍为(3.4.1)式.这就证明了(3.4.12)式与(3.4.10)式的等同.

将达朗贝尔算符□作用到(3.4.10)式上即得出

$$\Box D_F(x)=-\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_F}\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=-4\pi c\delta^4(x)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})\delta(t).\quad(3.4.13)$$

第二等式的得出是因为上式中被积函数已无奇点，因而 $k_0$ 的积分路径 $C_F$ 可换成沿实轴的直线.(3.4.13)中的 $\delta^4(x)$ 定义为 $\delta(\boldsymbol{x})\delta(x_0)$ 即 $\delta(\boldsymbol{x})\delta(ct)$.

上式表明 $D_F(x)$ 为波动方程的格林函数，$\delta(\boldsymbol{x})\delta(t)$ 代表 $t=0$ 时在 $\boldsymbol{x}=0$ 处出现的“闪现点源”，而 $D_F(x)$ 即为在此闪现点源的情况下波动方程的解.我们将看到此格林函数既与推迟函数不同也与超前格林函数不同.因为是费曼首先提出来的，故被命名为费曼格林函数.

推迟格林函数 $D_R(x)$ 是我们在经典电动力学中所熟悉的.它代表 $t=0$ 时在 $\boldsymbol{x}=0$ 处的闪现点源所发射出的向外传播的球面波，其数学表示为

$$D_R(x)=\frac{c}{r}\delta(r-ct).\tag{3.4.14}$$

从上式可以看出，当 $t<0$ 时 $D_R(x)=0$，当 $t>0$ 时波集中在 $r=ct$ 的球面上.该球面半径以速率 $c$ 迅速增大，同时波的振幅以 $\frac{1}{r}$ 而减少.

我们来证明(3.4.14)式的确是波动方程的格林函数，即“闪现点源”情况下波动方程的解.为此先来证明 $D_R(x)$ 的四维傅里叶积分形式为

$$D_R(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_R}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{k^2},\tag{3.4.15}$$

其中 $C_R$ 标志 $k_0$ 在复平面中的积分路线如图 3.4.2 所示.它从上方绕过被积函数的两个极点.至于 $\mathrm{d}^3k$ 的积分域则仍与通常一样是从 $-\infty$ 到 $+\infty$，即全部三维 $\boldsymbol{k}$ 空间.

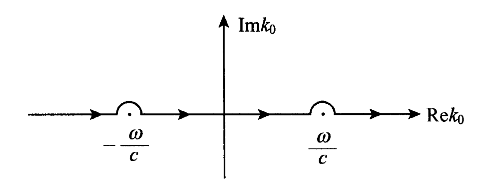



图 3.4.2　在 $k_0$ 的复平面中的积分路径 $C_R$

按照前面所陈述的理由，当 $t<0$ 时对 $k_0$ 的积分路径 $C_R$ 可补以上半平面的无穷大半圆以构成封闭回路.由于此封闭回路内无被积函数的极点，故积分值等于

零. 当 $t>0$ 时, $C_R$ 可补以下半平面的无穷大半圆, 于是对 $k_0$ 的积分即可求出得

$$D_R(x)=\frac{\mathrm{i}c^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}),\ t>0.$$

再应用(3.4.1)式下面的计算方法即得出(3.4.14)式, 表明了(3.4.15)与(3.4.14)式的等同.

有了(3.4.15)式立即可以证明 $D_R(x)$ 为波动方程的格林函数:

$$\Box D_R(x)=-\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_R}\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}=-4\pi c\delta^4(x)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})\delta(t).\quad(3.4.16)$$

电动力学中的推迟解可利用 $D_R(x)$ 直接得出. 推导解是指下述非齐次波动方程在初条件为"$A_\mu(x)=0$ 当 $t\to-\infty$"时解, 该方程为

$$\Box A_\mu(x)=-\frac{4\pi}{c}j_\mu(x).\quad(3.4.17)$$

首先我们将 $j_\mu(x)$ 表示为无数闪现点源 $c\delta^4(x-x')$ 的叠加, 其中 $c\delta^4(x-x')$ 代表位于 $\boldsymbol{x}'$ 点在 $t'$ 时刻闪现的点源:

$$j_\mu(x)=\int j_\mu(x')\delta^4(x-x')\mathrm{d}^4x'.\quad(3.4.18)$$

按照初条件, $A_\mu(x)$ 即为相应的 $D_R(x-x')$ 的叠加:

$$A_\mu(x)=\frac{1}{c^2}\int\mathrm{d}^4x'j_\mu(x')D_R(x-x').\quad(3.4.19)$$

利用(3.4.16)可证它满足方程(3.4.17)式.

将 $D_R(x-x')$ 用(3.4.14)式代入, 并用 $R$ 代表 $\boldsymbol{x}$ 点与 $\boldsymbol{x}'$ 点之间的距离

$$R=\sqrt{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3)^2},$$

再对 $t'$ 积分即得出电动力学中的推迟势公式

$$A_\mu(x)=\frac{1}{c}\int\mathrm{d}^3x'\frac{j_\mu(\boldsymbol{x}'_1t-R/c)}{R}.\quad(3.4.20)$$

还有一种波动方程的格林函数称为超前格林函数, 记作 $D_A(x)$, 它的表达式为

$$D_A(x)=\frac{c}{r}\delta(r+ct),\quad(3.4.21)$$

因此当 $t>0$ 时它总为零. $D_A(x)$ 的四维傅里叶积分表示为

$$D_A(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_A}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{k^2},\quad(3.4.22)$$

其中 $C_A$ 仍标志 $k_0$ 的积分路径, 它与 $C_R$ 的差别在于: $C_A$ 将从下面绕过两极点 $\pm\frac{\omega}{c}$. 同样可证(3.4.21)与(3.4.22)式等同.

将达朗贝尔算符作用到 $D_A(x)$, 同样可得它满足闪现点源 $\delta(\boldsymbol{x})\delta(t)$ 的波动

方程：

$$\Box D_A(x) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x})\delta(t). \tag{3.4.23}$$

因而也是波动方程的格林函数.物理图象上它代表一个以速度 $c$ 向原点会聚的球面波，在 $t=0$ 时到达原点，并正好为闪现点源 $\delta(\boldsymbol{x})\delta(t)$所吸收.

$D_R(x)$和 $D_A(x)$分别在 $t<0$ 和 $t>0$ 时为零，而且其不为零的值只集中出现在光锥 $r^2-c^2t^2=0$ 上.费曼格林函数则不同，它在 $t<0$ 和 $t>0$ 时都不为零.当 $t>0$ 时，它等于 $\frac{1}{2}D_R(x)+\frac{\mathrm{i}c}{\pi}\mathscr{P}\frac{1}{r^2-c^2t^2}$，而在 $t<0$ 时，它等于 $\frac{1}{2}D_A(x)+\frac{\mathrm{i}c}{\pi}\mathscr{P}\frac{1}{r^2-c^2r^2}$.由此可见，它在光锥之内和之外都不为零，但其值为虚数.因此它在经典电动力学中不出现，只出现在量子电动力学中.

在任何给定的 $t$，上述三种格林函数在 $r\to\infty$时都趋于零.这表明仅由“无穷远处($r\to\infty$)为零”的边条件不能完全确定非齐次波动方程的格林函数.这一情况与齐次波动方程在“无穷远处($r\to\infty$)为零”的边条件下存在非零解是相联系的.

光子的费曼格林函数 $D^F_{\mu\nu}(x-x')$的物理意义可粗略地理解如下：首先，矢量指标 $\mu$(或 $\nu$)可看成是时空标架上的偏振指标.这样，当 $t<t'$时，$D^F_{\mu\nu}(x-x')$“代表”一个偏振指标为 $\mu$ 的光子在 $t$ 到 $t'$ 的时间内从 $\boldsymbol{x}$ 传到 $\boldsymbol{x}'$ 并变成偏振指标为 $\nu$ 的光子的概率幅，当 $t'<t$ 时，则反过来，它“代表”一个偏振指标为 $\nu$ 的光子在 $t'$ 到 $t$ 的时间内从 $\boldsymbol{x}'$ 传到 $\boldsymbol{x}$ 并变成偏振指标 $\mu$ 的光子的概率幅.这是因为：$D^F_{\mu\nu}(x-x')=\langle 0\mid \mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')\mid 0\rangle$，而 $\hat{A}_\mu(x)=\hat{A}^{(+)}_\mu(x)+\hat{A}^{(-)}_\mu(x)$，其中 $\hat{A}^{(+)}_\mu(x)=\sum_{kl}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\hat{a}_{kl}e^{(l)}_\mu(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$，$\hat{A}^{(-)}_\mu(x)=\sum_{kl}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\hat{a}^\dagger_{kl}e^{(l)}_\mu(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$，如第一章所述，如果没有因子$\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}$，则 $\hat{A}^{(+)}_\mu(x)$[即 $\hat{A}^{(+)}_\mu(\boldsymbol{x},t)$]可解释为 $t$ 时刻在 $\boldsymbol{x}$ 点吸收一个偏振指标为 $\mu$ 的光子的算符，$\hat{A}^{(-)}_\mu(x)$[即 $\hat{A}^{(-)}_\mu(\boldsymbol{x},t)$]可解释为在 $t$ 时刻在 $\boldsymbol{x}$ 点发射一个偏振指标为 $\mu$ 的光子的算符，对 $\hat{A}^{(\pm)}_\nu(x')$也有类似的解释.这样，在 $t<t'$时，

$$\langle 0\mid \mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')\mid 0\rangle = \langle 0\mid \hat{A}_\nu(x')\hat{A}_\mu(x)\mid 0\rangle = \langle 0\mid \hat{A}^{(+)}_\nu(x')\hat{A}^{(-)}_\nu(x)\mid 0\rangle$$

就代表在 $t$ 时刻于 $\boldsymbol{x}$ 点在真空中发射了一个 $\mu$ 偏振指标的光子而在 $t'$时刻于 $\boldsymbol{x}'$ 点吸收一个 $\nu$ 偏振指标光子后恰好回到真空态的概率幅.因而也就是一个 $\mu$ 偏振指标的光子在 $t$ 到 $t'$时间内从 $\boldsymbol{x}$ 传到 $\boldsymbol{x}'$ 并变成了 $\nu$ 偏振光子的概率幅.

与此相仿，在 $t'<t$ 时，$\langle 0|\mathrm{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')|0\rangle=\langle 0|\hat{A}^{(+)}_\mu(x)\hat{A}^{(-)}_\nu(x')|0\rangle$代表一个 $\nu$ 偏振指标的光子在 $t'$到 $t$ 的时间内从 $\boldsymbol{x}'$ 传到 $\boldsymbol{x}$ 并变成 $\mu$ 偏振光子的概率幅.

在以上说法中,由于除去了$\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}$因子,所以不是准确的表叙.这也就是我们不用“是”而用“代表”的原因.如第一章所述,$\frac{1}{\sqrt{k}}$因子对应于坐标空间中的算符$(-\nabla^2)^{-\frac{1}{4}}$.计入$\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}$因子就等于要作一个非定域运算.尽管如此,上述说法也不失为一种比较形象的描述.传播子的名称也是由于这种描述而获得的.附带指出,从 $D_{\mu\nu}^F(x-x')=-\mathrm{i}\hbar\delta_{\mu\nu}D_F(x-x')$,实际上偏振指标在传播中保持不变.

**2. 自由电子场的传播子 克莱因-戈登方程的格林函数**

我们再来考察自由电子场的传播子,它是 4×4 矩阵形的函数 $S^F(x)$,由(3.3.18)和(3.3.19)式所示,即

$$S^F(x)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi c}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{mc}{\hbar}\right)\Delta_F(x),\tag{3.4.24}$$

$$\Delta_F(x)=\mathrm{i}\lim_{V\to\infty}\frac{2\pi c^2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega|t|}=\frac{\mathrm{i}c^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega|t|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}.\tag{3.4.25}$$

在这里 $\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2c^2+m^2c^4/\hbar^2}$而不是光子情况下的值 $kc$.

下面来证明 $\Delta_F(x)$为克莱因-戈登方程的格林函数:

$$\left(\Box-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Delta_F(x)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})\delta(t).\tag{3.4.26}$$

将(3.4.9)式代入(3.4.25)式,然后将其中$\frac{\omega^2}{c^2}$表示成 $\boldsymbol{k}^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$,即化出

$$\Delta_F(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_F}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{k^2+m^2c^2/\hbar^2}.\tag{3.4.27}$$

其中 $k^2$ 仍代表 $\boldsymbol{k}^2-k_0^2$.同样,我们也可将上式表示为

$$\Delta_F(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{k^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}-\mathrm{i}\varepsilon}.\tag{3.4.28}$$

将(3.4.27)式代入(3.4.26)式左方立即可证明该式成立,从而 $\Delta_F(x)$确实为克莱因-戈登方程的格林函数.此格林函数称作克莱因-戈登方程的费曼格林函数.

(3.4.28)式右方的积分也可以积出,其结果可用 δ 函数和柱函数表示出来,但由于表达式比较复杂,这里不再列出.只顺带指出该函数亦不局限在类时区,而是透入了类空区(类空区表示传播速度大于光速 $c$).但透入深度$\sim\frac{\hbar}{mc}$即电子的康普顿波长的大小.因此这一结果也可以看作是电子定位精度存在极限的一种显示(参

见§2.1和§2.2).

仿前我们也可得出克莱因-戈登方程的推迟格林函数和超前格林函数.它们的表达式为

$$\Delta_R(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_R}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot x}}{k^2+m^2c^2/\hbar^2},$$

$$\Delta_A(x)=\frac{c}{4\pi^3}\int_{C_A}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot x}}{k^2+m^2c^2/\hbar^2}.\tag{3.4.29}$$

显然它们都能满足(3.4.26)式.其中 $\Delta_R$ 当 $t<0$ 时恒为零,$\Delta_A$ 当 $t>0$ 时恒为零.

将(3.4.28)式代入到(3.4.24)式中即得出 $S^F(x)$的积分表达式

$$S^F(x)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\frac{\mathrm{i}\gamma_\nu k_\nu-mc/\hbar}{k^2+m^2c^2/\hbar^2}\mathrm{e}^{ik\cdot x}\mathrm{d}^4k.\tag{3.4.30}$$

于是有

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)S^F(x)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_F}(\mathrm{i}\gamma_\mu k_\mu+\frac{mc}{\hbar})(\mathrm{i}\gamma_\nu k_\nu-\frac{mc}{\hbar})\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot x}}{k^2+m^2c^2/\hbar^2}\mathrm{d}^4k,$$

再利用

$$\gamma_\mu k_\mu\gamma_\nu k_\nu=\frac{1}{2}(\gamma_\mu k_\mu\gamma_\nu k_\nu+\gamma_\nu k_\nu\gamma_\mu k_\mu)=\frac{1}{2}k_\mu k_\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)=k^2$$

即得出

$$(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar})S^F(x)=-\mathrm{i}\delta^4(x),\tag{3.4.31}$$

这表明,除了一个常系数外,$S^F(x)$就是狄拉克方程的格林函数.

$S^F_{\rho\sigma}(x)$也具有 $D^F_{\mu\nu}(x)$相类似的意义.将 $\hat{\psi}(x)$和 $\hat{\bar{\psi}}(x)$分成正频率部分和负频率部分之和,

$$\hat{\psi}(x)=\hat{\psi}^{(+)}(x)+\hat{\psi}^{(-)}(x),\quad \hat{\bar{\psi}}(x)=\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)+\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x),$$

其中正频率部分 $\hat{\psi}^{(+)}$和 $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}$分别为电子和正电子的吸收算符,$\hat{\psi}^{(-)}$和 $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}$分别为正电子和电子的发射算符.先来看$\frac{p}{mc}$很小从而在旋量中将 $0(\frac{p}{mc})$的小项略去的情况,这时

$$\hat{\psi}^{(+)}(x)\to\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}\hat{\alpha}_{ps}\begin{pmatrix}\phi_s\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot x},$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x)\to-\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{ps}\hat{\beta}^\dagger_{ps}\begin{pmatrix}0\\\phi_s\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot x},\tag{3.4.32}$$

分别代表 $t$ 时刻在 $\boldsymbol{x}$ 点吸收一个电子和发射一个正电子的算符. 同样 $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)$ 和 $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)$ 分别代表 $t$ 时刻在 $\boldsymbol{x}$ 点吸收一个正电子和发射一个电子的算符. 于是在 $t'<t$ 的情况

$$S_{\rho\sigma}^{F}(x-x') = \langle 0 \mid \hat{\psi}_\rho(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma(x') \mid 0\rangle = \langle 0 \mid \hat{\psi}_\rho^{(+)}(x)\hat{\bar{\psi}}_\sigma^{(-)}(x') \mid 0\rangle, \tag{3.4.33}$$

就代表"$t$ 时刻在 $\boldsymbol{x}'$ 点在真空中产生一个旋量指标为 $\sigma$ 的电子,而在 $t$ 时刻于 $\boldsymbol{x}$ 点吸收一个旋量指标为 $\rho$ 的电子后恰好回到真空"的概率幅. 因此也就相当于一个旋量指标为 $\sigma$ 的电子在 $t'$ 到 $t$ 的时间内从 $\boldsymbol{x}'$ 传到 $\boldsymbol{x}$ 并变成旋量指标为 $\rho$ 的概率幅.

同样,在 $t<t'$ 的情况,

$$-S_{\rho\sigma}^{F}(x-x') = \langle 0 \mid \hat{\bar{\psi}}_\sigma^{(+)}(x')\hat{\psi}_\rho^{(-)}(x) \mid 0\rangle \tag{3.4.34}$$

代表正电子(即反电子)在 $t$ 到 $t'$ 时间内从 $\boldsymbol{x}$ 传到 $\boldsymbol{x}'$ 同时旋量指标从 $\rho$ 变成 $\sigma$ 的概率振幅.

以上解释在 $\frac{p}{mc}$ 项略去时(即非相对论的理论情况)是准确成立的. 但实际上 $\frac{p}{mc}$ 并不为零,非相对论理论只是一种近似理论,故此解释也只是一种近似的说法.

## 3. 狄拉克空穴理论的启示和费曼的思想

狄拉克的空穴理论虽然只是一种等效的描叙,但也给我们一个重要启示,那就是可以使用单一的电子语言来描叙正负电子对的产生和湮灭现象:电子对的产生对应于电子从负能级跃迁到正能级,而电子对的湮没对应于电子从正能级跃迁到负能级. 不仅如此,在此理论中正电子的运动也可用电子的"逆时间运动"来描述,即"正电子(空穴)在 $t_1$ 时刻从 $\boldsymbol{x}_1$ 出发,到 $t_2$ 时刻($t_2>t_1$)抵达 $\boldsymbol{x}_2$"对应于电子 $t_2$ 时刻(较晚)从 $\boldsymbol{x}_2$ 离开并在 $t_1$(较早)时刻到达 $\boldsymbol{x}_1$. 即在时空图中,正电子(空穴)的运动线与对应的电子运动线相反(见图 3.4.3). 这是因为:在狄拉克理论中当一个空穴在 $t_1$ 时刻从 $\boldsymbol{x}_1$ 离开时,意味着电子海中有一个电子在 $t_1$ 时刻到达了 $\boldsymbol{x}_1$,填补了该空穴并在附近形成了一个新空穴……最后当空穴于 $t_2$ 时刻到达 $\boldsymbol{x}_2$ 时,意味着电子海中原来位于 $\boldsymbol{x}_2$ 点的电子离开了该点. 换句话说,"电子在较早的时间 $t_1$ 到达 $\boldsymbol{x}_1$ 而在较晚的时间 $t_2$ 才离开 $\boldsymbol{x}_2$"是通过电子海中众多电子的接力来实现的. 在这种描叙中,电子不仅可以顺着时间的次序运动,还可以逆着时间的次序运动(先到

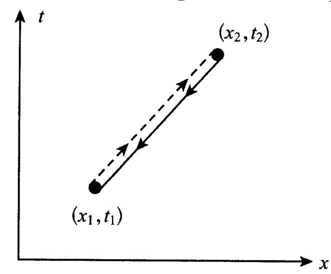
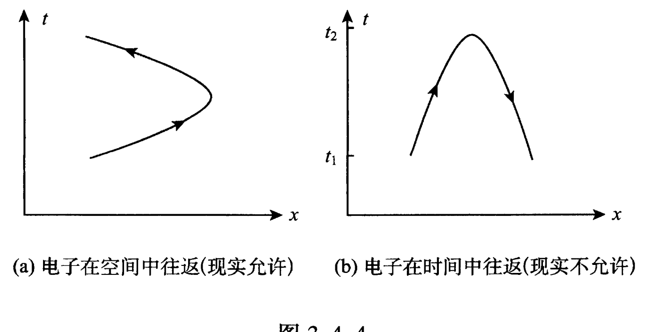



图 3.4.3 时空图中正电子(空穴)的运动线和对应的电子运动线
——→代表电子运动线
----→代表正电子运动线

达,后出发).当它逆着时间次序运动时,代表正电子顺着时间次序的运动.

费曼在 20 世纪 40 年代后期则是从另外的角度来思考这个问题并建立他的理论.他认为相对论的协变形式理论虽然使时间与空间处于某种对称的地位.但两者实际上并不真地对称.例如电子的运动在空间中往返是允许的(如图 3.4.4(a)中所示的运动线),而在时间中往返(如图 3.4.4(b)中所示的运动线)则是不允许的.他提出:真正的时空对称理论应该允许后一种运动线,并把电子在时轴方向的后退解释为正电子沿时轴方向的前进.这样,对于图 3.4.4(b)中的情况(电子从 $t_1$ 沿时轴方向前进,到 $t = t_2$ 又在时轴方向后退到 $t_1$)按通常的表叙,就是在 $t_1$ 时有一个电子和一个正电子,它们相向运动,并在 $t_2$ 时刻相遇而湮灭.以后我们将看到,由于费米子数的守恒,对电子运动的这种描述对 $S$ 矩阵元的计算带来很大的简化和方便.不难看出费曼的想法与狄拉克空穴理论之间的相通之处.




(a) 电子在空间中往返(现实允许)　(b) 电子在时间中往返(现实不允许)

图 3.4.4

按照费曼的说法,无论是 $t < t'$ 还是 $t > t'$, $S^F(x - x')$ 都代表电子从时空点 $x'$(即 $\boldsymbol{x}', t'$)到 $x$(即 $\boldsymbol{x}, t$)的传播.当电子逆着时间次序传播时,物理上代表正电子顺着时间次序传播.在下一节的费曼图中都应作此理解.

## §3.5　S 矩阵元的计算和费曼图形表示

在§3.3 中我们曾经指出,$S$ 矩阵元的计算可归结为将场算符的编时乘积约化为正规乘积.这一约化过程可利用维克在 1950 年提出的两条定理来系统地进行.$S$ 矩阵元也可用图形表示出来,这种图形称为费曼图.它本是费曼在 20 世纪 40 年代末按照他对量子电动力学的直观理解画出来的,费曼并根据他所提出的狄拉克方程的格林函数 $S^F_{\rho\sigma}(x - x')$ 和电磁势波动方程的格林函数 $D^F_{\mu\nu}(x - x')$,给出了对每个图形的计算规则.随后戴逊证明了费曼的结果可以从正统的量子场论推导出来,从而费曼理论并非是取代量子场论的一种不同的新理论,而只是量子场论的一种直观表述和系统地微扰论计算方法.尽管如此,费曼理论在量子场论的发

展中仍具有十分重要的地位. 下面先对维克定理进行介绍,它是戴逊理论的发展和集中表现. 通过维克定理即可直接了当地导出费曼规则和相应的费曼图形.

## 1. 维克定理

设 $\hat{x}_1(x_1),\hat{x}_2(x_2),\cdots,\hat{x}_n(x_n)$是作用图象中的 $n$ 个场算符,其中任何一个 $\hat{x}_j$ 可以是 $\hat{\psi}_\alpha$ 或 $\hat{\bar{\psi}}_\beta$,也可以是 $\hat{A}_\mu$. 维克证明了下面两条定理.

**定理 1** $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n$ 的编时乘积可以表示为下述一系列正规乘积的和:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(\chi_1,\hat{\chi}_2\cdots\hat{\chi}_n) = &\mathrm{N}(\chi_1,\hat{\chi}_2\cdots\hat{\chi}_n) + \sum_{\text{任何一对缩并}} \mathrm{N}(\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\cdots \underbrace{\hat{\chi}_j\ \cdots\hat{\chi}_l}\ \cdots\hat{\chi}_n) \\
&+ \sum_{\text{任何二对缩并}} \mathrm{N}(\chi_1\cdots\chi_j\cdots\chi_l\cdots\chi_s\cdots\chi_u\cdots) \\
&+ \sum_{\text{任何一对缩并}} \mathrm{N}(\text{内含三对并缩}) + \cdots.
\end{aligned}
\tag{3.5.1}
$$

上式右方包含一切可能的两两算符的缩并. 我们来解释(3.5.1)式右方所用符号的意义. 先看 $\mathrm{N}(\chi_1\hat{\chi}_2\cdots\underbrace{\hat{\chi}_j\ \cdots\hat{\chi}_l}\cdots)$. 当 $\hat{\chi}_j$ 与 $\hat{\chi}_l$ 相邻接时,它表示先取 $\hat{\chi}_j$ 与 $\hat{\chi}_l$ 的缩并(如前所述,其结果为一个 $c$ 数),然后将它提到 N 符号之外,即

$$
\mathrm{N}(\hat{\chi}_1\cdots\underbrace{\hat{\chi}_j\ \hat{\chi}_{j+1}}\cdots) = \underbrace{\hat{\chi}_j\ \hat{\chi}_{j+1}}\ \mathrm{N}(\hat{\chi}_1\cdots\hat{\chi}_{j-1}\hat{\chi}_{j+2}\cdots).
$$

如果 $\hat{\chi}_j$ 与 $\hat{\chi}_l$ 不邻接,则可利用N符号下场算符之间的对易性质(两费米场算符为反对易,其余皆对易)先将 $\hat{\chi}_l$ 逐步换到 $\hat{\chi}_j$ 的邻近位置,然后求出缩并且提出到 $N$ 符号之外,即

$$
\mathrm{N}(\hat{\chi}_1\cdots\underbrace{\hat{\chi}_j\ \cdots\hat{\chi}_l}\ \cdots) = (-1)^m\underbrace{\hat{\chi}_j\ \hat{\chi}_l}\ \mathrm{N}(\hat{\chi}_1\cdots\hat{\chi}_{j-1}\hat{\chi}_{j+1}\cdots\hat{\chi}_{l-1}\hat{\chi}_{l+1}\cdots)
$$

其中 $m$ 代表将 $\hat{\chi}_l$ 逐步换到 $\hat{\chi}_j$ 邻近位置的过程中所作的费米场算符交换的次数. 两对缩并的情况即先按上述办法先对其中一对进行缩并并提出,然后再对另一对照样办理. 多对缩并的情况仿此类推.

下面我们将简略地叙述这个定理的证明. 首先要指出的是,T 符号之内场算符的对易性(可对易或可反对易)与 N 符号之内场算符的对易性完全一样,因此若对算符乘积 $\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\cdots\hat{\chi}_n$,(3.5.1)式成立,则将该算符乘积换成其他顺序后(如换成 $\hat{\chi}_3\hat{\chi}_1\hat{\chi}_7\cdots$)该式仍然成立. 反之亦然. 利用这一性质我们可设 $\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\cdots\hat{\chi}_n$ 是按时间顺序排列的情况,于是 $\mathrm{T}(\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\cdots\hat{\chi}_n)$就等于 $\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2\cdots\hat{\chi}_n$(下面接着处理的就是这个已不带 T 符号的算符乘积).

其次,我们把每个 $\hat{\chi}$算符写成吸收算符和发射算符两项的和,即 $\hat{\chi}=\hat{\chi}^{(+)}+\hat{\chi}^{(-)}$,其中 $\hat{\chi}^{(+)}$代表吸收项,$\hat{\chi}^{(-)}$代表发射项. 于是原来的乘积展成 $2^n$ 个乘积之和. 我们来考虑其中任一个乘积 $\hat{\zeta}_1\hat{\zeta}_2\cdots\hat{\zeta}_n$. 每个 $\hat{\zeta}$或是吸收算符或是发射算符,该乘积仍是按时间排序的. 若此项乘积中某个发射算符 $\hat{\zeta}$其左边有吸收算符,则称该算符是未正规序化的. 我们先取所有"未正规序化

的发射算符"中最左的一个,依次将它与其左边的吸收算符进行位置交换.每交换一次除了可能要加一个符号(当两个算符都是费米算符的情况)外,并将多出一个缩并项[因原来这两者是 T 顺序而交换后变成 N 顺序,两者之差见(3.3.5)式].这一过程直到它前面碰到的全是发射算符或者前面已没有算符而止.当最左一个未正规序化的发射算符通过这种办法正规序化以后,再对次左一个未正规序化的发射算符进行类似的处理.直到所有未正规序化的发射算符都已正规序化为止.对展开中所有的乘积项都这样处理后,就得出一系列"算符已正规序化但可能带有 $(-1)^M$ 和若干缩并因子"的项.

最后,我们要将如此所得结果表示成(3.5.1)式右方的形式.为此,将以上已正规序化后的结果加上 N 符号(显然这样做没有任何影响),但是在加上 N 符号后,我们又可以把 N 符号内的场算符还原到原来的顺序以吸收掉所有出现的 $(-1)^M$ 的因子.这样就可化成(3.5.1)式右方的形式,但其中包含的缩并只是非正规序化的算符对之间的缩并,而不是(3.5.1)式下面所说的一切可能的算符对之间的缩并.不难看出,这两者所差的是在上述正规序化的过程中所不需交换位置的算符对之间的缩并,而这种缩并实际上等于零.这样就论证了(3.5.1)式.

在约化 $S$ 算符时,我们碰到的是混合乘积(意义见(3.5.2)式下面说明),而不是单纯的编时乘积.因为(3.3.2)式的展式为

$$\hat{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{S}^{(n)},$$

$$\hat{S}^{(n)}=\frac{1}{n!}\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar c)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{(1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{(2)}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{(n)}\,\mathrm{T}[\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}^{(I)}(x^{(1)})\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}^{(I)}(x^{(2)})\cdots\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}^{(I)}(x^{(n)})].\tag{3.5.2}$$

而按(3.2.27)式下的说明,$\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}^{(I)}(x)=\mathrm{i}e\mathrm{N}(\hat{\bar{\psi}}\gamma_\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu)$,本身又是同一时刻场量的正规乘积(仿前,场算符的上述$(I)$已略去).像 $\mathrm{T}[\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}^{(I)}(x^{(1)})\cdots\hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{int}}^{(I)}(x^{(n)})]$这样的乘积就称为混合乘积.维克的第二定理就是关于混合乘积的约化.

**定理 2**　场算符的上述混合乘积仍可按(3.5.1)式来约化,只是同一个 N 符号内场算符间的缩并应取为零.

此定理的正确性从上文小字关于定理 1 的证明即可看出.由于在同一个 N 符号内的算符已经是正规编序的,就不需对它们进行位置交换,自然也就不会出现它们之间的缩并项.

## 2. 费曼图形和费曼规则

$\hat{S}^{(n)}$在约化成 N 乘积之后,其每一项可以用一个图形表示出来,这些图形就是当初费曼提出的图形,相应的计算办法也是费曼先提出来的.故"费曼图的画法和计算法则"合称费曼规则.

我们把狄拉克方程的平面波解和电磁势的平面波解写成 $u_{ps}(x)$,$v_{ps}(x)$和 $A_\mu^{(kl)}(x)$,其中 $s$ 代表螺度指标,$l$ 代表横向偏振指标:

$$u_{ps}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}u^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot x},\quad v_{ps}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}v^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot x},\tag{3.5.3}$$

$$A_{\mu}^{(kl)}(x)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\mathrm{e}_{\mu}^{(l)}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}.$$

相应地，$\hat{\psi}(x)$、$\hat{\bar{\psi}}(x)$和$\hat{A}_{\mu}(x)$的展式为

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x)&=\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}u_{ps}(x)+\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}v_{ps}(x)],\quad s=1,2,\\ \hat{\bar{\psi}}(x)&=\sum_{ps}[\hat{\alpha}_{ps}^{\dagger}\bar{u}_{ps}(x)+\hat{\beta}_{ps}\bar{v}_{ps}(x)],\quad s=1,2,\\ \hat{A}_{\mu}(x)&=\sum_{kl}[\hat{a}_{kl}A_{\mu}^{(kl)}(x)+\hat{a}_{kl}^{\dagger}A_{\mu}^{(kl)}(x)^{*}],\quad l=1,2.\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

在$\hat{A}_{\mu}$的展式中$l$之所以只取1,2(横波部分)，是因为上述展式是用到$\hat{\mathrm{S}}$算符约化后的正规乘积中，而正规乘积中的算符只作用到初末态上. 如在§3.1中所述，在初末态中我们只取横光子(见(3.1.39)式上文)，没有纵光子和标光子.

将(3.5.3)和(3.5.4)式代入$\hat{\mathrm{S}}$的展式(3.5.2)中，前二项即化为

$$\hat{\mathrm{S}}^{(0)}=1,$$

$$\hat{\mathrm{S}}^{(1)}=\frac{e}{\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x\mathrm{N}(\hat{\bar{\psi}}\gamma_{\mu}\hat{\psi}\hat{A}_{\mu})=\frac{e}{\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x\sum_{psp's'kl}$$

$$\begin{aligned}&[\bar{u}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}u_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)(\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps}a_{kl})+\bar{u}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}u_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)^{*}(\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}\hat{a}_{kl}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps})\\&-\bar{v}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}v_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)(\hat{\beta}_{p's'}^{\dagger}\hat{\beta}_{ps}a_{kl})-\bar{v}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}v_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)^{*}(\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}\hat{a}_{kl}^{\dagger}\hat{\beta}_{p's'})\\&+\bar{u}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}v_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)(\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}\hat{\beta}_{ps}a_{kl})+\bar{u}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}v_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)^{*}(\hat{\alpha}_{p's'}^{\dagger}\hat{\beta}_{ps}^{\dagger}\hat{a}_{kl})\\&+\bar{v}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}u_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)(\hat{\beta}_{p's'}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps}a_{kl})+\bar{v}_{p's'}(x)\gamma_{\mu}u_{ps}(x)A_{\mu}^{(kl)}(x)^{*}(\hat{a}_{kl}^{\dagger}\hat{\beta}_{p's'}^{\dagger}\hat{\alpha}_{ps})].\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

对(3.5.5)式取矩阵元$\langle f|\hat{\mathrm{S}}^{(1)}|i\rangle$，即得出它只对八种跃迁过程有贡献. 这八种跃迁过程我们已在解释$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$的意义时叙述过(见(3.1.43)式下)，因$\hat{\mathrm{S}}^{(1)}$实际上就是$\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$. (3.5.5)同样显示出场论中$\hat{\mathrm{S}}^{(1)}$算符的跃迁矩阵元与相对论量子力学中相应的跃迁矩阵元是一样的. 这八项对应的费曼图如图3.5.1所示. 我们示意性地用横轴代表空间，用纵轴代表时间. 弯线代表光子线，不必加箭头，因光子总是顺着时间顺序传播. 直线代表电子线，要加箭头. 当箭头顺着时间顺序时实际代表电子的运动，当箭头逆着时间顺序(即电子在时间中倒退)时，实际代表正电子顺着时间顺序运动. $x$代表发生作用的时空点$(\boldsymbol{x},t)$，在作用点处的"·"代表$\frac{e}{\hbar c}\gamma_{\mu}$. 进入作用点的电子线为$u_{ps}(x)$，进入作用点的正电子线为$v_{ps}(x)$(如第三个图中上方的线)它们都来自未缩并的$\hat{\psi}$，是$\hat{\psi}$中的吸收部分和发射部分在正规序化

后作用到初态和终态所得出的结果. 离开作用点的电子线为 $\bar{u}_{p's'}$，离开作用点的正电子线为 $\bar{v}_{p's'}$（如第四个图中下方的线）它们都来自未缩并的 $\hat{\bar{\psi}}$. 进入作用点的光子线为 $A_{\mu}^{(kl)}$，离开作用点的光子线为 $A_{\mu}^{(kl)*}$. 按此规则即可写出每个图所对应的被积函数，再对四维 $x$ 积分即为该图对应的 $S$ 矩阵元. 另外值得指出的是，所有的实线不会在作用点的处中断，有进入作用点的就有离开作用点的.

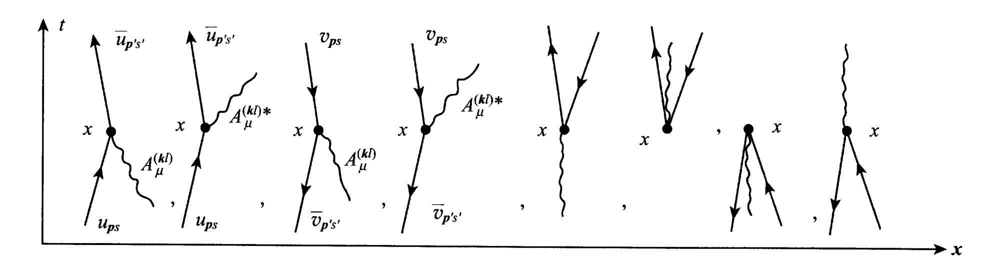



图 3.5.1　$S^{(1)}$对应的八个费曼图

上一段主要的目的是说明费曼规则，其实当正负电子和光子都是自由波函数时，上述 $\hat{S}^{(1)}$ 的八个矩阵元都等于零. 因为在对四维 $x$ 积分后，将得出能量守恒和动量守恒的关系式，很明显它们不可能同时满足(可参见下面小字的注释).

在电动力学课中学习相对论时，就曾指明过，一个自由电子无论其动能有多大都不可能通过减少自己的动能来放出一个光子. 这是因为(按照相对论)不同惯性参考系是平权的，我们可以选择任一个惯性参考系来考虑这个过程. 现在选取参考系与初始的自由电子相静止，显然，在此参考系中，能量守恒对于上述过程不能满足，因而该过程是不可能实现的. 我们可以用类似的思考来考察第一个图，如果它能实现，我们亦将参考系取得与末态电子相对静止，从而证明能量守恒定律亦必遭破坏. 第三、四个图与第一、二个图情况相同，只不过电子换成了正电子. 第五个图如能实现，我们可选正负电子对的质心系为参考系，于是按动量守恒，初态中光子的动量应为零从而它的能量要为零. 这就使能量守恒关系不可能成立. 第八个图情况相仿. 至于第六、七两个图，能量守恒关系不能成立是一目了然的.

只有原子中的束缚电子才可能通过一次微扰作用来辐射或吸收一个光子. 这是因为能量一定的束缚电子，其动量的大小和方向都不确定(有一个分布). 当首先让能量守恒关系满足以后，还有余地选择束缚态中适当的成分使动量守恒也能满足. 在 §4.1 中我们研究原子(亦即其中的束缚电子)对光子的吸收和辐射时，就是用的一级微扰论.

$\hat{S}^{(1)}$ 的展式(3.5.5)是平凡的，并未用到从编时乘积到正规乘积的约化. $\hat{S}^{(2)}$ 的

情况就不同了. 在这里可以看到费曼-戴逊理论所起的重要作用. 根据维克定理①,

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{e^2}{2\hbar^2c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2\mathrm{N}\Big[\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)\Big]$$

$$1 = \frac{e^2}{2\hbar^2c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2\mathrm{N}\Big[\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)D^F_{\mu\nu}(x_1-x_2)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)$$

$$+\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\hat{A}_\mu(x_1)S^F(x_1-x_2)\gamma_\nu\hat{A}_\nu(x_2)\hat{\psi}(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{A}_\nu(x_2)S^F(x_2-x_1)\gamma_\mu\hat{A}_\mu(x_1)\hat{\psi}(x_1)$$

$$-\hat{A}_\mu(x_1)\mathrm{tr}(S^F(x_2-x_1)\gamma_\mu S^F(x_1-x_2)\gamma_\nu)\hat{A}_\nu(x_2)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu S^F(x_2-x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)D^F_{\mu\nu}(x_2-x_1)$$

$$+\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu S^F(x_1-x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)D^F_{\mu\nu}(x_1-x_2)$$

$$-\mathrm{tr}(S^F(x_1-x_2)\gamma_\nu S^F(x_2-x_1)\gamma_\mu)D^F_{\mu\nu}(x_1-x_2)\Big], \qquad (3.5.6)$$

二阶微扰论共发生两次作用. 作用点(四维空间中的点)即为(3.5.6)式中的 $x_1$ 和 $x_2$. 如前所述,未缩并的算符由于作用到初态或末态上而得出初末态中粒子的波函数,在图形中表现为外线. 传播子则起始于一个作用点而终于另一个作用点,故表现为内线. 这样就构成了费曼图形.

---

① 在作第四项和第五项缩并时,我们可把 $\hat{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\hat{\psi}(x_2)\hat{A}_\nu(x_2)$ 作为整体移到 $\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu\hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1)$ 的左边. 由于换位的是双费米子算符,故不需加负号.

(3.5.6)式中第一项不含场算符的缩并，而每个未缩并的场算符又可分解为吸收和发射两个部分，故将它们乘开后共有 $2^6$ 即 64 个分项，每个分项对应一个费曼图形. 它们即为两组"图 3.5.1 中图形"的外乘，即两次"作用"互不关联，如图 3.5.2 所示：

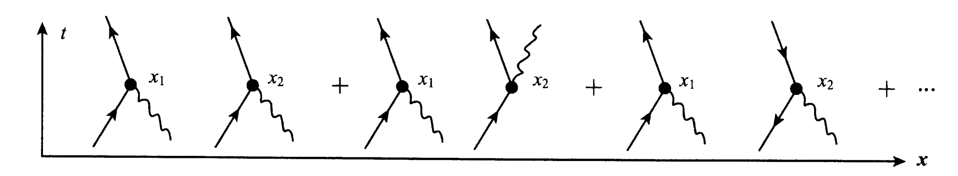



图 3.5.2　$S^{(2)}$ 中不含场算符缩并的八个图

每次作用所联系的都是三条外线，对应于三个初终态中的波函数. 在对四维 $x_1$ 和四维 $x_2$ 积分后，将得出两个四维 δ 函数. 如前所述，这种四维 δ 函数对于自由的正负电子和光子是不可能满足的.

(3.5.6)式第二项所对应的图形带有四根外线，都是电子或正电子，它们是由未缩并的 $\hat{\bar{\psi}}(x_1)$、$\hat{\psi}(x_1)$、$\hat{\bar{\psi}}(x_2)$和 $\hat{\psi}(x_2)$所贡献的. 另有一个光子的传播子连接两个作用点. 正规乘积的数目共有 $2^4$ 即 16 个，对应的有 16 个图形. 如前所述，由未缩并的 $\hat{\psi}(x_i)$所生成的外线，箭头总是指向作用点 $x_i$，由未缩并的 $\hat{\bar{\psi}}(x_i)$生成的外线则正好反过来. 四根外线在初末态中的分布有 2 − 2 分布，1 − 3 分布和0 − 4分布四类. 例如图 3.5.3 所示的情况.

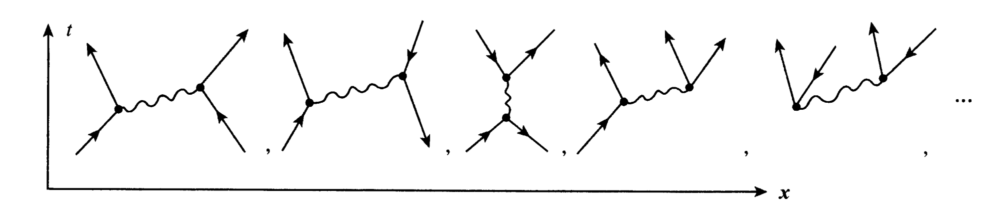



图 3.5.3　$S^{(2)}$ 中含四根外线的图形

在初末态中电子(无论正负)是自由的情况，能量守恒排除了外线为 1 − 3 分布和0 − 4分布的图形. 剩下的 2 − 2 分布图形包括电子 − 电子散射，正电子 − 正电子散射和电子 − 正电子散射三种过程. 相应的图形相应地分为三组：第一组就一个图[图 3.5.4(a)]，代表电子 − 电子散射. 在两个作用点 $x_1$ 和 $x_2$ 处发生的都是电子吸收一个或放出一个光子过程. 当 $t_1 < t_2$ 时，一个电子于 $t_1$ 时刻在 $\boldsymbol{x}_1$ 处放出一个光子而另一个电子于 $t_2$ 时刻在 $\boldsymbol{x}_2$ 处吸收一个光子. 当 $t_1 > t_2$ 时，则反过来. 第

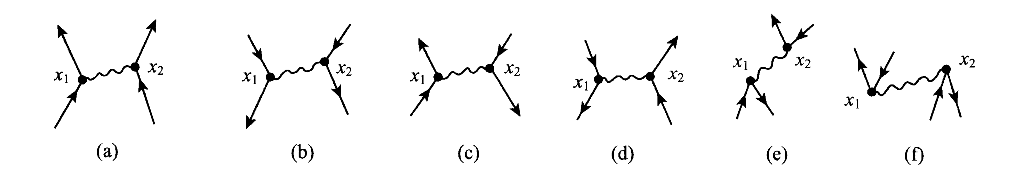



图 3.5.4 外线为 2－2 分布情况中,电子(正电子)散射图形

二组图也只有一个[图 3.5.4(b)],代表正电子－正电子散射.情况与上述电子－电子散射一样.第三组图含四个[图 3.5.4(c)、(d)、(e)、(f)],代表正电子－电子散射,其中前两个[图 3.5.4(c)、(d)]仍然是通过传递光子来实现散射的,与前面两图相似,只是在点 $x_1$ 处,前一个图[图 3.5.4(c)]是电子与光子作用(吸收或放出光子),另一个图[图 3.5.4(d)]则是正电子与光子作用.后两个图[图 3.5.4(e)和(f)]则是通过一种新的机制来实现散射的.当 $t_1 < t_2$ 时,图 3.5.4(e)是正负电子在 $t_1$ 时刻于 $\boldsymbol{x}_1$ 点湮没成一个光子,该光子在 $t_2$ 时刻传到 $\boldsymbol{x}_2$ 处再转化成一对正负电子,而图 3.5.4(f)则是在 $t_1$ 时刻于 $\boldsymbol{x}_1$ 点从真空中产生了末态中的一对正负电子外加一个光子(如同图 3.5.1 中第 6 个图),这一产生过程能量肯定不守恒,故不能长久存在;当该光子于 $t_2$ 时刻传到 $\boldsymbol{x}_2$ 时,初态中的一对正负电子通过湮没把此光子吸收掉使得初态的能量与终态(也是一对正负电子)能量相等,从而使得该过程成为一个实过程.以上是 $t_1 < t_2$ 的情况,若 $t_1 > t_2$ 则两个图的情况正好反过来.

(3.5.6)式第三项亦有四个未缩并的算符 $\hat{\bar{\psi}}(x_1)$,$\hat{\psi}(x_2)$,$\hat{A}_\mu(x_1)$和 $\hat{A}_\nu(x_2)$,展开后亦有 16 个正规乘积项.对应 16 个图形.每个图形有两根电子或正电子的外线,两根光子外线.一个电子传播子连接 $x_1$ 和 $x_2$.四根外线在初末态的分配同样有 2－2 分布,1－3 分布和 0－4 分布.同样能使能量守恒满足的只有 2－2 分布.此分布亦只有六个图形.图 3.5.5(a)代表双光子转化为电子对.在 $t_1 < t_2$ 时,首先是一个光子于 $t_1$ 时刻在 $\boldsymbol{x}_1$ 产生电子对,其中正电子于 $t_2$ 传到 $\boldsymbol{x}_2$ 处又将初态中另一个光子吸收掉.$t_1 > t_2$ 情况相似,只是一个光子于 $t_2$ 时刻先在 $\boldsymbol{x}_2$ 产生电子

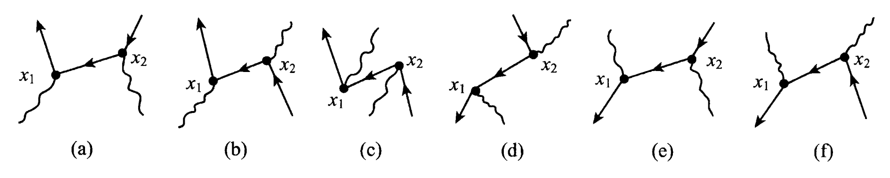



图 3.5.5 外线为 2－2 分布中,含二个光子外线和二个电子或正电子外线的图形

对,其中电子于 $t_1$ 时刻传到 $\boldsymbol{x}_1$ 处时将初态中另一个光子吸收掉.图 3.5.5(b),(c)是光子-电子散射.当 $t_1<t_2$ 时,图 3.5.5(b)表示一个光子于 $t_1$ 在 $\boldsymbol{x}_1$ 处产生电子对,其中正电子在 $t_2$ 时刻传到 $\boldsymbol{x}_2$ 时与初态中电子湮没为一个光子,而图 3.5.5(c)表示在 $t_1$ 时刻于 $\boldsymbol{x}_1$ 点从真空中产生一对正负电子加一个光子,其中正电子于 $t_2$ 时刻传到 $\boldsymbol{x}_2$ 处时与初态中电子湮没并吸收掉初态中光子.对于 $t_1>t_2$ 情形可类似地讨论.图 3.5.5(d),(e)是光子与正电子散射,当 $t_1<t_2$ 时,图 3.5.5(d)表示正电子在 $t_1$ 时刻于 $\boldsymbol{x}_1$ 处吸收掉初态中光子然后于 $t_2$ 时刻传到 $\boldsymbol{x}_2$ 再放出一个光子,而图 3.5.5(e)表示 $t_1$ 时刻正电子在 $\boldsymbol{x}_1$ 处先发出一个光子然后在 $t_2$ 时刻在 $\boldsymbol{x}_2$ 处再把初态中光子吸收掉.当 $t_2>t_1$ 时亦可仿此进行讨论.最后一个图 3.5.5(f)则表示正负电子对湮没为一对光子.讨论可类似地进行,不再重复.值得注意的一点是,实线总是连续地从一个作用点进入再传到另一个作用点后出去.

(3.5.6)式第四项与第三项的差别只是 $x_1$ 与 $x_2$ 作了对换,但 $x_1$ 和 $x_2$ 都是积分变量,积分限并都是从 $-\infty$ 到 $+\infty$.因此第四项最终的贡献与第三项相同.下面转到(3.5.6)式第五项.此项有两对缩并,所得出的两个电子传播子构成一个封闭的圈.外线是两个光子线.二根外线在初末态中的分布有 1-1 分布,2-0 分布和 0-2 分布.只有 1-1 分布能使能量守恒定律成立,它共有二个图形.当 $t_1<t_2$ 时,第一个图形是:$t_1$ 时刻在 $\boldsymbol{x}_1$ 处初态光子转化为正负电子对,该正负电子对在 $t_2$ 时刻又在 $\boldsymbol{x}_2$ 处湮没成光子,第二个图形相应的过程则为:在 $t_1$ 时刻于 $\boldsymbol{x}_1$ 处从真空中产生了末态光子并附加一对正负电子,该正负电子对在 $t_2$ 时刻于 $\boldsymbol{x}_2$ 处湮没并吸收掉初态中的光子.$t_2<t_1$ 时两图对应的过程正好互相对换.

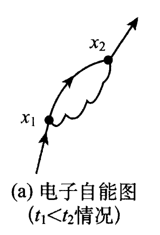
图 3.5.6 表示第五项,通常称为真空极化图.意思是说在有光场存在时真空中出现了正负电荷相分离的现象好像介质在光场(电磁场)存在时出现的极化一样.

$x_2$ $x_1$ $x_2$ $x_1$

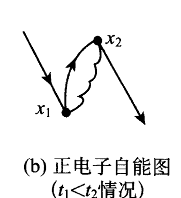
图 3.5.6 真空极化图形

(3.5.6)式第六、第七两项实际一样只是 $x_1\leftrightarrow x_2$.$\mu\leftrightarrow\nu$.我们只需考察第六项.能使能量守恒的图亦只有两个.在 $t_1<t_2$ 时两个图如图 3.5.7 所示.第一个图[图 3.5.7(a)]表示在四维 $x_1$ 点处初态中电子发出一个光子,然后该电子在四维 $x_2$ 点处又把光子吸收掉.这就是前面所说过的自由电子可以在它的周围产生虚光子(在高级微扰论中还可以产生多个虚光子,如图 3.5.8 所示)的情况,这种虚光子也就是电动力学中所说的电子的自场,它的能量将使电子获得一个附加的质量即所谓的电磁质量.因而这个图通常称为电子的自能图,至于图 3.5.7(b)则代表正电子所产生的“自场”这个“自场”中不仅有一个光子还有一对正负电子.如果考虑 $t_1>t_2$ 情况,电子的自

场中也会有这种含一个光子附加一对正负电子的成分，正电子的自场中也有只含单个光子的成分.




(a) 电子自能图
($t_1<t_2$情况)




(b) 正电子自能图
($t_1<t_2$情况)

图 3.5.7

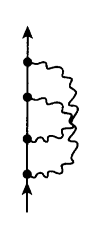


图 3.5.8　高阶微扰论中产生两个虚光子的电子自能图

在量子电动力学中，电子的自能图还有另一个效应，称作电子波函数的重正化. 根据上面的讨论，一个物理的电子只有一定的概率为裸电子，另有一定的概率带有一个或多个虚光子，甚至带有虚电子对. 因此物理电子也称作缀饰电子. 反过来，一个裸电子也只有一定的概率为物理电子. 这就导致了要对电子线作波函数重正化(同样，真空极化图形(图 3.5.6)表明物理光子也只有一部分概率为裸光子(反之亦然)因而对光子也要作波函数重正化). 在本课中由于我们只作最低阶的微扰计算，不考虑像图 3.5.6 和图 3.5.7 那样的圈图以及含这种图的表示高阶修正的图形，因此不再对此作进一步讨论. 从以上讨论我们看见，费曼-戴逊理论中的每一项包括了许多物理过程，从而大大简化了理论计算.

对于 $\hat{S}^{(3)}$ 以及更高阶的 $\hat{S}^{(n)}$ 可作类似的分析讨论，由于本课只用到 $\hat{S}^{(2)}$，这些讨论就不再进行. 顺带指出的是，在量子电动力学中，光子与光子也可以发生散射，不像经典光学中所说的那样，两束光可以互不干扰地交叉通过. 光子－光子散射至少需要四阶微扰才能实现，并要通正负电子对的产生和最终的湮灭. 其中一个图形如右所示. 由于 $t_1, t_2, t_3$ 和 $t_4$ 的相对大小可以构成很多种组合，故仅此一图所对应的中间物理过程就有许多种情况，如 $t_2<t_4<t_1<t_3, t_2<t_3<t_1<t_4, \cdots$，所对应中间物理过程就与图 3.5.9 所对应的不同. 但在用费曼规则计算时它们都包括在同一个被积函数对 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 的从负无穷到正无穷积分之中，也使处理大大简化.

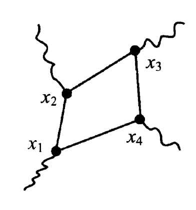



图 3.5.9　光子-光子散射图形(举例)

值得提出的是，由于维克定理 2，在 $\hat{S}^{(2)}$ 中并不出现像图 3.5.10 那样的图形. 因为这些图来自同一个 $\hat{\mathscr{H}}_{\text{int}}^{(I)}$ 内 $\hat{\bar{\psi}}$ 与 $\hat{\psi}$ 间的缩并.

量子电动力学已成为一门十分精确的理论，经受了实验上的严格验证. 主要有兰姆频移和电子的反常磁矩等效应. 电子反常磁矩体现在电子在静磁场中的散射

中．电子在静磁场中散射的最低级近似值由图 3.5.11(a)给出，其中……代表静磁场，引起散射的是电子的正常磁矩 $\mu_0(\frac{e\hbar}{2mc})$ 与磁场的作用．下一级的修正由图 3.5.11(b)、(c)、(d)给出．修正的结果可以表示为电子有一个附加的磁矩（即反常磁矩）．实验给出电子的总磁矩为 $\mu$，它与 $\mu_0$ 即 $\frac{e\hbar}{2mc}$ 的差别代表反常磁矩，

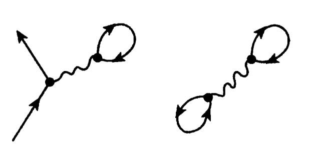


图 3.5.10　由于维克定理 $S^{(2)}$ 中不会出现的图形

$$\mu = (1.0011596524 \pm 0.0000000002)\mu_0.$$

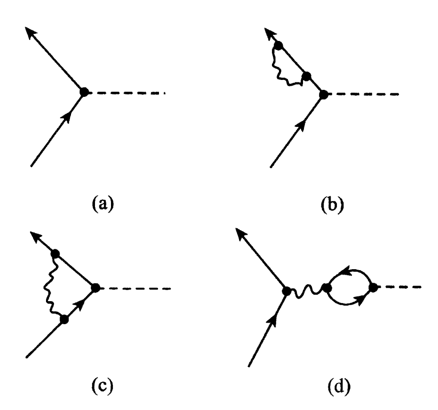



图 3.5.11　虚线代表静磁场

(a) 正常磁矩所对应的图形．

(b)～(d)反常磁矩所对应的图形．

其精确度达到百亿分之二．而如图 3.5.11 所给出的二级微扰修正值为

$$\mu = 1.0011614\mu_0,$$

与实验的相差已为百万分之二．再考虑更高阶的修正后，理论值已变为

$$\mu = 1.0011596524\mu_0,$$

即与实验值的 11 个数字完全相同．

关于兰姆频移，可参见§6.1 第一小节末处的注．

# 第四章　微扰论的应用——电磁跃迁

在前面三章中,我们阐述了量子电动力学的基本概念和理论,以及微扰论的计算方法.本章的内容就是应用这些理论和方法来研究光子与电子相互作用所引起的跃迁.这种跃迁包括原子对光的吸收和辐射,电子在库仑势中辐射光子(轫致辐射),光子与原子或自由电子的散射,双光子转化成正负电子对以及正负电子对湮没为双光子等.在光学中感兴趣的是第一类和第三类.我们在本章中将依次对前三类进行研究和讨论.通过微扰论来计算相应过程的跃迁率和角分布等.在本章中所有算符都在作用图象中,故上标$(I)$将略去不写.

## §4.1　原子对光子的吸收和辐射

在§3.5中我们曾经指出,自由电子不能吸收光子也不能辐射光子.这里所说的吸收和辐射是指最终实现的吸收和辐射,通常把这种能最终实现的过程叫实过程,以区别只短暂存在的“虚”过程(中间过程).同时我们还指出,对于束缚态电子,情况有所不同.束缚态能级上的电子波函数,能量虽然一定,但动量的大小和方向都有一个分布,这样可在首先满足能量守恒的要求下,选取波函数中适当的成分来使动量守恒也得到满足.原子对光子的吸收和辐射就属于这种情况.本节将对这种过程进行研究,求出相应的跃迁率以及角分布等.由于电磁作用相当微弱,我们只需计算最低阶的非零微扰项就够了(从§3.5最后所举的电子反常磁矩和兰姆位移的计算,可以看见高阶修正值只不过是初级值的千分之几).在本节中,初级值即就是一阶微扰论的结果.

### 1. 原子吸收和辐射光子的 $S$ 矩阵元

原子中外层电子的运动速度 $v$ 与光速 $c$ 相比是一个小量.我们可用经典理论对$\frac{v}{c}$的量级作一估计.设电子在原子中运动的半径为 $a$,则其运动的周期即为$\frac{2\pi a}{v}$.而按经典理论电子运动的周期也就是其发射光波的周期$\frac{\lambda}{c}$,由此得出

$$\frac{v}{c}=\frac{2\pi a}{\lambda}=ka, \tag{4.1.1}$$

即$\frac{v}{c}$等于电子的运动半径$a$与所发光波的约化波长$\lambda\!\!\!^{-}(=\lambda/2\pi)$的比值.对于光学

波段的发光,这一比值的量级为 $10^{-2}$,因若设电子在"原子心"的库仑力作圆周运动,原子心的电荷为 $z_{\text{eff}}e$,则由向心加速度与库仑力相等的公式 $\frac{mv^2}{a}=\frac{z_{\text{eff}}e^2}{a^2}$ 即得出 $v=\sqrt{\frac{z_{\text{eff}}e^2}{ma}}$,从而 $\frac{v}{c}=\sqrt{\frac{z_{\text{eff}}r_c}{a}}$,其中 $r_c=\frac{e^2}{mc^2}$ 为电子的经典半径,其值约为 $2.8\times10^{-13}$ cm. 当 $z_{\text{eff}}$ 量级为 1 时,$a$ 的量级为玻尔半径 $a_{\text{B}}$,$\frac{v}{c}$ 量级即为 $10^{-2}$. 于是 $\frac{v^2}{c^2}\ll1$,我们可用非相对论来处理原子的辐射过程(不过,对于重核的内层电子,由于 $a\sim\frac{1}{z_{\text{eff}}}a_{\text{B}}$,而 $z_{\text{eff}}\simeq z$ 为一大值,$v$ 可达 $c$ 的几分之一,就需考虑非相对论修正).

另外,我们可以忽略原子在发射(或吸收)光子时的反冲,因核反冲速度为 $\frac{\hbar k}{M}$,$M$ 为原子核的质量. 反冲速度与原子中束缚电子速度 $v$ 之比为 $\frac{\hbar k}{Mv}=\frac{m}{M}\frac{\hbar k}{mv}$. 另外,由(4.1.1)式,$k=\frac{v}{ca}$,于是 $\frac{\hbar k}{mv}=\frac{\hbar}{mca}$,即"辐射(或吸收)的光子的动量 $\hbar k$ 与电子轨道运动动量 $mv$ 的比"约等于电子的(约化)康普顿波长 $\frac{\hbar}{mc}$ 与原子半径 $a$ 的比. 若 $a$ 用玻尔半径 $a_{\text{B}}=\frac{\hbar^2}{me^2}$ 来估计,此值即为精细结构常数 $\frac{e^2}{\hbar c}$. 再加上 $\frac{m}{M}\sim10^{-3}$,故 $\frac{\hbar k}{Mv}\sim10^{-5}$. 这样无论是发射还是吸收光子通常可认为原子是静止的. 即末态中的电子波函数仍可取为静止原子的定态波函数.

在非相对论理论中,若略去自旋与(光场中)磁场的作用项,则相互作用哈密顿量为(参见(2.4.7)或(3.1.48)式)

$$\hat{H}_{\text{int}}(t)=-\frac{\mathrm{i}e\hbar}{mc}\int\hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\left[\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla+\frac{\mathrm{i}e}{2\hbar c}\hat{A}^2(\boldsymbol{x},t)\right]\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-\epsilon|t|}\mathrm{d}^3x, \tag{4.1.2}$$

我们来估计 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中第一项与原子中电子动能的比值以及 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中两项的比值. 它们的量级皆为 $\frac{eA}{pc}$. 不难得出[①],只当光场中 $E$ 达到 $\frac{z_{\text{eff}}e}{a^2}$ 时,$\frac{eA}{pc}$ 的量级才为 1,而在光场中,除非是高强的超短脉冲,$E$ 是远小于 $\frac{z_{\text{eff}}e}{a^2}$ 的. 这表明微扰论成立,而且 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中

---

① 利用前述公式 $\frac{mv^2}{a}=\frac{z_{\text{eff}}e^2}{a^2}$ 及 $v\approx\omega a$ 即得 $p\approx\frac{z_{\text{eff}}e^2}{\omega a^2}$. 于是从 $\frac{eA}{pc}\approx1$ 即得出 $E=\frac{\omega A}{c}\approx\frac{z_{\text{eff}}e}{a}$.

的第二项(双光子作用项)比第一项要小得多.另外在 $ka$ 比 1 小得多情况,若略去矢势中平面波因子 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 在原子范围内的变化,则由于原子初末态的正交性,$\hat{H}_{\text{int}}$ 中第二项的跃迁矩阵元将为零.以上讨论表明,$\hat{H}_{\text{int}}$ 中的双光子作用项在研究原子的辐射率和吸收率时通常可以忽去(但双光子项并非总不重要.在原子与光子的弹性散射问题中,它就有重要贡献.参见§4.5).

在作用图象中,电子波函数算符 $\hat{\phi}(x)$ 的展式为

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{l} \hat{\alpha}_{l} \phi_{l}(\boldsymbol{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_{l}t}, \tag{4.1.3}$$

其中 $\phi_l(\boldsymbol{x})$ 为方程

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\phi_l(\boldsymbol{x}) = E_l\phi_l(\boldsymbol{x}) \tag{4.1.4}$$

的解.电磁势 $\hat{\boldsymbol{A}}(x)$ 满足横场条件

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{4.1.5}$$

并可用横平面波展开[参见(1.3.33)式和(1.3.2)式].哈密顿量中原子和辐射场部分可表示为

$$\hat{H}_{\text{rad}} = \sum_{\boldsymbol{k}s} \hat{n}_{\boldsymbol{k}s}\hbar\omega,\ s = 1,2, \tag{4.1.6}$$

$$\hat{H}_{\text{at}} = \int \hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}^3x = \sum_{l} \hat{\alpha}_{l}^{\dagger}\hat{\alpha}_{l}E_{l}. \tag{4.1.7}$$

在推导(4.1.7)第二等式时,我们先将(4.1.3)式代入,然后利用了(4.1.4)式以及不同 $\phi_l(\boldsymbol{x})$ 之间的正交性.在略去双光子作用项后,$\hat{H}_{\text{int}}$ 只剩下(3.1.49)式右方第一项,用这里的符号表示即为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}}(t) &= -\frac{i\hbar e}{mc}\int \hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t)\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\nabla\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}^3x \\ &= i\hbar\sum_{ll'\boldsymbol{k}s}\Big[g_{ll'}^{\boldsymbol{k}s}\hat{\alpha}_{l}^{\dagger}\hat{\alpha}_{l'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{l'}-E_{l}+\hbar\omega)t} \\ &\quad + \bar{g}_{ll'}^{\boldsymbol{k}s}\hat{\alpha}_{l}^{\dagger}\hat{\alpha}_{l'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}^{\dagger}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{l'}-E_{l}-\hbar\omega)t}\Big],\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

其中 $g_{ll'}^{\boldsymbol{k}s}$ 和 $\bar{g}_{ll'}^{\boldsymbol{k}s}$ 具有频率的量纲,其表达式已由(3.1.49)和(3.1.50)式给出,即

$$\bar{g}_{ll'}^{\boldsymbol{k}s} = -(g_{l'l}^{\boldsymbol{k}s})^*$$

$$g_{ll'}^{\boldsymbol{k}s} = -\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi_l^{\dagger}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}s}\cdot\nabla)\phi_{l'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x. \tag{4.1.9}$$

对原子的束缚态,(4.1.9)式右方的积分域的尺度即为原子半径 $a$.在 $ka \ll 1$ 的情况下,被积函数中的 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 可近似取为 1(设坐标原点取在原子的中心),再由

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V,\ x_j\right] = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{x\partial_j}, \tag{4.1.10}$$

即可将(4.1.9)式右方的$\nabla$用$-\frac{m}{\hbar^2}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V,\ \boldsymbol{x}\right]$代入,再利用(4.1.4)式及其共轭式即可得

$$\int\phi_l^\dagger(\boldsymbol{x})\nabla\phi_{l'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=-\frac{m}{\hbar^2}(E_l-E_{l'})\int\phi_l^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\phi_{l'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=-\frac{m}{\hbar}\omega_{ll'}\langle\boldsymbol{x}\rangle_{ll'},\tag{4.1.11}$$

其中$\omega_{ll'}=\frac{1}{\hbar}(E_l-E_{l'})$,为原子从态$l'$→态$l$时的辐射频率,$\langle\boldsymbol{x}\rangle_{ll'}$为$\boldsymbol{x}$从态$l'$到态$l$的跃迁矩阵元.(4.1.11)式也可写成

$$\langle\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{ll'}=\mathrm{i}m\omega_{ll'}\langle\boldsymbol{x}\rangle_{ll'},\tag{4.1.12}$$

与$\hat{\boldsymbol{p}}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$相一致.若再引入电子的电偶极矩的跃迁矩阵元

$$\langle\boldsymbol{d}\rangle_{ll'}=-e\langle\boldsymbol{x}\rangle_{ll'},\tag{4.1.13}$$

则有效耦合常数$g_{ll'}^{ks}$在略去被积函数中$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$的情况下可表示为

$$g_{ll'}^{ks}=-\sqrt{\frac{2\pi}{V\hbar\omega}}\omega_{ll'}\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{ll'},\tag{4.1.14}$$

它与电偶极矩的跃迁矩阵元$\langle\boldsymbol{d}\rangle_{ll'}$在光子偏振基矢$\boldsymbol{e}_{ks}$上的投影成正比.

下面考虑原子吸收光子的过程.原子初态波函数为能量较低的$\phi_1(\boldsymbol{x})$,末态波函数为能量较高的$\phi_2(\boldsymbol{x})$,电磁场初态为$n$个"具有波矢$\boldsymbol{k}$和偏振$s$"的光子,末态为$n-1$个该模的光子.于是相应的初级微扰论$S$矩阵元为

$$\begin{aligned}\langle\phi_2,n-1\mid\hat{S}^{(1)}\mid\phi_1,n\rangle&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\phi_2,n-1\mid\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)\mid\phi_1,n\rangle\mathrm{d}t\\&=2\pi\hbar\sqrt{n}g_{21}^{ks}\delta(E_1-E_2+\hbar\omega)\\&=2\pi\mathrm{i}\sqrt{n}\boldsymbol{E}_{ks}(0)\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}\delta(E_1-E_2+\hbar\omega),\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

其中$\boldsymbol{E}_{kj}(0)$为$\boldsymbol{x}=0$点(即原子所在地点)($\boldsymbol{k}s$)模的电场波函数(它等于$\boldsymbol{E}_T$展开(1.3.33)中$\hat{a}_{ks}$的系函数),

$$\boldsymbol{E}_{ks}(\boldsymbol{x})=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\boldsymbol{e}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}.\tag{4.1.16}$$

从而(4.1.15)式右方的$\mathrm{i}\boldsymbol{E}_{ks}(0)\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}$代表一个位于原点的电偶极子(其电偶极矩为$\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}$)在电场$\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\boldsymbol{e}_{ks}$中的能量.

对于原子辐射光子的过程,$S$矩阵元可以相应地得出.这时初态中原子的波函

数为 $\phi_2(\boldsymbol{x})$,光子数为 $n$;末态中原子波函数为 $\phi_1(\boldsymbol{x})$,光子数为 $n+1$. 于是有

$$
\begin{aligned}
\langle \phi_1, n+1 \mid \hat{S}^{(1)} \mid \phi_2, n \rangle &= 2\pi\hbar \sqrt{n+1}\,\bar{g}_{12}^{ks}\delta(E_1 - E_2 + \hbar\omega) \\
&= -2\pi\mathrm{i}\sqrt{n+1}\,\boldsymbol{E}_{ks}^{*}(0)\cdot\langle \boldsymbol{d}\rangle_{12}\delta(E_1 - E_2 + \hbar\omega).
\end{aligned}
\tag{4.1.17}
$$

(4.1.15)和(4.1.17)式中的 $\delta$ 函数表明,只当 $\hbar\omega = E_2 - E_1$ 即光子能量与原子两能级的能量差相等时,吸收或辐射的 $S$ 矩阵元才不为零. 这就是实过程的能量守恒关系. 它是作用时间取为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的结果. 实际对作用时间的要求是: $T$(从 $-\frac{T}{2}$ 到 $\frac{T}{2}$)要远大于 $\frac{\hbar}{\delta E}$,其中 $\delta E$ 为能量观测的精度(在原子物理中 $\delta E$ 又应比原子能级间隔小得多),于是粗略地说,应有 $\sqrt{\omega_0 T} \gg 1$. 另外,我们注意到,$S$ 矩阵元除了正比于相应的有效耦合常数 $g$ 或 $\bar{g}$(它们相当于量子力学中原子在单光子势中的跃迁矩阵元)外,还分别与 $\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{n+1}$ 成正比.

### 2. 原子对连续谱入射光的吸收率

从上面给出的吸收过程的 $S^{(1)}$ 矩阵元可以得出从初态 $|\phi_1, n\rangle$ 跃迁到末态 $|\phi_2, n-1\rangle$ 的吸收率. 首先,我们把 $S^{(1)}$ 矩阵元绝对值平方写成

$$
|\langle \phi_2, n-1 \mid \hat{S}^{(1)} \mid \phi_1, n \rangle|^2 = 2\pi\hbar n \mid g_{21}^{ks} \mid^2 \delta(E_1 - E_2 + \hbar\omega) \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_1 - E_2 + \hbar\omega)t}\mathrm{d}t,
$$

其中 $T$ 代表作用时间. 由于 $\delta$ 函数,上式右方对 $t$ 积分中的被积函数可取为 1,于是我们得出单位时间内从初态到末态的跃迁概率也就是

$$
\begin{aligned}
w &\equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T} \mid \langle \phi_2, n-1 \mid \hat{S}^{(1)} \mid \phi_1, n \rangle \mid^2 = 2\pi n \mid g_{21}^{ks} \mid^2 \delta(\omega - \omega_0) \\
&= \frac{2\pi}{\hbar^2} n \mid \boldsymbol{E}_{ks}(0)\cdot\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21} \mid^2 \delta(\omega - \omega_0),
\end{aligned}
\tag{4.1.18}
$$

其中 $\omega_0$ 代表原子跃迁频率 $\frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1)$. 值得指出的是,我们虽然求的是单位时间的跃迁概率. 但作用时间 $T$ 仍需取为大值($T \gg \frac{\hbar}{\delta E}$)以使能量守恒成立,再除以 $T$,以给出瞬时吸收率①.

---

① 在微扰论的架构中,当取到一级微扰时,含耦合常数平方以及更高次方的项都将略去,故除初态外,其他态都对归一化无贡献(因此(4.1.17)式的成立要求 $\sqrt{n+1}\,|\bar{g}|\,T \ll 1$,其中 $T$ 又要足够地大,满足 $\sqrt{\omega_0 T} \gg 1$).

当入射光具有密集的谱线可看作是连续的谱分布时,我们可以引入谱密度函数并将对频率的求和表示成积分的形式.设入射光是偏振的平面波,在 $\omega$ 到 $\omega+\mathrm{d}\omega$ 范围内谱线数为 $\rho(\omega)\mathrm{d}\omega$,光子数的频谱分布为 $n(\omega)$,于是得 $s$ 偏振的入射光的总吸收率为

$$W^s=\int w\rho(\omega)\mathrm{d}\omega=2\pi n(\omega_0)\mid g_{21}^{k_0 s}\mid^2\rho(\omega_0)$$

$$=\frac{2\pi}{\hbar^2}n(\omega_0)\mid \boldsymbol{E}_{k_0 s}(0)\cdot\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}\mid^2\rho(\omega_0).\tag{4.1.19}$$

入射光在 $\omega$ 到 $\omega+\mathrm{d}\omega$ 内的光强为

$$I(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{c}{V}n(\omega)\rho(\omega)\hbar\omega\mathrm{d}\omega,\tag{4.1.20}$$

将(4.1.19)式中的 $\rho(\omega_0)$ 换用 $I(\omega_0)$ 表示,并将 $\boldsymbol{E}_{k_0 s}$ 用(4.1.16)式代入,即得

$$W^s=\frac{4\pi^2}{\hbar^2 c}\mid \boldsymbol{e}_{ks}\cdot\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}\mid^2 I(\omega_0).\tag{4.1.21}$$

这就是我们所需要推求的原子对具有连续谱,偏振为 $s$ 的入射光的吸收率,它与入射光强的谱密度 $I(\omega)$ 成正比,与跃迁电偶极矩在偏振方向上投影的平方成正比.后一因子体现了所涉及的原子跃迁与光场之间的关系.

如果入射光是线偏振的,结果还可以进一步简化.先看 $\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}$ 的实部与虚部方向相同的情况,这时除了一个相因子外,$\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}$ 为一个实矢量.于是从图 4.1.1 可以看出

$$\mid \boldsymbol{e}_{ks}\cdot\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}\mid^2=\mid\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}\mid^2\sin^2\theta\cos^2\chi,\tag{4.1.22}$$

在图 4.1.1 中取 $\boldsymbol{e}_{ks}$ 与基矢 $\boldsymbol{e}_2$ 方向相同,$\boldsymbol{k}$ 的方向在 $\boldsymbol{e}_3$ 方向.图中 $\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}$ 为已分出相因子的实矢量.于是 $\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}$ 在 $\boldsymbol{e}_{ks}$ 方向上投影就等于它先在 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 平面上的投影然后再在 $\boldsymbol{e}_2$(即 $\boldsymbol{e}_{ks}$)方向上投影.第一次投影给出 $\sin\theta$,第二次投影又给出 $\cos\chi$.对于非偏振光,$\boldsymbol{e}_{ks}$ 并非具有确定的方向,它在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面即 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 平面内随机地分布.换句话在 $\chi$ 将在 0 到 $2\pi$ 范围内以均匀的概率取值.于是我们应该对(4.1.22)式中的 $\cos^2\chi$ 求平均:

$$\overline{\cos^2\chi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\chi\mathrm{d}\chi=\frac{1}{2}.\tag{4.1.23}$$

由此得出连续谱的非偏振光的总吸收率为

$$W=\frac{2\pi^2}{\hbar^2 c}\mid\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}\mid^2\sin^2\theta\, I(\omega_0).\tag{4.1.24}$$

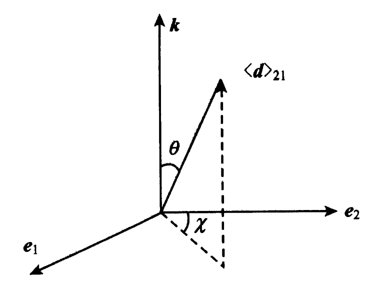



图 4.1.1　$\langle \boldsymbol{d}\rangle$ 的方位图(在其实部与虚部方向相同的情况下)

以上 $W$ 是指光子的总吸收率，如果要推求的是能量的总吸收率，只需再乘上 $\hbar\omega_0$ 即可，结果即为

$$U = \hbar\omega_0 W = \frac{2\pi^2\omega_0}{\hbar c} |\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2 \sin^2\theta I(\omega_0). \tag{4.1.25}$$

当 $\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}$ 的实部与虚部方向不同时，只需将它们分开处理，结果只是将(4.1.25)式中的 $|\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2 \sin^2\theta$ 换成 $|\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}^R|^2 \sin^2\theta_R + |\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}^I|^2 \sin^2\theta_I$，其中 $\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}^R$ 和 $\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}^I$ 分别为 $\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}$ 的实部和虚部，$\theta_R$ 和 $\theta_I$ 分别为它们与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角.

如果处理的是气体中大量原子的吸收，它们的跃迁偶极矩 $\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}$ 在空间的取向是无规的，那么无论入射光是偏振的还是非偏振的，平均每个原子的光子数吸收率都由下式表示：

$$\overline{W} = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2 c} |\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2 I(\omega_0). \tag{4.1.26}$$

此式若从(4.1.24)式来推求，只需将 $\sin^2\theta$ 用其平均值

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{4\pi}\int \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega = \frac{2}{3}, \tag{4.1.27}$$

代入即得. 如果从(4.1.21)式来推求，只是把 $|\boldsymbol{e}_{ks} \cdot \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2$ 取成其随机取向的平均值 $\frac{1}{3}|\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2$ 即可.

通常把(4.1.26)式中 $\frac{2\pi}{c}I_0(\omega)$ 前的系数称为爱因斯坦 $B$ 系数，即

$$B = \frac{2\pi}{3\hbar^2} |\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2, \tag{4.1.28}$$

于是(4.1.26)式可表示为

$$\overline{W} = \frac{2\pi}{c} B I(\omega_0). \tag{4.1.29}$$

上式中因子 $\frac{1}{c}$ 所起的作用是把光强的谱密度 $I(\omega_0)$ 换成光能的谱密度，而因子 $2\pi$ 的作用是把单位角频率的光强换成单位周频率的光强.

最后，我们就谐振子情况将量子理论的结果与经典理论结果作一比较. 对一维量子谐振子情况，当 $\phi_1$ 取为基态，$\phi_2$ 取为第一激发态时，

$$|\langle \boldsymbol{x} \rangle_{21}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

于是得

$$U = \frac{2\pi^2 e^2}{3mc} I(\omega_0).$$

值得注意的是,此式已不含普朗克常数.对于三维谐振子,由于第一激发态共三个,于是相应的 $U$ 为上式右方的三倍,即为$\frac{2\pi^2 e^3}{mc}I(\omega_0)$,此结果与经典电动力学的结果一致(见曹昌祺的《电动力学》第五章).这一情况既说明了经典理论的适用性,也表明本节用微扰论计算跃迁率的方法是合理的.

### 3. 自发辐射和受激辐射　辐射率和角分布

我们已在(4.1.17)中给出了辐射过程的 $S$ 矩阵元,于是可同样地求出单位时间内从初态$|\phi_2,n\rangle$到末态$|\phi_1,n+1\rangle$的跃迁率,即原子的辐射率:

$$w=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|\langle\phi_1,n+1|\hat{S}^{(1)}|\phi_2,n\rangle|^2=2\pi(n+1)|\bar{g}_{12}^{ks}|^2\delta(\omega-\omega_0). \tag{4.1.30}$$

从此式可以看出,即使初态中 $n=0$ 即无外来电磁场,原子也可以自发地从上能级跃迁到下能级并辐射光子.这就是原子的自发辐射.它是量子电动力学与量子力学在理论上的一个重要差别所在.从量子力学的观点看来,$\phi_2(\boldsymbol{x})$和 $\phi_1(\boldsymbol{x})$都是原子的定态,如果无外来电磁场或其他微扰作用,处于 $\phi_2(\boldsymbol{x})$态的电子不会跃迁到 $\phi_1(\boldsymbol{x})$而放光.但在量子电动力学中情况就不同了,量子电动力学中的 $\hat{H}_{\text{int}}$ 在无外电磁场的情况下仍能起作用,使原子自发地改变自己状态并辐射光子①.当所发出的光子的能量不等于原子能级间的能量差时,它只能短暂地存在,即为所谓的虚光子.当能量守恒律能满足时,发出的光子就可以离原子而去.量子力学与量子电动力学这一差别在于,量子力学中的"原子与光的相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{\text{int}}$"在无外场时就等于零,从而处于 $\phi_2(\boldsymbol{x})$的束缚电子将保持其状态不变.

根据(4.1.30)和(4.1.9)式,自发辐射率可表示为

$$w_{sp}^{(ks)}=2\pi|g_{21}^{ks}|^2\delta(\omega-\omega_0)=\frac{4\pi^2\omega_0}{\hbar V}|\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2\delta(\omega-\omega_0). \tag{4.1.31}$$

但这一公式给出的只是辐射到特定模($\boldsymbol{k}s$)的辐射率.为了计算原子辐射到任意一个方向立体角范围 $\mathrm{d}\Omega$ 的概率 $\mathrm{d}W$,我们先将"$\mathrm{d}^3k$ 内具有确定偏振的光子状态数$\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k$[见(3.3.13)式及以下的说明]"表示为

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k=\frac{V\omega^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}{(2\pi c)^3}, \tag{4.1.32}$$

① 人们也可以说这是真空涨落场(在每个模中它的能量等于半个光子)所激发的结果.

再将它乘到 $w_{sp}^{(ks)}$ 上,然后对 $\omega$ 积分并对 $s$ 求和,即得出

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\Omega \sum_{s=1}^{2} \frac{\omega_0^3}{2\pi c^3 \hbar} \mid \boldsymbol{e}_{ks} \cdot \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2. \tag{4.1.33}$$

此值已与归一化的体积无关.下面再来对 $s$ 求和.为计算简单计,设$\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}$实部与虚部方向相同.由图 4.1.1 及(4.1.22)式,

$$\mid \boldsymbol{e}_2 \cdot \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2 = \mid \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2 \sin^2\theta \cos^2 x,$$

$$\mid \boldsymbol{e}_1 \cdot \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2 = \mid \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2 \sin^2\theta \sin^2 x. \tag{4.1.34}$$

代入(4.1.33)式并对 $s=1,2$ 求和,就将 $\mathrm{d}W$ 化为

$$\mathrm{d}W = \frac{\omega_0^3}{2\pi c^3 \hbar} \mid \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega. \tag{4.1.35}$$

$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}$即代表光子辐射率的角分布.相应的能量辐射率的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\Omega} = \hbar\omega_0 \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega_0^4}{2\pi c^3} \mid \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2 \sin^2\theta. \tag{4.1.36}$$

(4.1.36)式与经典电动力学中电偶子的辐射公式相似[参见曹昌祺《电动力学》第五章],只是经典的电偶极矩平方的时间平均值$\overline{\boldsymbol{d}^2(t)}$换成了二倍跃迁电偶极矩绝对值平方$\overline{\boldsymbol{d}^2(t)} \to 2|\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}|^2$.再由于$\overline{\boldsymbol{d}^2(t)} = \frac{1}{2}d_0$,因此对应关系即为

$$d_0^2 \to 4 \mid \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \mid^2.$$

值得指出的是,在量子电动力学中,与经典电偶极矩相对应的既不是电偶极矩算符在初态中的期望值也不是它在末态中的期望值(实际上对于具有确定宇称的初末态波函数,上述期望值等于零),而是电偶极矩算符在初末态之间的矩阵元.

另外还值得回顾的是,归一化体积在 $w_{sp}^{(ks)}$ 中的出现和在$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}$中的消去.在 $w_{sp}^{(ks)}$ 中考虑的是辐射单模中的一个光子,它的能量为 $\hbar\omega$,分布在体积 $V$ 之中.$V$ 愈大,相应的场强或场能密度就愈弱.导致 $w_{sp}^{(ks)}$ 愈小.而在计算$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}$时需要乘上态密度,当 $V$ 愈大时,光子的态密度愈大,从而使得$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}$或$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\Omega}\right)$与所取的归一化体积无关.这一结果从物理上看也是合理的.

如果 $V$ 不是任意取的归一化体积而是一个实际腔的体积,而光场就限制在这个腔内,情况就不同了.特别是微腔,由于 $V$ 很小从而模与模的间隔较大,原子(或半导体中的激子)只在共振的条件下与腔中某个单模场相作用,因此没有状态密度相乘.同时由于 $V$ 的值很小,耦合常数 $g$ 或$\bar{g}$ 将变得甚大(它们与$\sqrt{V}$成反比).若辐射的原子还与腔中其他粒子不断碰撞而有一个

频谱宽度 $\Gamma$，则应将(4.1.31)式乘上谱形因子$\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma}{(\omega_0-\omega_A)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}$再对 $\omega_0$ 积分. 在共振情况下($\omega=\omega_A$)，结果就是用$\frac{2}{\pi\Gamma}$去替代该式中的$\delta(\omega-\omega_0)$因子. 从而得出 $w_{sp}=\frac{8\pi\omega_0}{\hbar\Gamma V}|\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2$，与腔的体积 $V$ 成反比.

将(4.1.35)式对立体角积分，即得出总辐射率

$$W=\frac{4\omega_0^3}{3\hbar c^3}|\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2, \tag{4.1.37}$$

它也就是爱因斯坦的 *A* 系数，量纲为 $\mathrm{T}^{-1}$. 如果用$\overline{|g|^2}$代表$|g|^2$对两个偏振方向和 $\boldsymbol{d}$ 的取向的平均[亦即对(4.1.22)式中的 $\cos^2 x$ 和 $\sin^2\theta$ 平均. 结果如(4.1.23)和(4.1.27)式所示]，则 $A$ 系数又可表示成 $4\pi\overline{|g|^2}\rho(\omega_0)$[此式中 $\rho(\omega)$ 代表按(4.1.31)式求出的单位频率的状态密度，其值为$\frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3}$，$\overline{|g|^2}$的值为$\frac{2\pi\omega_0}{3\hbar V}|\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2$，于是结果与(4.1.37)式一致]. 这一表达式具有更为明显的物理意义.

下面来估计 $W$ 的量级. $|\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}|$的量级为 $ea$，$a$ 为原子的半径，于是

$$W\simeq\frac{\omega_0^3e^2a^2}{\hbar c^3}=\omega_0(k_0a)^2\frac{e^2}{\hbar c}, \tag{4.1.38}$$

由此可得 $W$ 与 $\omega_0$ 的比值$\approx10^{-8}$. 这是一个很小的数①，验证了微扰处理的合理性[这也可以说是通常把$\frac{e^2}{\hbar c}$这个无量纲参数作为电磁作用强度的度量(见第三章引言)的原因].

当初态中有光子时，由(4.1.30)式，$w$ 中还有一项与初态中 $\boldsymbol{k}s$ 模的光子数 $n$ 成正比. 这表明初态中的光子有激发辐射的作用. 因此这项代表受激辐射，或称诱导辐射. 相应的辐射率为

$$w_{\mathrm{ind}}^{(\boldsymbol{k}s)}=nw_{sp}^{(\boldsymbol{k}s)}=2\pi n|\bar{g}_{12}^{\boldsymbol{k}s}|^2\delta(\omega-\omega_0). \tag{4.1.39}$$

受激辐射的光子与初态中的光子在同一模中，这是它与自发辐射的不同之处.

将(4.1.39)式与(4.1.18)式相比较，就可看出受激辐射率与吸收率相等. 在入射光为连续谱的情况下，可利用(4.1.21)、(4.1.24)和(4.1.26)式来得出原子. 在该入射光下的受激辐射率. 由此并得出：爱因斯坦的受激辐射系数亦为

---

① 利用 $\hbar\omega_0=\Delta E\leqslant\frac{e^2}{a}$(设发光的为外层电子)，将此结果代入(4.1.38)式以消去 $a$，可以得出 $W\leqslant\frac{1}{4}\omega_0(\frac{e}{\hbar c})^3$. 此式可给我们关于 $W/\omega_0$ 值的大约概念. 此结果也相当于 $k_0a\approx\frac{1}{2}\frac{e^2}{\hbar c}$.

$\frac{2\pi}{3\hbar^2}|\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2$,与其吸收系数($B$ 系数)相等.

本节讨论的是原子辐射“具有确定动量”光子的过程.虽然它不是辐射“具有确定角动量”光子的过程,但由于将因子 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 近似取为 1,所得结果就只与原子的电偶极矩跃迁矩阵元有关,相当于只考虑了电偶极辐射[该辐射是指放射总角动量量子数 $J=1$ 的光子(参见下节)].对这一结果可作下面的物理解释:光子动量为 $\hbar\boldsymbol{k}$,它是从原子中发射出来的,从而其主要轨道角动量将不大于 $\hbar ka$.在 $ka\ll 1$ 的情况下.轨道角动量的量子数 $l$ 基本上为零,而 $l=0$ 的态只含在 $J=1$ 的电偶极场中.参见(1.5.49)式以及(1.5.27)和(1.5.17)第一式.

## §4.2 电多极辐射和磁多极辐射

多极辐射实际上是指原子辐射“具有确定的能量、总角动量和宇称”的光子.由于这种辐射的辐射率与原子的多极矩相联系,因而被称为多极辐射.在原子外层电子的辐射中,由于 $k_0a\ll 1$,如上节末所述,电偶极辐射将是最重要的辐射.但是电偶极跃迁有它实现的条件,即本节第 4 小节所述的选择规则.当电偶极跃迁被禁戒,或处理的是内层电子的辐射时(对重原子的内层电子,$\hbar\omega_0\approx\frac{ze^2}{a}$,即 $k_0a\approx\frac{ze^2}{\hbar c}$,可能达到 1 的量级),才需考虑次级的多极辐射.

在量子电动力学中,处理多极辐射最方便的办法是,将算符 $\hat{A}(x)$用多极势来展开,然后代入到 $\hat{S}^{(1)}$ 的表达式中去.至于电子,考虑到相对论修正,我们将采用狄拉克方程的束缚态波函数来描述它的初末态.

### 1. 多极辐射的 $S$ 矩阵元

在本节中我们将只考虑自发辐射.设初始时束缚态电子的波函数为 $\psi_2(\boldsymbol{x})$,在末态中,该电子跃迁到一个能量较低的束缚态 $\psi_1(\boldsymbol{x})$并放出一个量子数为$(k,J,M,P)$的横光子,其势函数为 $\boldsymbol{A}_{kJMP}(\boldsymbol{x})$(参见§1.5,第 4 小节).根据前面的讨论(参见(3.1.41)和(3.5.2)),相应的 $S^{(1)}$跃迁矩阵元为

$$S_{fi}^{(1)}=-\frac{ie}{\hbar c^2}\int d^4x\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{A}_{kJMP}^*(\boldsymbol{x},t)$$

$$=\frac{e}{\hbar c}\int d^4x\bar{\psi}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}\psi_2(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{A}_{kJMP}^*(\boldsymbol{x})e^{-i(\omega_0-\omega)t},\qquad(4.2.1)$$

其中 $\boldsymbol{A}_{kJMP}(\boldsymbol{x})$为(1.5.49)和(1.5.51)式给出的球面驻波①, $\psi(x)$为电子的狄拉克波函数.

我们先来看电多极辐射的情况.这时光子势函数的宇称 $P$ 等于$(-1)^J$,而

$$\boldsymbol{A}_{kJM(-1)^J}(x)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}\boldsymbol{F}_{kJM}^{(2)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k^3}}\nabla\times\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\tag{4.2.2}$$

于是相应的 $S^{(1)}$矩阵元化为

$$S_{fi}^{(1)}=-\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\hbar k^3c^3}}\int\mathrm{d}^4x\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)*}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t},\tag{4.2.3}$$

其中

$$\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})=\mathrm{i}c\bar{\psi}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}\psi_2(\boldsymbol{x}),\tag{4.2.4}$$

即流密度算符 $\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x})$在原子初末态之间的矩阵元.

下面我们要把对函数 $\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)}$的微商转化成对流密度的微商.为此利用下面的矢量分析公式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}).\tag{4.2.5}$$

由于散度项的三维体积分可化成无穷远面上的面积分,而在该面上 $\boldsymbol{j}_{12}=0$,故(4.2.3)式可化成

$$S_{fi}^{(1)}=-\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\hbar k^3c^3}}\int\mathrm{d}^4x\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)*}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\times\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}.\tag{4.2.6}$$

由(1.5.27)和(1.5.24)式

$$\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)*}(\boldsymbol{x})=\sqrt{\frac{2k^2}{RJ(J+1)}}\hat{\boldsymbol{L}}\left[\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\right],\tag{4.2.7}$$

代入(4.2.6)式后,再利用 $\hat{L}$算符的厄米性,即可进一步将 $S_{fi}^{(1)}$化为

$$S_{fi}^{(1)}=-\sqrt{\frac{4\pi e^2}{\hbar kc^3RJ(J+1)}}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}^*(\theta\varphi)\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\nabla\times\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}.\tag{4.2.8}$$

上式中对 $t$ 的积分可立即求出.利用矢量分析公式和电荷守恒定律

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\rho_{12}(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{i}\omega_0\rho_{12}(\boldsymbol{x},t).\tag{4.2.9}$$

---

① 虽然辐射出去的是向外传播的球面行波.但在计算 $S$ 矩阵元时所用的多极势应取为球面驻波 $\boldsymbol{A}_{kJMP}$.这一论断可从波动方程的格林函数解法来理解(参见 Blatt & Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics 附录 $B$,第 4 小节).另外,采用驻波解也符号 $S$ 矩阵元中的光场应为无源场这一一般理念.

可进一步将(4.2.8)式约化.约化后的结果为(具体推导见下面小字部分)

$$S_{fi}^{(1)}=\sqrt{\frac{16\pi^3e^2}{c\hbar kRJ(J+1)}}\int d^3x Y_{JM}^*(\theta,\varphi)\{g_J(kr)[\omega_0\rho_{12}(\boldsymbol{x})+ik^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})]$$

$$+r\frac{\partial g_J(kr)}{\partial r}\omega_0\rho_{12}(\boldsymbol{x})\}\delta(\omega-\omega_0). \tag{4.2.10}$$

这就是一般的电多极自发辐射的 $S^{(1)}$ 矩阵元,其中 $\rho_{12}(\boldsymbol{x})=\psi_1^\dagger(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x})$.

关于(4.2.10)式的推导.首先来化简 $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{j})$.

$$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{j})=-i(\boldsymbol{x}\times\nabla)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{j})=-i\boldsymbol{x}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{j}=-i\boldsymbol{x}\cdot[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{j})-\nabla^2\boldsymbol{j}]$$

$$=-ir\frac{\partial}{\partial r}(\nabla\cdot\boldsymbol{j})+i\boldsymbol{x}\cdot\nabla^2\boldsymbol{j}. \tag{4.2.11}$$

另外,从$\nabla^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j})=\nabla^2(x_lj_l)=\nabla\cdot\nabla(x_lj_l)=2(\nabla\cdot\boldsymbol{j})+\boldsymbol{x}\cdot\nabla^2\boldsymbol{j}$ 即得

$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla^2\boldsymbol{j}=\nabla^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j})-2(\nabla\cdot\boldsymbol{j}). \tag{4.2.12}$$

将此式代入(4.2.11)式右方,并应用(4.2.9)式就化出

$$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{j})=i\nabla^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j})-2i\omega_0\rho+\omega_0r\frac{\partial}{\partial r}\rho. \tag{4.2.13}$$

下一步是在用(4.2.13)式代入(4.2.8)式后,通过分部积分把微分转化到 $Y_{JM}^*g_J$ 上,再利用 $g_JY_{JM}^*$是赫姆霍兹方程的解,即$\nabla^2(g_JY_{JM}^*)=-k^2(g_JY_{JM}^*)$,即可化出(4.2.10)(注意,对于(4.2.13)式右方第三项,由于分部积分只对 $r$ 来作,故须先将 $d^3x$ 写成$r^2drd\Omega$).

对于非相对论情况,在被积函数中,$kr\ll1$,(4.2.10)式可以进一步简化.首先可利用球贝塞尔函数在小宗量处的近似表达式

$$g_J(kr)\cong\frac{1}{(2J+1)!!}(kr)^J,\qquad (2J+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2J+1). \tag{4.2.14}$$

来简化 $g_J(kr)$.其次,$j_{12}\sim\rho_{12}v$,于是 $k^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}_{12}\sim\omega(kr)(\frac{v}{c})\rho_{12}$,因而(4.2.10)方括号中的第二项可以略去.经上述简化处理后,即得出

$$S_{fi}^{(1)}=\sqrt{\frac{16\pi^3c(J+1)}{\hbar RJ}}\frac{1}{(2J+1)!!}k^{J+\frac{1}{2}}Q_{JM}^{(E)}\delta(\omega-\omega_0), \tag{4.2.15}$$

其中

$$Q_{JM}^{(E)}\equiv Q_{JM(-1)^J}=-e\int r^JY_{JM}^*(\theta\varphi)\rho_{12}(\boldsymbol{x})d^3x. \tag{4.2.16}$$

除常数因子外,$Q_{JM}^{(E)}$就等于电 $2^J$ 极矩在初末态之间的矩阵元.这也是这种辐射称为电多极辐射、$\boldsymbol{A}_{kJM(-1)^J}$称为电多极场的原因.

当 $J=1$(在§1.5 中曾指明这是 $J$ 的最小值)时,利用

$$rY_{1M}^{*}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-\mathrm{i}x_2), & M=1\\ x_3, & M=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+\mathrm{i}x_2), & M=-1\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\boldsymbol{n}^{(M)*}\cdot\boldsymbol{x},\quad M=1,0,-1,\tag{4.2.17}$$

[其中 $\boldsymbol{n}^{(M)}$ 为球基矢,如(1.4.22)式所示],即可从(4.2.16)式求出(取 $J=1$)

$$Q_{1M}^{(E)}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\boldsymbol{n}^{(M)^*}\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}=(-1)^M\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\boldsymbol{n}^{(-M)}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12},\tag{4.2.18}$$

而 $\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}$ 就是电偶极矩跃迁矩阵元:

$$\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}=-e\int\boldsymbol{x}\rho_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=-e\int\psi_1^{\dagger}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\psi_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x.\tag{4.2.19}$$

(4.2.18)式表明,除常数因子 $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}$ 外, $Q_{1M}^{(E)}$ 就是电偶极矩跃迁矩阵元的球分量.

于是原子发射一个($J=1,M=1,0,-1,P=-1$)光子的 $S$ 矩阵元即为

$$S_{fi}^{(1)}=\sqrt{\frac{8\pi^2c}{3\hbar R}}k^{3/2}\boldsymbol{n}^{(M)*}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}\delta(\omega-\omega_0).\tag{4.2.20}$$

再来看磁多极辐射.这时 $P=(-1)^{J+1}$,相应的电磁势为

$$\boldsymbol{A}_{kJM(-1)^{J+1}}(x)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}\boldsymbol{F}_{kJM}^{(1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{RJ(J+1)}}\hat{\boldsymbol{L}}\left[\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\tag{4.2.21}$$

于是由(4.2.1)式并利用 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 算符的厄米性,同样可化出

$$S_{fi}^{(1)}=-\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c^2}\sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{RJ(J+1)}}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}^{*}(\theta,\varphi)\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}.\tag{4.2.22}$$

利用矢量分析公式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j}_{12})=-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{j}_{12},\tag{4.2.23}$$

不难将(4.2.22)式化成

$$S_{fi}^{(1)}=-8\pi\sqrt{\frac{\pi kc}{RJ(J+1)}}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{g}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}^{*}(\theta,\varphi)\nabla\cdot\mathscr{U}_{12}(\boldsymbol{x})\delta(\omega-\omega_0),\tag{4.2.24}$$

其中

$$\mathscr{U}_{12}(\boldsymbol{x})=-\frac{e}{2c}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x}),\tag{4.2.25}$$

为磁矩密度$\left(\frac{1}{2c}\times\text{电流矩密度}\right)$的跃迁矩阵元.(4.2.24)式就是一般的磁多极自发辐射的 $S$ 矩阵元.同样,在 $kr\ll 1$ 情况下,利用(4.2.14)式可将(4.2.24)式化成与(4.2.15)式相类似的形式:

$$S_{fi}^{(1)}=\sqrt{\frac{16\pi^3c(J+1)}{\hbar RJ}}\frac{1}{(2J+1)!!}k^{J+\frac{1}{2}}Q_{JM}^{(M)}\delta(\omega-\omega_0),\qquad(4.2.26)$$

其中

$$Q_{JM}^{(M)}\equiv Q_{JM(-1)^{J+1}}=-\frac{2}{J+1}\int r^J Y_{JM}^*(\theta,\varphi)\nabla\cdot\mathscr{U}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x.\qquad(4.2.27)$$

除常数因子外,$Q_{JM}^{(M)}$就等于磁荷 $2^J$ 极矩的跃迁矩阵元.

对于磁偶极辐射,$J=1$,通过分部积分得出

$$\begin{aligned}Q_{1M}^{(M)}&=\int\nabla[rY_{1M}^*(\theta,\varphi)]\cdot\mathscr{U}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\boldsymbol{n}^{(M)*}\cdot\langle\boldsymbol{m}\rangle_{12},\\ \langle\boldsymbol{m}\rangle_{12}&=\int\mathscr{U}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=-\frac{e}{2c}\int\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j}_{12}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x.\end{aligned}\qquad(4.2.28)$$

$\langle\boldsymbol{m}\rangle_{12}$即磁偶极矩的跃迁矩阵元.在非相对论情况,由(2.4.8)式并略去含 $e^2$ 项,得

$$-e\boldsymbol{j}_{12}=\frac{\mathrm{i}\hbar e}{m}\varphi_1^\dagger\nabla\varphi_2-\frac{\hbar e}{2m}\nabla\times(\varphi_1^\dagger\boldsymbol{\sigma}\varphi_2),\qquad(4.2.29)$$

其中包括迁移电流和自旋电流两个部分.将上式代入(4.2.28)第二式,被积函数二项中的第一项对$\langle\boldsymbol{m}\rangle_{12}$的贡献即为 $-\frac{e\hbar}{2mc}\int\varphi_1^\dagger\hat{\boldsymbol{L}}\varphi_2\mathrm{d}^3x$,$\boldsymbol{L}$ 为角动量算符 $-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\times\nabla$.计算被积函数中第二项的贡献时,先利用矢量分析公式

$$\boldsymbol{x}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})=x_l\nabla f_l-(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{f},$$

再作分部积分,由此得出$\langle\boldsymbol{m}\rangle_{12}$的第二项为$-\frac{e\hbar}{2mc}\int\varphi_1^\dagger\boldsymbol{\sigma}\varphi_2\mathrm{d}^3x$.总的$\langle\boldsymbol{m}\rangle_{12}$即为

$$\langle\boldsymbol{m}\rangle_{12}=-\frac{e\hbar}{2mc}\int\varphi_1^\dagger(\boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{\sigma})\varphi_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x.\qquad(4.2.30)$$

上式右方为轨道磁偶极与自旋磁偶极矩之和.粗略地说,$\langle\boldsymbol{m}\rangle$的值与$\langle\boldsymbol{d}\rangle$相比为$\frac{v}{c}$.但实际情况可能有较大的差异.当 $\varphi(x)$具有 $R(r)\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)$的形式时(其中 $\Omega_{jlm}$为旋量球函数),(4.2.30)式中的径向积分将直接分出来,简单地为$\int R_1(r)R_2(r)r^2\mathrm{d}r$.在初末态径向函数正交的情况下(例如类氢原子 $2S_{y2}\rightarrow 1S_{y2}$的跃迁),上述积分为零.导致$\langle\boldsymbol{m}\rangle=0$.这时(以及其他$\langle\boldsymbol{m}\rangle=0$ 的情况)的磁偶极辐射称为“受阻”的(hindered).只有考虑了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$因子及相对论效应后,其辐射率才

不为零.

## 2. 单电子原子的电偶极矩和磁偶极矩

我们仍只考虑非相对论的情况.设束缚电子的波函数具有确定能量 $E$,轨道角动量量子数 $l$,总角动量及其第三分量的量子数 $J$、$M$.这时在计算电偶极矩和磁偶极矩的跃迁矩阵元时,有关角度部分的积分可以由统一的公式积出,这就是本小节要讨论的问题.至于剩下的径向函数的一维积分,则需根据具体初末态的情况来求积.下面先列出五个公式,定义任一矢量 $\boldsymbol{f}$ 的球分量为 $f_\mu=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}^{(\mu)}$, $\mu=+1$, $0$, $-1$.

$$\text{(i)}\ \boldsymbol{n}_r\equiv\frac{1}{r}\boldsymbol{x}=\sum_\mu\frac{1}{r}(-1)^\mu x_\mu\boldsymbol{n}^{(-\mu)}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_\mu(-1)^\mu \mathrm{Y}_{1\mu}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}^{(-\mu)},\tag{4.2.31}$$

$$\text{(ii)}\qquad \hat{\boldsymbol{L}}=\sum_\mu(-1)^\mu\hat{\boldsymbol{L}}_\mu\boldsymbol{n}^{(-\mu)}.\tag{4.2.32}$$

关于 $\hat{L}_\mu$ 的具体表达式见(1.5.22)式,$\hat{\boldsymbol{L}}$ 作用到 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ 上的结果可从(1.5.22)式得出,并可表示为

$$\hat{\boldsymbol{L}}\,\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{l(l+1)}\sum_\mu(-1)^\mu C_{lm,1\mu}^{lm+\mu}\mathrm{Y}_{lm+\mu}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}^{(-\mu)},\tag{4.2.33}$$

其中 $C_{lm,1\mu}^{(lm+\mu)}$ 为 CG 系数.我们注意到:$\hat{\boldsymbol{L}}$ 作用到 $\mathrm{Y}_{lm}$ 上并不改变量子数 $l$,而是使 $m\rightarrow m+1,m,m-1$.

$$\text{(iii)}\ \phi_{s'}^{+}\boldsymbol{\sigma}\phi_s=\sqrt{3}(-1)^{s'-s}C_{1/2s,1(s'-s)}^{1/2s'}\boldsymbol{n}^{(s-s')},\tag{4.2.34}$$

$$\text{(iv)}\int\mathrm{Y}_{l_3m_3}^{*}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l_2m_2}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l_1m_1}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega=\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}}\,C_{l_1m_1,l_2m_2}^{l_3m_3}C_{l_10,l_20}^{l_30}.\tag{4.2.35}$$

我们将用 $R_{njl}(r)\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)$ 来表示束缚电子的波函数,其中 $\Omega_{jlm}$ 代表球旋量,参见§2.3.$(n,j,m,l)$ 即为标志状态的四个量子数.这样 $\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}$ 可以表示两个积分的乘积:

$$\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}=-e\left[\int_0^\infty R_{n'j'l'}^{*}(r)R_{njl}(r)r^3\mathrm{d}r\right]\left[\int\Omega_{j'l'm'}^{\dagger}(\theta\varphi)\boldsymbol{n}_r\Omega_{jlm}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega\right].\tag{4.2.36}$$

下面要计算的即为上式中后一个对角度的积分.利用§2.3 中关于球旋量 $\Omega_{jlm}$ 的公式(2.3.1)即得

$$\int\Omega_{j'l'm'}^{\dagger}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}_r\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega=\sum_s C_{l'(m'-s),\frac{1}{2}s}^{j'm'}C_{l(m-s),\frac{1}{2}s}^{jm}\times$$

$$\int \mathrm{Y}_{l'(m'-s)}^{*}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}_r \mathrm{Y}_{l(m-s)}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega. \tag{4.2.37}$$

将上式中 $\boldsymbol{n}_r$ 用(4.2.31)式代入,再应用(4.2.35)式,就可求出

$$\int \mathrm{Y}_{l'(m'-s)}^{*}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}_r \mathrm{Y}_{l(m-s)}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega = \sqrt{\frac{2l+1}{2l'+1}}C_{l0,10}^{l'0}\sum_{\mu}(-1)^{\mu}C_{l(m-1),1\mu}^{l'(m'-s)}\boldsymbol{n}^{(-\mu)}$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{2l'+1}}(-1)^{m'-m}C_{l0,10}^{l'0}C_{l(m-s),1(m'-m)}^{l'(m'-s)}\boldsymbol{n}^{(m-m')},\ |m-m'|\leqslant 1. \tag{4.2.38}$$

将(4.2.38)式代回(4.2.37)式即得出电偶极矩跃迁矩阵元$\langle \boldsymbol{d}\rangle_{12}$中的角度部分积分:

$$\int \Omega_{j'l'm'}^{\dagger}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}_{\nu}\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega = \sqrt{\frac{2l+1}{2l'+1}}(-1)^{m'-m}C_{l0,10}^{l'0}\boldsymbol{n}^{(m-m')}\times$$

$$\sum_{s}C_{l'(m'-s),\frac{1}{2}s}^{j'm'}C_{l(m-s),\frac{1}{2}s}^{jm}C_{l(m-s),1(m'-m)}^{l'(m'-s)},\ |m-m'|\leqslant 1. \tag{4.2.39}$$

下面再来计算磁偶极矩跃迁矩阵元.由(4.2.30)式,

$$\langle \boldsymbol{m}\rangle_{12} = -e\left[\frac{\hbar}{2mc}\int_0^{\infty}R_{n'j'l'}^{*}(r)R_{njl}(r)r^2\mathrm{d}r\right]\left[\int \Omega_{j'l'm'}^{\dagger}(\theta,\varphi)(\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)\right], \tag{4.2.40}$$

与(4.2.36)式相比,这里第一个方括号中的积分内代替 $r^3$ 出现的是$\frac{1}{2}r^2r_C$,其中 $r_C$ 为电子的康普顿波长,故该积分(在不为零时)要比(4.2.36)式中相应的积分小二个量级.下面我们主要考虑第二个方括号中的积分.先看 $\hat{\boldsymbol{L}}$贡献的部分.

利用(4.2.33)式即可得出

$$\int \Omega_{j'l'm'}^{*}(\theta,\varphi)\hat{\boldsymbol{L}}\ \Omega_{jlm}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega$$

$$= \sum_{s}C_{l'(m'-s),\frac{1}{2}s}^{j'm'}C_{l(m-s),\frac{1}{2}s}^{jm}\int \mathrm{Y}_{l'(m'-s)}^{*}(\theta,\varphi)\hat{\boldsymbol{L}}\ \mathrm{Y}_{l(m-s)}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega$$

$$= \delta_{ll'}\sqrt{l(l+1)}(-1)^{m-m'}\boldsymbol{n}^{(m-m)'}\sum_{s}C_{l'(m'-s),\frac{1}{2}s}^{j'm'}C_{l(m-s),\frac{1}{2}s}^{jm}C_{l(m-s),1(m'-m)}^{l(m'-s)}. \tag{4.2.41}$$

再来计算$\langle \boldsymbol{m}\rangle_{12}$中由自旋角动量所贡献的部分.同样,将球旋量用(2.3.1)式表示,再用(4.2.34)式代入,立即可得

$$\int \Omega_{j'l'm'}^{*}\boldsymbol{\sigma}\Omega_{jlm}\mathrm{d}\Omega = \delta_{ll'}\sqrt{3}(-1)^{m-m'}\boldsymbol{n}^{(m-m)'}\sum_{s}C_{l'(m-s),\frac{1}{2}(m'-m+s)}^{j'm'}C_{l(m-s),\frac{1}{2}s}^{jm}C_{1/2s,1(m'-m)}^{1/2(m'-m+s)}. \tag{4.2.42}$$

总起来,(4.2.39)~(4.2.42)式就是我们这一小节的最后结果,

### 3. 能量辐射率

有了 $S$ 矩阵元即可计算从初态到末态的跃迁率 $w$. 它由下式表示:

$$w = \frac{1}{T} \mid S_{fi}^{(1)} \mid^2 = \frac{8\pi^2 c(J+1)}{\hbar RJ} \frac{1}{[(2J+1)!!]^2} k^{2J+1} \mid Q_{JMP} \mid^2 \delta(\omega_0 - \omega). \tag{4.2.43}$$

当 $R$ 取得足够大时在 $\mathrm{d}\omega$ 范围内, $JMP$ 一定的光子状态数为

$$\rho \mathrm{d}\omega = \frac{R}{c\pi} \mathrm{d}\omega. \tag{4.2.44}$$

这是因为当 $R \gg J\lambda$ 时, $\frac{\lambda}{2}$ 的允许取值近似为 $R$ 的整数分之一, 即允许的 $\lambda$ 值为 $\frac{2R}{n}$, 相应地, 允许的 $\omega$ 值即为

$$\omega = n \frac{\pi c}{R}.$$

这样, 在 $\mathrm{d}\omega$ 范围内具有确定 $JMP$ 的光子状态数 $\mathrm{d}n$ 就等于 $\frac{R}{c\pi}\mathrm{d}\omega$. 此结果就是 (4.2.44) 式. 将 (4.2.43) 式中的 $w$ 乘上 $\rho\mathrm{d}\omega$ 再对 $\omega$ 积分即求出 $JMP$ 一定的多极辐射的总跃迁率为

$$W = \int w\rho \mathrm{d}\omega = \frac{8\pi(J+1)}{\hbar J} \frac{k_0^{2J+1}}{[(2J+1)!!]^2} \mid Q_{JMP} \mid^2. \tag{4.2.45}$$

我们看到, 当 $R$ 取得足够大时, $W$ 已变得与 $R$ 的取值无关.

为了对 $W$ 随 $J$ 的变化有一个粗略的概念, 我们将 (4.2.45) 式写成

$$\frac{W}{\omega_0} = \frac{8\pi(J+1)}{J[(2J+1)!!]^2} \frac{e^2}{\hbar c} \left[ k_0^{2J} \mid \frac{1}{\mathrm{e}} Q_{JMP} \mid^2 \right].$$

对于由多极辐射, 如果简单地把 $\mid Q_{JMP} \mid^2$ 用 $e^2 a^{2J}$ 来代入, 则上式方括号中的因子即为 $(k_0 a)^{2J}$. 而对于磁偶极辐射, 如果简单地将 $\mid Q_{JMP} \mid^2$ 用 $\frac{v^2}{c^2} e^2 a^{2J}$ 来代入, 则方括号中的因子即为 $\frac{v^2}{c^2}(k_0 a)^{2J}$. 这样, 当 $J$ 增加 1 时, 方括号中即多出一个因子 $(k_0 a)^2$.

从 (4.2.45) 式得出的能量辐射率为

$$U = \hbar\omega_0 W = \frac{8\pi(J+1)}{Jc^{2J+1}} \frac{1}{[(2J+1)!!]^2} \omega_0^{2J+2} \mid Q_{JMP} \mid^2. \tag{4.2.46}$$

它与辐射频率 $\omega_0$ 的 $2J+2$ 次方成正比, 即多极辐射的阶数愈高, $U$ 随 $\omega_0$ 的增长愈快.

对于电偶极辐射，$J=1, P=-1, M$ 的取值为 $1,0,-1$. 如果求的是该辐射总的能量辐射率，则应对 $M$ 求和. 结果即为

$$U^D = \frac{16\pi\omega_0^4}{9c^3}\sum_M |Q_{1M(-1)}|^2 = \frac{4\omega_0^4}{3c^3}\sum_M |\boldsymbol{n}^{(M)}\cdot\langle \boldsymbol{d}\rangle_{12}|^2 = \frac{4\omega_0^4}{3c^3}|\langle \boldsymbol{d}\rangle_{12}|^2, \tag{4.2.47}$$

与上节的结果相同. 这进一步证实了：尽管上节讨论的是辐射一定动量的光子，但在 $\frac{\omega_0 a}{c}\ll 1$ 的情况下，在对光子的动量积分后，其贡献就是来自电偶极辐射.

磁偶极辐射的跃迁率公式与电偶极辐射相同，只是 $\langle \boldsymbol{d}\rangle_{12}$ 换成了 $\langle \boldsymbol{m}\rangle_{12}$. 由于 $j\sim\rho v$，故轨道磁偶极矩 $\left(\sim\frac{1}{c}aj\right)$ 与电偶极矩（$\sim a\rho$）相比，其量级 $\sim\frac{v}{c}$. 加上自旋磁偶极矩亦不会改变此项量级估计. 因此磁偶极辐射率（当它不为零时）与电偶极辐射率之比量级只有 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$.

**4. 选择规则**

从角动量守恒和宇称守恒可以给出原子多极矩跃迁矩阵元不为零的必要条件（其适用范围并不限于单电子跃迁）. 这些条件就称为选择规则，设辐射前后原子的状态都是具有确定总角动量 $j$，总角动量第三分量 $m$ 和宇称的态，从角动量守恒得知为辐射总角动量量子数为 $(J,M)$ 的光子，原子初态的总角动量 $(j_2, m_2)$ 和末态总角动量 $(j_1, m_1)$ 必须满足下列关系：

$$|j_2 - j_1| \leqslant J \leqslant j_2 + j_1, \tag{4.2.48}$$

$$m_2 - m_1 = M. \tag{4.2.49}$$

由此可见，多极辐射的阶数愈高，要求原子初末态总角动量量子数之和愈大（但两者之差不能太大）. 同样从宇称守恒，可得原子初、末态的宇称 $P_2$ 和 $P_1$ 和光子宇称 $P$ 之间要满足关系

$$P_2 = P_1 P, \tag{4.2.50}$$

于是对于电多极辐射，有

$$P_2 = P_1(-1)^J \text{ 或 } P_1 P_2 = (-1)^J. \tag{4.2.51}$$

而对于磁多极辐射，要满足的关系则为

$$P_2 = P_1(-1)^{J+1} \text{ 或 } P_1 P_2 = (-1)^{J+1}. \tag{4.2.52}$$

由此可见阶数相同的电多极辐射和磁多极辐射不能同时发生，阶数相差 1 的电多极辐射亦不能同时发生，等等.

由于光子总角动量量子数 $J$ 的最小值为 1，故 $j_2 = j_1 = 0$ 的辐射跃迁是完全禁

戒的. 当然,在单个电子跃迁中不会出现这种情况,因单电子的 $j$ 为半整数. 另外,此处所讨论的是只辐射一个光子的情况,若辐射两个或更多个光子,则当另论. 在有些情况,双光子辐射将成为主导的方式. §4.5 中我们将介绍一个辐射双光子的例子.

无论是单个电子的辐射还是多个电子的辐射,$|j_2 - j_1|$ 和 $j_2 + j_1$ 都只能是零或正整数. 因此角动量的选择规则还可以进一步具体化. 在实际中最常用的是电偶极跃迁. 它的选择规可具体表示为

$$\Delta j \equiv j_2 - j_1 = \pm 1, 0, \quad (\text{但 } j_2 = j_1 = 0 \text{ 的情况除外})$$

$$\Delta m \equiv m_2 - m_1 = \pm 1, 0, \quad P_1 = - P_2. \tag{4.2.53}$$

通常把满足(4.2.53)式的跃迁(也就是电偶极跃迁)称作是允许跃迁,因为电偶极跃迁要比其他跃迁大得多.

除了电偶极辐射以外,实际中用到的还有磁偶极辐射和电四极辐射. 磁偶极辐射的选择规则可表示为

$$\Delta j = \pm 1, 0 \quad (\text{但 } j_2 = j_1 = 0 \text{ 的情况除外}),$$

$$\Delta m = \pm 1, 0, \quad P_1 = P_2, \tag{4.2.54}$$

而电四极辐射的条件是

$\Delta j = \pm 2, \pm 1, 0$　(但 $j_2 + j_1 = 0$ 和 $j_2 + j_1 = 1$ 的情况除外,因电四极辐射的 $J = 2$),

$\Delta m = \pm 2, \pm 1, 0, \quad P_1 = P_2.$

我们看到,磁偶极辐射和电四极辐射可以同时发生,但有些情况如 $\Delta j = \pm 2, \Delta m = \pm 2$,电四极辐射能发生而磁偶极辐射不能发生,另有一些情况如 $j_1 + j_2 = 1$ 磁偶极辐射能发生而电四极辐射不能发生.

上面的选择规则说的是,对于确定的多极辐射,原子初末态所必需满足的条件. 我们还可以问另外一个问题,即对于确定的原子初末态之间的跃迁,最主要的多极跃迁是什么?

设原子初态量子数为$(j_2, m_2, P_2)$,末态量子数为$(j_1, m_1, P_1)$. 我们可区分两种情形:

i) $P_1 P_2 = (-1)^{|j_2 - j_1|}$. 这时电多极辐射的 $J$ 若取为(4.2.48)式所允许的最小值 $|j_2 - j_1|$,则宇称条件(4.2.50)可以满足. 在 $|j_2 - j_1| \neq 0$ 的情况下,光子的角动量要求 $J \geqslant 1$ 也能满足,因此电 $2^{|j_2 - j_1|}$ 极跃迁是允许的. 对于 $|j_2 - j_1| = 0$ 的情况,下面将另行讨论.

在这种原子初末态情况下,磁多极跃迁的 $J$ 最少要取为 $|j_2 - j_1| + 1$ 才能使宇称条件(4.2.52)满足. 为了使角动量条件 $J \leqslant j_2 + j_1$ 满足,$j_1$ 和 $j_2$ 任何一个都不能为零. 若 $j_1$ 和 $j_2$ 中有一个为零则上述两个要求互相冲突,磁多极辐射将不可能发生.

由于磁 $2^{|j_2 - j_1| + 1}$ 极辐射的跃迁率比电 $2^{|j_2 - j_1|}$ 极辐射的跃迁率要小得多,故这种情况占支配地位的是电 $2^{|j_2 - j_1|}$ 极辐射.

ii) $P_1 P_2 = (-1)^{|j_2 - j_1| + 1}$. 根据(4.2.50)式,这种情况下电多极辐射的 $J$ 最少要取为 $|j_2 - j_1| + 1$(但 $j_1$ 和 $j_2$ 中有一个为零的情况要除外,理由如上所述:条件 $J \leqslant (j_2 + j_1)$ 不满足. 这时,

电多极辐射将不可能).

磁多极辐射,最小的 $J$ 值可取为 $|j_2-j_1|$,同样 $j_2-j_1=0$ 的情况要除外,我们将在下面对它单另讨论.至于磁 $2^{|j_2-j_1|}$ 极辐射和电 $2^{|j_2-j_1|+1}$ 极辐射哪种较强,需要根据具体情况来确定.

最后来看 $j_1-j_2=0$(但 $j_1,j_2$ 不为零)的特殊情况.这时对情况 i),$P_1$ 要等于 $P_2$,允许的电多极辐射的最小 $J$ 值要取为 $2\left(j_1=j_2=\frac{1}{2}\right.$的情况要除外,因 $J\leqslant j_1+j_2$ 的条件不能满足,在此情况下,电多极跃迁无一允许$\left.\right)$.而允许的磁多极跃迁,$J$ 的最小值为 1.对于上述情况 ii),这时可能的电多极辐射最小的 $J$ 值为 1,磁多极辐射最小的 $J$ 值为 2(同样 $j_1=j_2=\frac{1}{2}$ 的情况要除外).显然在此情况下,电偶极辐射是占支配地位的.

另一种特殊情况是 $j_1$ 和 $j_2$ 中有一个为零(但不全为零).这时 $|j_2-j_1|=j_2+j_1$,因而(4.2.48)式允许的 $J$ 只能取一个值,即 $J=j_2+j_1$.于是对于情况 i),电 $2^{j_2+j_1}$ 极辐射是允许的,而对于情况 ii)只有磁 $2^{j_2+j_1}$ 极辐射是允许的.

## §4.3 高速电子在库仑势中的轫致辐射

在这一节中,我们将考虑另一类辐射现象,即高速电子打到原子上时,由于受到核库仑势的作用而辐射光子的效应.这种辐射称为电子在原子核库仑势中的轫致辐射.在核的反冲可以忽略的情况下,核的库仑势可作为经典势引进来.这时电磁势 $\hat{A}_\mu$ 可表为

$$\hat{A}_\mu(x)=\hat{A}_\mu^{\mathrm{T}}(x)+A_c(\boldsymbol{x})\delta_{\mu 4},\quad A_c(\boldsymbol{x})=\mathrm{i}\frac{Ze}{r}. \tag{4.3.1}$$

其中 $\hat{A}_\mu^{\mathrm{T}}(x)$只包含三维横场部分,用来表示辐射出来的光子的势算符.

在 $Z$ 不甚大,使条件$\frac{Ze^2}{\hbar v}\ll 1$ 对于电子初末速度都成立的情况下,核势的作用也可考虑用微扰论来处理.比值$\frac{Ze^2}{\hbar v}$的物理意义如下:当碰撞距离为 $b$ 时($b$ 代表核 $Ze$ 到电子的最近距离见图 4.3.1),电子在核库仑场中所经受的冲量可近似估计为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Ze^2}{s^2+b^2}\frac{\mathrm{d}s}{v}\approx\frac{Ze^2}{bv}$, $s$ 代表路径的长度.如果 $b$ 用$\frac{l\hbar}{mv}$来估计(相当于取粒子的角动量 $mvb\simeq l\hbar$),上述冲量值即为$\frac{Ze^2m}{l\hbar}$.核势的作用能作为微扰的条件是,此冲量(即电子动量的改变)要比电子原来的动量 $mv$ 小得多.亦即$\frac{Ze^2}{l\hbar v}\ll 1$.故若 $l=0$ 的分波在电子束中占的分量很小(高速电子情况),此条件即化

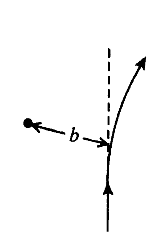



图 4.3.1 λ射电子在核库势中的运动轨迹

为$\frac{Ze^2}{\hbar v}\ll 1$(因 $l$ 取值最小为 1).通常高速电子速度 $v$ 的量级为$c$(如电子经 3 万伏电压加速后其速度即可达到$\sim\frac{1}{3}c$).若设 $v\simeq c$,则$\frac{Ze^2}{\hbar v}$即约化为$\frac{Z}{137}$,故 $Z$ 不大时该条件是能成立的.

**1. 散射的 $S$ 矩阵元和跃迁率**

显然 $\hat{S}^{(1)}$对此过程无贡献,因韧致辐射的发生至少要经过两次作用,一次是电子受库仑势的作用,一次是辐射光子.对此过程有贡献的 $\hat{S}^{(2)}$ 为(3.5.6)式中的第三、四项.此两项的贡献相等,故可表示为

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}\mathrm{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 \bar{\hat{\psi}}(x_2)\gamma_\mu \hat{A}_\mu(x_2) S^F(x_2 - x_1)\gamma_\nu \hat{\psi}(x_1)\hat{A}_\nu(x_1). \tag{4.3.2}$$

设电子的入射动量为 $\boldsymbol{p}_1$,螺度为 $s_1$,出射动量为 $\boldsymbol{p}_2$,螺度为 $s_2$,辐射出的光子动量为 $\hbar\boldsymbol{k}$,偏振为 $l(l=1,2)$.于是得出[按(3.5.4)式]

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \langle \boldsymbol{p}_2, s_2; \boldsymbol{k}, l \mid \hat{S}^{(2)} \mid \boldsymbol{p}_1, s_1 \rangle = \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 \\ &\times [\bar{u}_{p_2 s_2}(x_2)\gamma_\mu A_\mu^{(kl)}(x_2)^* S^F(x_2 - x_1)\gamma_4 u_{p_1 s_1}(x_1) A_c(\boldsymbol{x}_1) \\ &+ \bar{u}_{p_2 s_2}(x_2)\gamma_4 A_c(\boldsymbol{x}_2) S^F(x_2 - x_1)\gamma_\mu u_{p_1 s_1}(x_1) A_\mu^{(kl)}(x_1)^*], \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

两项相应的图形如图 4.3.2 所示.当 $t_1 < t_2$ 时,第一项代表入射电子先受到库仑场的作用然后发射光子,第二项代表先发射光子再受到库仑场的作用.当 $t_1 > t_2$ 时过程较为复杂,中间态中有正负电子对的产生.

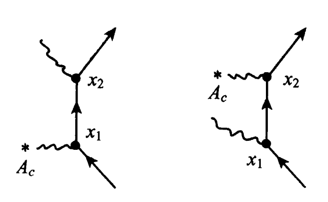


图 4.3.2　电子在核库伦势作用下的辐射

我们在§3.5 中曾经指出,自由电子是不能辐射光子的,因动量守恒和能量守恒不可能同时满足,在这里由于库仑势提供了附加的动量(库仑场不随时间变化故不提供附加能量),才使辐射成为可能.

(4.3.3)式中的 $\bar{u}_{ps}(x)$,$u_{ps}(x)$,$A_\mu^{(kl)}(x)$以及 $S^F(x_2 - x_1)$可用以前给出的表达式代入,至于库仑势,其傅里叶展式为

$$\frac{Ze}{r} = \frac{Ze}{2\pi^2}\int \frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3 q. \tag{4.3.4}$$

上式证明如下:先将 $\mathrm{d}^3 q$ 写成$|\boldsymbol{q}|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}q$,$\theta$ 为 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 间的夹角,于是右方积分即化为

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr\cos\theta}=2\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr\cos\theta}$$
$$=4\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\,\frac{\sin qr}{qr}=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q\,\frac{\sin qr}{qr}. \tag{4.3.5}$$

再将 $\sin qr$ 用$\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr})$代入,由于原来的$\frac{\sin qr}{qr}$在 $q=0$ 处并无奇点,故取积分路线从 $q=0$ 下方绕过或从上方绕过均可.然后对含 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr}$ 的项补充复 $q$ 平面中上半平面的无穷大半圆,对含 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr}$ 的项补充复 $q$ 平面中下半平面的无穷大半圆即可利用留数定理将(4.3.5)式中对 $q$ 的积分求出.从而可证明(4.3.4)式成立.此式的物理意义是,库仑场含有各种动量(即 $\hbar\boldsymbol{q}$ 的各种取值)的成分[动量的值愈低,其成分愈大$\left(\approx\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)$],因而它可以传递动量给电子.

利用(4.3.4)式不难求出

$$S_{fi}^{(2)}=-(2\pi)^3Ze^3\sqrt{\frac{2\hbar^5}{\pi V^3\omega}}\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{(\boldsymbol{p}_2+\hbar\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1)^2}\delta(E_1-E_2-\hbar\omega), \tag{4.3.6}$$

其中

$$M=(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{kl})\frac{\mathrm{i}\gamma\cdot(p_2+\hbar k)-mc}{(p_2+\hbar k)^2+m^2c^2}\gamma_4+\gamma_4\frac{\mathrm{i}\gamma\cdot(p_1-\hbar k)-mc}{(p_1-\hbar k)^2+m^2c^2}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{kl}), \tag{4.3.7}$$

$\gamma\cdot p$ 代表 $\gamma_\mu p_\mu$, $p^2$ 代表 $p_\mu p_\mu$.在(4.3.7)式的分母中本来还有 $\mathrm{i}\epsilon$.但由于这些分母不会为零(参见 p.146 注),故 $\mathrm{i}\epsilon$ 被略去.

(4.3.6)式中只含一维 $\delta$ 函数,它代表了能量守恒关系.在动量 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\hbar\boldsymbol{k}$ 之间则不存在约束性关系.因为不论 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{k}$ 取何值,都可从库仑场中得到合适的动量转移 $\hbar\boldsymbol{q}$ 使动量守恒律得到满足(当然它们的取值会受到能量守恒关系的限制).

下面再求单位时间的跃迁概率.仿前,

$$w=\frac{1}{T}|S_{fi}^{(2)}|^2=64\pi^4\hbar^4\frac{Z^2e^6}{V^3\omega}\frac{1}{(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k})^4}|\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)|^2\delta(E_1-E_2-\hbar\omega), \tag{4.3.8}$$

而末态电子的动量在 $\mathrm{d}^3p_2$、光子波矢在 $\mathrm{d}^3k$ 范围的状态数为

$$\frac{V^2}{(2\pi)^6\hbar^3}\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3k=\frac{V^2p_2E_2\omega^2\mathrm{d}E_2\mathrm{d}\Omega_2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^6\hbar^3c^5}, \tag{4.3.9}$$

其中 $p_2$ 代表$|\boldsymbol{p}_2|$.将上式乘上 $w$ 并对 $E_2$ 积分,结果即为末态电子螺度为 $s_2$、动量方向在 $\mathrm{d}\Omega_2$ 范围、光子偏振为 $l$,波矢方向在 $\mathrm{d}\Omega$ 范围、频率在 $\mathrm{d}\omega$ 范围的跃迁率 $\mathrm{d}W$,

$$\mathrm{d}W = \frac{Z^2 e^6 \hbar}{\pi^2 c^5 V} \frac{\omega p_2 E_2}{(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k})^4} \mid \bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2) M u^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1) \mid^2 \mathrm{d}\Omega_2 \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega. \quad (4.3.10)$$

在此式中，$E_2 = E_1 - \hbar\omega$，$p_2 = |\boldsymbol{p}_2| = \sqrt{\frac{1}{c^2}(E_1 - \hbar\omega)^2 - m^2 c^2}$，两者都由 $E_1$ 及 $\hbar\omega$ 确定. 利用 $u^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 的表达式以及

$$\mathrm{i}\gamma \cdot p = \begin{pmatrix} -E/c & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} & E/c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl} \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.11)$$

可将 $\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2) M u^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)$ 用 $2 \times 2$ 矩阵 $K$ 在泡利旋量 $\phi_{s_2}^\dagger(\boldsymbol{n}_2)$ 和 $\phi_{s_1}(\boldsymbol{n}_1)$ 间的矩阵元表示出来，即

$$\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2) M u^{(s_2)}(p_1) = \phi_{s_2}^\dagger(\boldsymbol{n}_2) K \phi_{s_1}(\boldsymbol{n}_1), \quad (4.3.12\mathrm{a})$$

其中

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{4E_1 E_2 (E_1 + mc^2)(E_2 + mc^2)}} \Bigg\{ \frac{1}{(p_2 + \hbar k)^2 + m^2 c^2} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}_2)((\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl}) \\ & (E_1 + mc^2)^2 + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{p}_2 + \hbar \boldsymbol{k}) c^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}_1) + (E_2 + mc^2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl})((E_1 + mc^2)\boldsymbol{\sigma} \\ & \cdot (\boldsymbol{p}_2 + \hbar \boldsymbol{k}) + (E_1 - mc^2)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}_1)] \\ & + \frac{1}{(p_1 - \hbar k_1)^2 + m^2 c^2} [((E_2 + mc^2)^2 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}_2) c^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{p}_1 - \hbar \boldsymbol{k}))(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl}) \\ & + ((E_2 + mc^2)\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{p}_1 - \hbar \boldsymbol{k}) + (E_2 - mc^2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}_2))(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{kl})(E_1 + mc^2)] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (4.3.12\mathrm{b})$$

而 $\phi_s(\boldsymbol{n})$ 表示 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ 的本征值为 $s$ 的泡利旋量.

## 2. 韧致辐射的微分截面

在韧致辐射情况，由于有入射电子流故可以定义一个微分截面 $\mathrm{d}\sigma$，它等于 $\mathrm{d}W$ 除以入射电子流的密度 $\frac{v_1}{V} = \frac{p_1 c^2}{E_1 V}$，于是有

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{Z^2 e^6}{\pi^2 c^7} \frac{E_1 E_2 \hbar\omega}{(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k})^4} \frac{p_2}{p_1} \mid \phi_{s_2}^\dagger(\boldsymbol{n}_2) K \phi_{s_1}(\boldsymbol{n}_1) \mid^2 \mathrm{d}\Omega_2 \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega. \quad (4.3.13)$$

此式表示 $\mathrm{d}\sigma$ 已与场的归一化体积 $V$ 无关，这正是所期望的.

如果我们不区分末态电子的螺度，则应将上式对 $s_2$ 求和. 再若初态电子是非极化的，则应对 $s_1$ 求平均. 总起来即对 $s$ 的两个值求和再除以 2. 这种情况下的微分截面 $\widetilde{\mathrm{d}\sigma}$ 即为

$$\widetilde{\mathrm{d}\sigma} = \frac{Z^2 e^6}{2\pi^2 c^7} \frac{E_1 E_2 \hbar\omega}{(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k})^4} \frac{p_2}{p_1} \sum_{s_1, s_2} \mid \phi_{s_2}^\dagger(\boldsymbol{n}_2) K \phi_{s_1}(\boldsymbol{n}_1) \mid^2 \mathrm{d}\Omega_2 \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega. \quad (4.3.14)$$

(4.3.14)式中 $\sum_{s_1,s_2}|\phi_{s_2}^{\dagger}K\phi_{s_1}|^2$ 可以计算出来.首先来对 $s_2$ 求和.利用 $\phi_{\pm\frac{1}{2}}(\boldsymbol{n}_2)$构成旋量空间完备集即得

$$\sum_{s_2}|\phi_{s_2}^{\dagger}K\phi_{s_1}|^2=\sum_{s_2}\phi_{s_1}^{\dagger}K^{\dagger}\phi_{s_2}\phi_{s_2}^{\dagger}K\phi_{s_1}=\phi_{s_1}^{\dagger}K^{\dagger}K\phi_{s_1},$$

再对 $s_1$ 求和,结果就是 $K^{\dagger}K$ 的迹:

$$\sum_{s_1,s_2}|\phi_{s_2}^{\dagger}(\boldsymbol{n}_2)K\phi_{s_1}(\boldsymbol{n}_1)|^2=\mathrm{tr}(K^{\dagger}K).\tag{4.3.15}$$

利用公式

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{f}_1)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{f}_2)=\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_2+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{f}_1\times\boldsymbol{f}_2),\tag{4.3.16}$$

[参见(2.3.9)式]可将 $K$ 中所含的 $\boldsymbol{\sigma}$ 幂次降低到零阶和一阶.从而立即可求出 $\mathrm{tr}(K^{\dagger}K)$.这里将不列出一般的结果.有兴趣的读者可从量子电动力学或量子场论的书中查到.下面只给出非相对论情况下的近似结果并从物理上加以解释.这一近似结果可用于"通过轫致辐射来产生连续谱 $x$ 光"的过程.

首先将 $K$ 中的分母化简.利用 $p_2^2+m_2^2c^2=0$ 及 $k^2=0$,即得出

$$(p_2+\hbar k)^2+m^2c^2=2p_2\cdot\hbar k=2\boldsymbol{p}_2\cdot\hbar\boldsymbol{k}-\frac{2}{c^2}E_2\hbar\omega.$$

在非相对论情况下,上式右方第一项与第二项之绝对值比为$\frac{v}{c}\cos\theta$ 故第一项可略去,另外 $E_2$ 还可近似为 $mc^2$,于是得

$$(p_2+\hbar k)^2+m^2c^2\approx-2m\hbar\omega.\tag{4.3.17}$$

同样

$$(p_1-\hbar k)^2+m^2c^2\approx2m\hbar\omega.\tag{4.3.18}$$

将(4.3.17)和(4.3.18)式代入 $K$ 中,再将其中的$(E+mc^2)$近似成 $2mc^2$ 并略去小项,结果得出

$$K\approx\frac{\mathrm{i}}{2m\hbar\omega}[-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_{kl})-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_{kl})\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}_2+\hbar\boldsymbol{k})$$
$$+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_{kl})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1)+\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_{kl})].$$

进一步化简可利用(4.3.16)式以及 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_{kl}=0$.最后得出

$$K\approx\frac{\mathrm{i}}{m\hbar\omega}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{e}_{kl}I,\tag{4.3.19}$$

$I$ 为二维单位矩阵.于是有

$$\mathrm{tr}(K^{\dagger}K)=\frac{2}{m^2\hbar^2\omega^2}[(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{e}_{kl}]^2.\tag{4.3.20}$$

另外,在非相对论情况,光子动量 $\hbar\boldsymbol{k}$ 的值要比$|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1|$小得多,这是因为

$$\hbar\omega=E_1-E_2\approx\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2)=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2),$$

从而

$$|\hbar\boldsymbol{k}|=\frac{1}{c}\hbar\omega=\frac{1}{2mc}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\ll|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2|.\tag{4.3.21}$$

此结果表明,尽管电子的能量改变完全由于发射光子,但在非相对论情况下其动量改变却主要

来自库仑势的作用,而不是由于光子带走的动量.

由于库仑势的散射并不改变动量的绝对值,故可合理地认为(4.3.14)式中的因子$\frac{p_2}{p_1}$近似为1.再将$E=mc^2$、(4.3.15)、(4.3.20)和(4.3.21)式代入,即将(4.3.14)式化为

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}=\frac{Z^2e^6}{\pi^2\hbar\omega c^3}\frac{1}{(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)^4}[(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{e}_{kl}]^2\mathrm{d}\Omega_2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega. \tag{4.3.22}$$

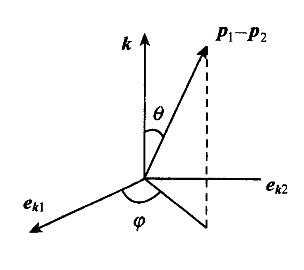



图 4.3.3　$\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2$ 的方位图

如果测量中也不区分光子的偏振,则应将上式对 $l$ 求和.不难得出

$$\sum_l[(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{e}_{kl}]^2=(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi)$$
$$=(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2\sin^2\theta,$$

其中 $\theta$ 为$(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角,参见图 4.3.3.

利用(4.3.15)式即得出非相对论情况下非极化的电子的韧致辐射的微分截面(不区分光子的偏振和末态电子的极化)为

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\sum_l\mathrm{d}\tilde{\sigma}=\frac{Z^2e^6}{\pi^2\hbar\omega c^3}\frac{1}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega_2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega. \tag{4.3.23}$$

此式有一个简单的物理解释.为此将其中$\frac{1}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2}$分成两个因子$\frac{m^2}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^4}$和$(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2$ 的乘积,于是(4.3.23)式可写成

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\left[\frac{4m^2Z^2e^4}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^4}\mathrm{d}\Omega_2\right]\left[\frac{e^2(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2}{4\pi^2c^3\hbar\omega}\sin^2\theta\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega\right], \tag{4.3.24}$$

第一个因子代表卢瑟福散射的微分截面,描述电子在库仑势中的散射.第二个因子则代表在此散射的过程中辐射到 $\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega$ 范围的光子数.

对第二个因子的解释可从下述经典分析得出.对于非相对论粒子,经典电动力学给出 $t$ 时刻的微分能量辐射率为

$$\mathrm{d}W=\frac{e^2}{4\pi c^3}|\dot{\boldsymbol{v}}(t)|^2\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega, \tag{4.3.25}$$

于是在整个过程中电子辐射到 $\mathrm{d}\Omega$ 的能量为

$$\mathrm{d}U=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{\boldsymbol{v}}(t)|^2\mathrm{d}t\right]\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega. \tag{4.3.26}$$

设 $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$的傅里叶变换为 $\boldsymbol{v}(\omega)$,即

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{v}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{4.3.27}$$

不难证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{\boldsymbol{v}}(t)|^2\mathrm{d}t=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{\boldsymbol{v}}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{4.3.28}$$

当核库仑势有电子云屏蔽时,$\dot{\boldsymbol{v}}(t)$只在一个短的作用时间 $2\tau$ 内不为零,因此它可近似表为(设

作用时间在 $t=0$ 附近)

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\tilde{\delta}(t),\tag{4.3.29}$$

其中 $\tilde{\delta}(t)$为宽度 $2\tau$ 的准 $\delta$ 函数:

$$\tilde{\delta}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\tag{4.3.30}$$

$\omega_M$ 为一截止频率,其值的量级为$\frac{1}{\tau}$.

将(4.3.30)式代入(4.3.29)式再与(4.3.27)式比较即得出,$\boldsymbol{v}(\omega)$为一维白谱,即

$$\boldsymbol{v}(\omega)\approx\begin{cases}\frac{1}{2\pi}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1), & \text{当 } \omega<\omega_M,\\ 0, & \text{当 } |\omega|>\omega_M.\end{cases}$$

于是(4.3.28)式化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{\boldsymbol{v}}(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_M}|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1|^2\mathrm{d}\omega.$$

将上式代入(4.3.26)式,即得辐射到 $\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega$ 的光子数为

$$\mathrm{d}n=\frac{e^2}{4\pi^2c^3}|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1|^2\sin^2\theta\frac{1}{\hbar\omega}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega.$$

这就是(4.3.24)式第二个方括号中的因子.

以上我们着重地讨论了非相对论情况.对于极端相对论情况,$E_1,E_2\gg mc^2$.这时韧致辐射将在入射电子的方向具有尖锐的峰,即辐射的光子集中在 $\boldsymbol{p}_1$ 方向附近张角为 $\theta_0\sim\frac{mc^2}{E_1}$的圆锥内.其角分布粗略地由下述公式表示:

$$\mathrm{d}\sigma(\theta)\sim\frac{\theta\mathrm{d}\theta}{\left(\theta^2+\frac{m^2c^4}{E_1^2}\right)^2}.$$

从韧致辐射这个例子,我们还能看到量子电动力学与经典电动力学在物理观点上的差异.在经典电动力学中,加速度是电子辐射电磁波的原因,韧致辐射的产生就是由于核库仑势使电子获得了加速度.而在量子电动力学中,电子发射光子是其内在的特性,即使没有外场,电子也能发出来光子,只是由于能量动量守恒律的限制,发出来的光子不能脱离电子而远去,只能再被电子吸收;核库仑势在韧致辐射中的作用是提供了使守恒律能满足的条件,使电子发出的光子能真正地辐射出去.反过来,氢原子中处于基态的束缚电子,虽然受到核库仑势的作用,具有加速度,由于能量守恒律不满足它也不能辐射光子.这是经典电动力学所不能解释的.

## §4.4　光子与自由电子的散射

在本节和下节中,我们将对光子与电子散射的问题进行讨论,本节讨论的是光

子与自由电子的散射.当光子为高能光子时,这种散射通常称作康普顿散射.下节讨论的是光子与束缚电子的散射.

在原子物理课中,曾利用能量与动量守恒定律推出了散射光子的频率随着散射角的变化(因子光子的频率与其能量成正比),但不能给出光子散射截面的角分布.因为计算这种角分布需要动力学的理论,这正是本节课所要解决的问题.

**1. 散射的 $S$ 矩阵元与跃迁率**

此矩阵元与上节中的轫致辐射的 $S$ 矩阵元很相似,只需把其中的库仑势换成了入射光子的势函数.因此只要通过下述代换:

$$A_c(\boldsymbol{x}) \to A_\nu^{(k_1 l_1)}(x),\ \gamma_4 \to \gamma_\nu,$$
$$A_\mu^{(kl)}(x) \to A_\mu^{(k_2 l_2)}(x),$$

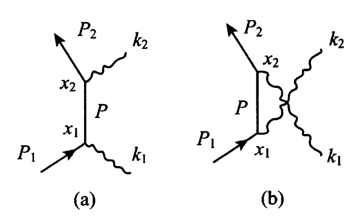



图 4.4.1　光子与自由电子的散射

即可从(4.3.3)式得出本节的 $S_{fi}^{(2)} \equiv \langle \boldsymbol{p}_2, s_2; \boldsymbol{k}_2, l_2 | \hat{S}^{(2)} | \boldsymbol{p}_1, s_1; \boldsymbol{k}_1, l_1 \rangle$.将 $u_{ps}(x)$,$A^{(kl)}(x)$和 $S^F(x_2 - x_1)$的表达式代入后,对 $x_1$ 和 $x_2$ 的四维积分即可求出,得到两个四维 δ 函数的乘积,对于图 4.4.1(a)和(b),它们分别为 $\delta^4(p - p_1 - \hbar k_1)\delta^4(p - p_2 - \hbar k_2)$和 $\delta^4(p - p_1 + \hbar k_2)\delta^4(p - p_2 + \hbar k_1)$,再对 $p$ 积分即可求出 $S_{fi}^{(2)}$ 为

$$S_{fi}^{(2)} = \mathrm{i}(2\pi)^5 \frac{e^2 \hbar^4}{V^2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \bar{u}^{(s_2)}(p_2) M u^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1) \delta^4(p_1 + \hbar k_1 - p_2 - \hbar k_2), \tag{4.4.1}$$

其中

$$\begin{aligned} M = &(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e}_{k_2 l_2}) \frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k}_1) - mc}{(\boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k}_1)^2 + m^2 c^2} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e}_{k_1 l_1}) \\ &+ (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e}_{k_1 l_1}) \frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{p}_1 - \hbar \boldsymbol{k}_2) - mc}{(\boldsymbol{p}_1 - \hbar \boldsymbol{k}_2)^2 + m^2 c^2} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e}_{k_2 l_2}). \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

我们先来说明上式中的分母不会为零,故不必加 $-\mathrm{i}\varepsilon$.先看第一个分母.它可以写成

$$(\boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k}_1)^2 + m^2 c^2 - \frac{1}{c^2}(E_1 + \hbar\omega_1)^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 c^2 - \frac{1}{c^2}(E_1 + \hbar\omega_1)^2, \tag{4.4.3}$$

从图 4.4.1(a)可以看出,上式右方的 $\boldsymbol{p}^2 + m^2 c^2$ 等于$\frac{E^2}{c^2}$,其中 $E$ 代表动量为 $\boldsymbol{p}$ 的

自由电子能量. 由于 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1$ 满足动量守恒的要求, 故若(4.4.3)式右方再等于零, 则能量守恒的要求亦将满足, 这意味着入射的自由电子通过吸收入射的光子"实跃迁"为另一个自由电子. 而这是不可能的. 同样第二个分母 $(\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2)^2+m^2c^2=\boldsymbol{p}^2+m^2c^2-\frac{1}{c^2}(E_1-\hbar\omega_2)^2$, 其中 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2$, 故从图 4.4.1(b), 若该分母等于零, 意味着入射的自由电子通过放出末态光子变成动量为 $\boldsymbol{p}$ 的自由电子, 而这也是不可能的①.

附带指出, (4.4.2)式中的分母同通常二级微扰论的结果 $\sum_m \frac{\langle f|\hat{V}|m\rangle\langle m|\hat{V}|i\rangle}{E_m-E_i}$ 中的分母是一致的. 下面简单说明一下两者之间的联系. 先看(4.4.2)中的第一个分母. 令 $E=\sqrt{(\boldsymbol{p}_1^2+\hbar\boldsymbol{k}_1)^2c^2+m^2c^4}$, 由于 $E_1+\hbar\omega_1=E_2+\hbar\omega_2$, 即可化出

$$\frac{1}{(\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1)^2+m^2c^2}=\frac{c^2}{(E-E_1-\hbar\omega_1)(E-E_2+\hbar\omega_2)}. \tag{4.4.4}$$

上式右方分母中的第一个因子 $E-E_1-\hbar\omega_1$ 就是图 4.4.1(a)所对应的"通常二级微扰论公式中"的分母 $E_m-E_i$, 因图 4.4.1(a)画出的是 $t_2>t_1$ 的情况, 中间态就是单个电子. 由于 $t_2$ 与 $t_1$ 都是积分变量, $t_2$ 也可能比 $t_1$ 小. 当 $t_2<t_1$ 时图 4.4.1 化为图 4.4.2. 对于其中的图 4.4.2(a), 中间态中反电子的动量等于 $-(\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1)$, 它的能量亦等于(4.4.4)式上面定义的 $E$. 故中间态的能量为 $E_1+\hbar\omega_1+E+E_2+\hbar\omega_2$, 它与初态能量 $E_1+\hbar\omega_1$ 之差就是 $E+E_2+\hbar\omega$, 即(4.4.4)式分母中第二个因子. 我们在§3.5 中曾经指出(见图 3.5.5 下的讨论), (4.4.2)式右方第一项为图 4.4.1(a)和图 4.4.2(a)两个物理过程的贡献之和.

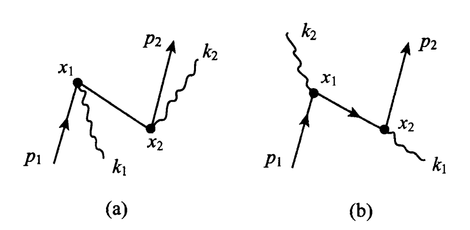



图 4.4.2　光子与自由电子的散射

同样可对(4.4.2)式中第二个分母进行讨论. 这时, 可将该因子写成

$$\frac{1}{(\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2)^2+m^2c^2}=\frac{c^2}{(E'-E_1+\hbar\omega_2)(E'+E_2-\hbar\omega_1)} \tag{4.4.5}$$

其中 $E'=\sqrt{(\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2)^2c^2+m^2c^4}$. 于是 $(E'+\hbar\omega_2-E_1)$ 代表[图 4.4.1(b)]中的中间态与初态

---

① 以上是从发生在 $x_1$ 的作用来分析, 利用 $\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{p}_2+\hbar\boldsymbol{k}_2$ 以及 $\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{p}_2-\hbar\boldsymbol{k}_1$, 我们也可从发生在 $x_2$ 的作用来分析. 这样上述论证就可用到(4.3.7)的分母上. 另外, 图 4.4.1 对应的是 $t_2>t_1$ 的情况, 当 $t_2<t_1$ 时, 可按图 4.4.2 类似地来论证.

的能量差，而 $E'+E_2-\hbar\omega_1$ 代表[图 4.4.2(b)]中的中间态与初态的能量差.(4.4.2)式中第二项即为这两个物理过程的贡献之和.

在近代的量子场论或量子电动力学的书中，常采用另一种说法：即把图 4.4.1 中的 $p=(\boldsymbol{p},p_0)$作为中间态电子(虚粒子)的四维动量(即动量加上能量).这样因子 $\delta^4(p-p_1-\hbar k_1)\delta^4\cdot(p-p_2-\hbar k_2)$就给出在每个作用顶点处形式上能量和动量都是守恒的.但这样定义的中间态电子(虚粒子)的能量 $p_0c$ 和动量$\boldsymbol{p}$ 不满足通常的动量-能量间的关系 $\boldsymbol{p}^2+m^2c^2=p_0^2$.这一情况被说成“四维动量不在质量壳上”.我们看到，近代场论中的这种说法与普通微扰论中的说法实际是同一内容的两种表叙，互相是等价的：一个把中间态电子的能量仍按质壳关系(即 $E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+mc^4$)来定义，这时虚跃迁能量不守恒，另一个说虚跃迁能量守恒，但中间态电子的能量与动量不满足质壳关系，故不是自由电子.

下面接着按(4.4.1)和(4.4.2)式来计算跃迁率.同上节一样，

$$w=\frac{1}{T}\mid\langle f\mid\hat{S}^{(2)}\mid i\rangle\mid^2$$

$$=\frac{(2\pi)^6}{\omega_1\omega_2}\frac{e^4\hbar^4c}{V^3}\mid\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)\mid^2\delta^4(p_1+\hbar k_1-p_2-\hbar k_2).\tag{4.4.6}$$

利用 $p_1^2+m^2c^2=p_2^2+m^2c^2=0,k_1^2=k_2^2=0$,可将(4.4.2)式简化为

$$M=(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1)-mc}{2\hbar\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{k}_1}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1l_1})-(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1l_1})$$
$$\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{p}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2)-mc}{2\hbar\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2}).\tag{4.4.7}$$

末态电子和光子的动量分别在 $\mathrm{d}^3p_2$ 和 $\mathrm{d}^3k_2$ 范围内的状态数等于

$$\frac{V^2}{(2\pi)^6\hbar^3}\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3k_2=\frac{V^2}{(2\pi)^6\hbar^3c^3}\mathrm{d}^3p_2\omega_2^2\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\Omega_2^\gamma,\tag{4.4.8}$$

将 $w$ 乘上上述状态数，然后对 $\mathrm{d}^3p_2$ 积分，即可得到光子散射到 $\mathrm{d}\Omega_2^\gamma\mathrm{d}\omega_2$ 范围的跃迁率为

$$\frac{e^4}{Vc}\frac{\omega_2}{\omega_1}\mid\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)\mid^2\delta(\omega_1-\omega_2+\frac{E_1}{\hbar}-\frac{E_2}{\hbar})\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\Omega_2^\gamma.$$

值得注意的是，进一步对 $\omega_2$ 积分时，并不简单地就是将 $\omega_2=\omega_1-\hbar(E_2-E_1)$代入被积函数，原因是 $\delta\left(\omega_1-\omega_2+\frac{E_1}{\hbar}-\frac{E_2}{\hbar}\right)$中的$E_2$ 已是与 $\omega_2$ 有关的函数：

$$E_2=\sqrt{(\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2)^2c^2+m^2c^4},\ \mid\boldsymbol{k}_2\mid c=\omega_2.\tag{4.4.9}$$

故正确的积分结果要再多出一个因子$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}\omega_2}}$.这样，单位时间内光子散射到

$\mathrm{d}\Omega_2^\gamma$ 范围并具有偏振 $l_2$(末态电子螺度为 $s_2$, $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2$)的概率就等于

$$\mathrm{d}W=\frac{e^4\hbar}{Vc}\frac{\omega_2}{\omega_1}\mid\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)\mid^2\frac{1}{\hbar+\mathrm{d}E_2/\mathrm{d}\omega_2}\mathrm{d}\Omega_2^\gamma.\quad(4.4.10)$$

从下文的小字说明中,我们求出:在初态电子为静止的参数系中

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}\omega_2}=\frac{\hbar^2(\omega_2-\omega_1\cos\theta)}{E_2},\qquad(4.4.11)$$

其中 $\theta$ 为 $\boldsymbol{k}_2$ 与 $\boldsymbol{k}_1$ 间的夹角(即散射角). 再加上原子物理课中所学过的散射光子频率随 $\theta$ 变化的公式[参见下文(4.4.14)式]即可将(4.4.10)式化为

$$\mathrm{d}W=\frac{e^4}{Vmc^3}E_2\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\mid\bar{u}^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)\mid^2\mathrm{d}\Omega_2^\gamma.\qquad(4.4.12)$$

下面先来推导散射光子频率随散射角的变化

在此问题中,初态的 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\hbar\boldsymbol{k}_1$ 是给定的,末态中的 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\hbar\boldsymbol{k}_2$ 共含六个变量(各粒子的能量均由其动量决定,不再是独立的变量),其中四个可通过能量和动量守恒关系确定,剩下两个仍可任意取值. 我们取这两个变量为 $\boldsymbol{k}_2$ 的方向角 $\theta$ 和 $\varphi$. 为简单计,我们选取参考系与初态电子相对静止,并取坐标系的 $z$ 轴与 $\boldsymbol{k}_1$ 同方向. 这时(4.4.9)式化为

$$E_2=\sqrt{\hbar^2(\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2\cos\theta)+m^2c^4}.\qquad(4.4.13)$$

将上式以及 $E_1=mc^2$ 代入 $\omega_2=\omega_1+\frac{1}{\hbar}(E_1-E_2)$,即可解出

$$\omega_2=\frac{mc^2\omega_1}{E_T-\hbar\omega_1\cos\theta},\qquad E_T=mc^2+\hbar\omega_1=E_2+\hbar\omega_2.\qquad(4.4.14)$$

这就是原子物理学中给出的散射光子随散射角 $\theta$ 变化的关系(也称作康普顿效应公式).

顺带指出,由于 $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1+\hbar\boldsymbol{k}_1-\hbar\boldsymbol{k}_2$,而 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_1$ 是已知的,$\omega_2$ 由(4.4.14)式给出,故当 $\boldsymbol{k}_2$ 的方向给定时,$\boldsymbol{p}_2$ 也就完全确定.

(4.4.14)式也可用约化波长 $\lambdabar=\frac{\lambda}{2\pi}$ 表示出来,结果为

$$\lambdabar_2=\lambdabar_1+2\lambdabar_c\sin^2\frac{\theta}{2},\ \lambdabar_c=\frac{\hbar}{mc}\qquad(4.4.15)$$

$\lambdabar_c$ 即电子的约化康普顿波长. 由于它是一个小量,故只当入射光子能量很高时,$\lambdabar_2$ 与 $\lambdabar_1$ 的差别才显著. 从(4.4.13)式即不难求出(4.4.11)式.

值得指出的是,有些书认为康普顿效应是量子理论所独有的,在经典的电子散射中不会出现频移. 这是不正确的. 在考虑了入射波中的磁场对电子的作用后,经典散射理论也能给出散射光的频率随 $\theta$ 的变化. 下面作具体说明.

在通常的经典散射理论中,只考虑入射波中电场对电子(设原来是静止)的作用. 它将使电子作强迫振动从而发射电磁波,这就是散射波. 但若进一步考虑入射光中磁场对振动电子的洛伦兹力以后,就会得出振子将获得一个沿入射光方向的动量. 我们知道,当振子以速度 $v$ 沿入射光方向运动时,振子的强迫振动频率将不

是入射光的频率 $\omega_1$，而是

$$\omega'_1 = \omega_1\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

这就是多普勒效应. 而一个静止的观测者所测到的该运动振子在 $\theta$ 方向所发射的电磁波，其频率又不就是 $\omega'_1$ 而是另一个值 $\omega_2$(第二类多普勒效应)：

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega'_1\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \omega_1\left[1 + \frac{v}{c}(\cos\theta - 1)\right] \\ &= \omega_1\left(1 - 2\frac{v}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

用约化波长表示出来即为

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1\left(1 + 2\frac{v}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{4.4.17}$$

当振子散射的总能量达到 $U$ 时，根据动量守恒它从入射光所获得的动量应为 $\frac{U}{c}$(因为散射波是全方向的，并未带走动量)，于是它的 $v$ 将等于 $\frac{U}{mc}$. 代入(4.4.17)式即得

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1\left(1 + \frac{2U}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{4.4.18}$$

这就是经典理论所给出的散射波波长随散射角 $\theta$ 的变化关系. 如果取散射能量 $U = \hbar\omega_1$，并注意到 $\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi} = \frac{c}{\omega_1}$，(4.4.18)式即化成量子理论的(4.4.15)式.

由此可见，散射波频率的移动并不是量子理论所独有的，经典理论同样有. 两者相比，量子理论的特点仍只表现在被散射的能量是量子化的，每次散射的能量等于特定值 $\hbar\omega_1$.

## 2. 散射的微分截面

我们知道在散射问题中，直接反映散射体的散射能力的不是散射率而是散射截面，因散射率与入射流的密度有关. 将 $\mathrm{d}W$ 除以入射光子流密度 $\frac{c}{V}$(因为 $\lambda$ 射的是一个光子，它的归一化体积为 $V$)，即得出散射的微分截面 $\mathrm{d}\sigma$. 由(4.4.12)式，

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{mc^4}E_2\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\mid u^{(s_2)}(\boldsymbol{p}_2)Mu^{(s_1)}(\boldsymbol{p}_1)\mid^2\mathrm{d}\Omega_2^\gamma. \tag{4.4.19}$$

如果初态电子是非极化的，而我们又不区分末态电子的极化，则应对 $s_2$ 求和并对 $s_1$ 平均. 这样的微分截面记作 $\widetilde{\mathrm{d}\sigma}$，即 $\widetilde{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}\mathrm{d}\sigma$. 经过比较繁复的代数运算可以

求出(设 $\boldsymbol{p}_1=0$,如前)

$$\widetilde{\mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{4}r_c^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left[4(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2})^2+\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-2\right]\mathrm{d}\Omega_2^{\gamma},\tag{4.4.20}$$

其中

$$r_c=\frac{e^2}{mc^2}$$

为电子的经典半径,其值约为 $2.82\times10^{-13}$cm.实际上 $r_c$ 并不具有电子半径的意义,它只是由电子的物理参数(加上其他普适参数)所做成的一个量纲为长度的量而且其中不含 $\hbar$.

当入射光子的能量 $\hbar\omega_1$ 比 $mc^2$ 小得多时,$\frac{\omega_1}{\omega_2}$将近似为 1,因为由(4.4.15)式

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=1+\frac{2\hbar\omega_1}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.\tag{4.4.21}$$

将$\frac{\omega_1}{\omega_2}\approx1$ 代入(4.4.20)式即得

$$\widetilde{\mathrm{d}\sigma}\approx r_c^2[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}]^2\mathrm{d}\Omega_2^{\gamma}.\tag{4.4.22}$$

不难证明在此情况下散射后电子的速度属于非相对论范围,因由 $E_2<mc^2+\hbar\omega_1$ 即可得出 $\boldsymbol{p}_2^2c^2<2mc^2\hbar\omega_1+\hbar^2\omega_1^2$.于是有

$$\frac{v_2^2}{c^2}<2\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}\ll1.\tag{4.4.23}$$

附带指出,只当入射光子波长小到 $2.43\times10^{-10}$cm 时,相应的 $\hbar\omega_1$ 才等于 $mc^2$.

(4.4.22)式表明,在非相对论情况下,$\widetilde{\mathrm{d}\sigma}$只依赖于 $\cos^2\Theta$,其中 $\Theta$ 为$\boldsymbol{e}^{(l_2)}(\boldsymbol{k}_2)$与 $\boldsymbol{e}^{(l_1)}(\boldsymbol{k}_1)$之间的夹角.此结果与经典理论一致.

对于另一种特殊情况,即 $\hbar\omega_1\gg mc^2$ 的极端相对论情况,我们可区分小角度区 $2\sin^2\frac{\theta}{2}\ll\frac{mc^2}{\hbar\omega_1}$和大角度区 $2\sin^2\frac{\theta}{2}\gg\frac{mc^2}{\hbar\omega_1}$来分别讨论.在小角度区,由(4.4.21)式仍有$\frac{\omega_1}{\omega_2}\approx1$,于是(4.4.22)式仍成立.在大角度区,由(4.4.21)式有$\frac{\omega_1}{\omega_2}\gg1$,这时(4.4.20)式给出

$$\widetilde{\mathrm{d}\sigma}\approx\frac{1}{4}r_c^2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathrm{d}\Omega_2^{\gamma}.\tag{4.4.24}$$

再利用(4.4.21)式可将上式化为

$$\widetilde{\mathrm{d}\sigma}\approx\frac{1}{8}r_c^2\frac{mc^2}{\hbar\omega_1}\frac{1}{\sin^2\theta/2}\mathrm{d}\Omega_2^{\gamma},\tag{4.4.25}$$

这时$\widetilde{\mathrm{d}\sigma}$与初末态光子的偏振无关,并随着散射角增大而减小.这两个区对总截面的贡献大体相当.

如果进一步初态光子也是非偏振的,同时测量中又不区分末态光子的偏振,则

应对(4.4.20)式右方对 $l_2$ 求和并对 $l_1$ 取平均.所得的结果用$\overline{d\sigma}$表示,即

$$\overline{d\sigma}=\frac{1}{8}r_c^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\sum_{l_1,l_2}\left[4(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2+\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-2\right]d\Omega_2^\gamma.\quad(4.4.26)$$

下面先来对 $l_1$ 求和.取坐标架如图 4.4.3,其中 $\boldsymbol{n}_1$ 为 $\boldsymbol{k}_1$ 方向单位矢量,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 分别为 $\boldsymbol{e}_{k_1l_1}$ 的两个取向,则有

$$\sum_{l_1}(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2+(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2=1-(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2.$$

同样,取 $\boldsymbol{n}_2$ 为 $\boldsymbol{k}_2$ 方向单位矢量,并令 $\theta$ 为$\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$ 间夹角,则有

$$\sum_{l_2}(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2=1-\cos^2\theta.$$

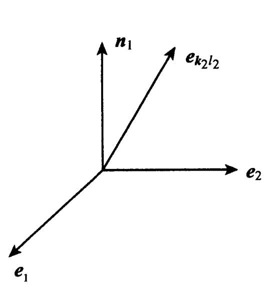



图 4.4.3　坐标架与 $\boldsymbol{e}_{k_2l_2}$ 的方位图

总起来即得出

$$\sum_{l_1,l_2}(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})^2=2-(1-\cos^2\theta)=1+\cos^2\theta.\quad(4.4.27)$$

至于(4.4.26)式中的$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-2\right)$项,对 $l_1$ 和 $l_2$ 求和就等于将它乘上一个系数 4.

将以上结果代入(4.4.26)式,即化出

$$\overline{d\sigma}=\frac{1}{2}r_c^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-\sin^2\theta\right)d\Omega_2^\gamma.\quad(4.4.28)$$

此式对相对论情况与非相对论情况都适用.(4.4.20)式和(4.4.28)式都称作克莱因-仁科(Klein-Nishina)公式.

在非相对论情况($\frac{v_2^2}{c^2}\ll1$),$\frac{\omega_1}{\omega_2}\approx1$,(4.4.28)式化为

$$\overline{d\sigma}\approx\frac{1}{2}r_c^2(1+\cos^2\theta)d\Omega_2^\gamma,\quad(4.4.29)$$

与经典非相对论理论的汤姆孙一致.这时散射微分截面向前与向后是对称的(即角分布相对 $\theta=\frac{\pi}{2}$对称),参见图 4.4.4.总截面为

$$\bar{\sigma}=\frac{8\pi}{3}r_c^2,\quad(4.4.30)$$

是一个很小的量,相当于一个半径为$\sqrt{\frac{8}{3}}r_c$($r_c$ 为电子经典半径)的小球的横截面.

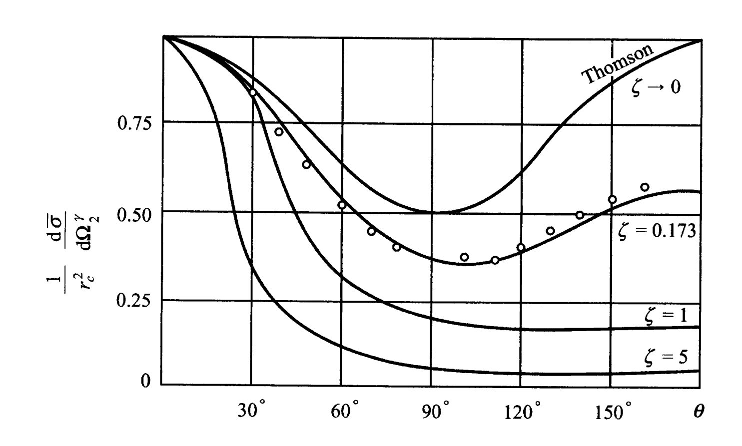



图 4.4.4 光子与自由电子的微分散射截面

$\zeta = \hbar\omega_1/mc^2$ 圆点为 Friedrich 和 Goldhaber 的实际数据

随着 $\zeta \equiv \frac{\hbar\omega_1}{mc^2}$ 增加，$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_2^r}$ 在大角度区持续下降，总截面也随之减少，如图 4.4.4 和图 4.4.5 所示.

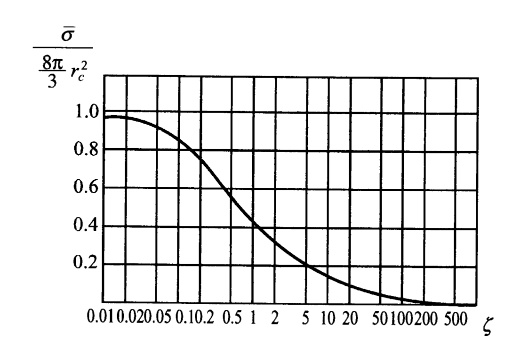



图 4.4.5 光子与自由电子散射的总截面，横坐标 $\zeta = \hbar\omega_1/mc^2$

从(4.4.20)式和(4.4.28)式还可看出，散射截面与带电粒子的质量平方成反比(质量含于 $r_c$ 中)，这样当 $\gamma$ 射线穿越物质时，主要散射将来自电子(对于 $\gamma$ 射线，原子中电子可看成是自由电子)，而不是来自原子核. 图 4.4.5 还表明，$\gamma$ 光子穿透物质的本领随着其能量增长而增加.

# §4.5　光子在原子上的散射和双光子辐射

在本节中，我们主要是研究单个光子与原子中束缚电子的散射．它又可分成两种情况．一种情况是原子的末态与初态相同．这种散射称为弹性散射．另一种情况是原子末态与初态不同，末态的能级可以比初态高，也可以比初态低（如果该能级未被占满）．这种散射称为非弹性散射，或称为拉曼散射．通常，原子的反冲可以忽略，于是弹性散射后光子的频率 $\omega_2$ 与散射前的值 $\omega_1$ 相同．而在非弹性散射时，光子的频率要发生改变．非弹性散射的频率改变与康普顿散射的情况有所不同，其改变值等于$\frac{1}{\hbar}(E_2-E_1)$，与散射角无关也与入射光的频率无关（其中 $E_2$ 和 $E_1$ 分别为原子末态和初态的能级）．因此，通过拉曼散射可以测知原子的能级差，这使得它成为研究原子结构的重要实验手段．

通常原子的辐射都是单光子辐射，但原则上并不限制多光子的辐射，只是其辐射率很小，不能与单光子辐射相竞争．但在特殊情况下，单光子辐射受到抑制，双光子辐射才有机会显示出来．本节还将就一个例子对此进行讨论．

## 1．散射的 $S$ 矩阵元和微分截面

在光学频段入射光子的能量要比“电子静止质量所对应的能量”$mc^2$ 小得多．因而是§4.4 第二小节中所说的非相对论情况．这时相互作用哈密顿量可取为

$$\hat{H}_{\text{int}}(t)=-\frac{\mathrm{i}e\hbar}{mc}\int\hat{\phi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\left[\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla+\frac{\mathrm{i}e}{2\hbar c}\hat{A}^2(\boldsymbol{x},t)\right]\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x$$
$$\equiv\hat{V}_1+\hat{V}_2. \tag{4.5.1}$$

$\hat{V}_1$ 和 $\hat{V}_2$ 分别表示单光子作用项和双光子作用项［此外的 $H_0$，即为(3.1.46)式和(3.1.48)式所示的 $\hat{H}_{\text{rad}}(t)$和 $\hat{H}_{\text{at}}(t)$之和］．(4.5.1)式中的 $\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)$为

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)=\sum_n\hat{\alpha}_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x}). \tag{4.5.2}$$

由于是非相对论情况．我们将用普通微扰论处理．散射为二次作用过程，因而 $S$ 算符须取为正比于$e^2$ 的项，即

$$\hat{S}^{(2)}=\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\hat{V}_1(t)\hat{V}_1(t')+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{V}_2(t)\mathrm{d}t. \tag{4.5.3}$$

系统的初末态分别表示为

$$|\,i\rangle=|\,\phi_1;\boldsymbol{k}_1,l_1\rangle,\quad |\,f\rangle=|\,\phi_2;\boldsymbol{k}_2,l_2\rangle,$$

于是

$$\hat{S}_{fi}^{(2)} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\langle f \mid \hat{V}_1(t)\hat{V}_1(t') \mid i\rangle + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f \mid \hat{V}_2(t) \mid i\rangle \mathrm{d}t, \tag{4.5.4}$$

其中 $\hat{V}_j(t)$随时间的变化可以表示成

$$\hat{V}_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{V}_j^{(s)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}, \tag{4.5.5}$$

$\hat{V}_j^{(s)}$ 代表薛定谔图象中的算符. $\hat{H}_0$ 的本征态$|N\rangle$构成完全集合,因而有

$$\sum_N \mid N\rangle\langle N \mid = 1. \tag{4.5.6}$$

将(4.5.6)式插入(4.5.4)式第一项的两个 $\hat{V}_1$ 之间,并将两个 $\hat{V}_1$ 用(4.5.5)式代入,即将该项化为

$$-\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\sum_N\langle f \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{V}_1^{(s)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar} \mid N\rangle\langle N \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t'/\hbar}\hat{V}_1^{(s)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t'/\hbar} \mid i\rangle$$

$$= -2\pi\mathrm{i}\delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i)\sum_n \frac{\langle f \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid N\rangle\langle N \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid i\rangle}{\varepsilon_i - \varepsilon_N},$$

其中 $\varepsilon$ 代表体系的总能量,即 $\varepsilon_f = E_2 + \hbar\omega_2$, $\varepsilon_i = E_1 + \hbar\omega_1$. (4.5.4)式第二项在用(4.5.5)式代入后可直接积出:

$$\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\langle f \mid \hat{V}_2(t) \mid i\rangle = -2\pi\mathrm{i}\delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i)\langle f \mid \hat{V}_2^{(s)} \mid i\rangle$$

两项合起来即得

$$\langle f \mid \hat{S}_2^{(2)} \mid i\rangle = -2\pi\mathrm{i}\delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i)\left[\sum_N \frac{\langle f \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid N\rangle\langle N \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid i\rangle}{\varepsilon_i - \varepsilon_N} + \langle f \mid \hat{V}_2^{(s)} \mid i\rangle\right]. \tag{4.5.7}$$

这就是普通的微扰论公式. 利用 $\hat{\phi}$ 的展式(4.5.2)和 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的展式(1.3.27), $\langle f| \hat{V}_2^{(s)} |i\rangle$可立即求出,结果即为

$$\langle f \mid \hat{V}_2^{(s)} \mid i\rangle = \frac{2\pi\hbar e^2}{Vm\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int\phi_2^\dagger(\boldsymbol{x})[(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}]\phi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x$$

$$\equiv \frac{2\pi\hbar e^2}{Vm\sqrt{\omega_1\omega_2}}\langle(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{21}, \tag{4.5.8}$$

其中$\langle\cdots\rangle_{21}$代表在 $\phi_2^\dagger(\boldsymbol{x})$和 $\phi_1(\boldsymbol{x})$间取矩阵元,在入射波和散射波的波长都比原子尺度大得多的情况下,在积分范围内 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}$和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}$都近似等于 1,这时(4.5.8)式就化成

$$\langle f \mid \hat{V}_2^{(s)} \mid i\rangle \approx \frac{2\pi\hbar e^2}{Vm\omega_1}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2})\langle\phi_2 \mid \phi_1\rangle. \tag{4.5.9}$$

这表明在波长 $\lambda_1$、$\lambda_2 \gg a$ 时,双光子作用项只当原子初末态相同时才有贡献.

(4.5.7)式方括号第一项中有两次 $\hat{V}_1^{(s)}$ 作用.经过这两次作用应吸收掉初态光子并产生出末态光子.因而又可分为下述两种情况:

i) 右方的 $\hat{V}_1^{(s)}$ 吸收掉初态中的光子并使原子从 $\phi_1$ 跃迁到某个中间态 $\phi_{n'}$,而左方的 $\hat{V}_1^{(s)}$ 发射出末态中的光子并使原子从 $\phi_n$ 跃迁到 $\phi_2$.这时中间态 $|N\rangle$ 中无光子,相应地两个矩阵元为

$$\langle N \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid i\rangle = -\frac{\mathrm{i}e\hbar}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_1}}\int \phi_n^{\dagger}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\nabla\phi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x$$

$$= \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_1}}\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{n1}, \tag{4.5.10a}$$

$$\langle f \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid N\rangle = -\frac{\mathrm{i}e\hbar}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_2}}\int \phi_2^{\dagger}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}\cdot\nabla\phi_n(x)\mathrm{d}^3 x$$

$$= \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_2}}\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{2n}, \tag{4.5.10b}$$

而分母中的 $\varepsilon_i - \varepsilon_N$ 等于 $E_1 + \hbar\omega_1 - E_n$.

ii) 右方的 $\hat{V}_1^{(s)}$ 发射出末态中光子同时使原子从 $\phi_1$ 跃迁到 $\phi_n$,而左方的 $\hat{V}_1^{(s)}$ 吸收掉初态中光子并同时使原子从 $\phi_n$ 跃迁到 $\phi_2$.这时中间态 $|N\rangle$ 中含有两个光子 $(\boldsymbol{k}_1, l_1)$ 和 $(\boldsymbol{k}_2, l_2)$,即

$$|N\rangle = |\phi_n; \boldsymbol{k}_1, l_1; \boldsymbol{k}_2, l_2\rangle,$$

$$\varepsilon_i - \varepsilon_N = (E_1 + \hbar\omega_1) - (E_n + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2) = E_1 - E_n - \hbar\omega_2. \tag{4.5.11}$$

相应的矩阵元为

$$\langle N \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid i\rangle = -\frac{\mathrm{i}e\hbar}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_2}}\int \phi_n^{\dagger}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}\cdot\nabla\phi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x$$

$$= \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_2}}\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{n1}, \tag{4.5.12a}$$

$$\langle f \mid \hat{V}_1^{(s)} \mid N\rangle = -\frac{\mathrm{i}e\hbar}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_1}}\int \phi_2^{\dagger}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\nabla\phi_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x$$

$$= \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_1}}\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{2n}, \tag{4.5.12b}$$

在光波波长比原子尺度大得多的情况下,(4.5.10)和(4.5.12)式中的指数因子也都可近似取为 1.

将(4.5.8)、(4.5.10)和(4.5.11)式代入(4.5.7)式中即得出

$$\langle f \mid \hat{S}^{(2)} \mid i \rangle = -\frac{\mathrm{i}4\pi^2 \hbar}{V} M_{21} \delta(E_2 + \hbar\omega_2 - E_1 - \hbar\omega_1), \qquad (4.5.13)$$

其中

$$M_{21} = \frac{e^2}{m\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \Bigg\{ \sum_n \Bigg[ \frac{\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \rangle_{2n} \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \rangle_{n1}}{m(E_1 + \hbar\omega_1 - E_n)}$$
$$+ \frac{\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \rangle_{2n} \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \rangle_{n1}}{m(E_1 - \hbar\omega_2 - E_n)} \Bigg]$$
$$+ \langle (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{k}_2) \cdot \boldsymbol{x}} \rangle_{21} \Bigg\}. \qquad (4.5.14)$$

上式内的中间态 $n$ 不限于原子的束缚态能级,亦即“求和”将包括对原子连续能级态的积分,但在光学范围内其贡献不太重要.

在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{x}}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{x}}$ 可近似等于 1 的情况下,(4.5.14)式可简化为

$$M_{21} = \frac{e^2}{m\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \Bigg\{ \sum_n \Bigg[ \frac{\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \rangle_{2n} \langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \rangle_{n1}}{m(E_1 + \hbar\omega_1 - E_n)} + \frac{\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \rangle_{2n} \langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \rangle_{n1}}{m(E_1 - \hbar\omega_2 - E_n)} \Bigg]$$
$$+ (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2}) \langle \phi_2 \mid \phi_1 \rangle \Bigg\}. \qquad (4.5.15)$$

有了 $S$ 矩阵元以后,即可求出跃迁率:

$$w = \frac{1}{T} \mid \langle f \mid \hat{S}^{(2)} \mid i \rangle \mid^2 = \frac{8\pi^3 \hbar}{V^2} \mid M_{21} \mid^2 \delta(E_2 + \hbar\omega_2 - E_1 - \hbar\omega_1), \qquad (4.5.16)$$

若再乘上末态光子在 $\mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega_2^\gamma$ 范围的状态数 $\frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega_2^2}{c^3} \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega_2^\gamma$,并对 $\mathrm{d}\omega_2$ 积分即得出单位时间内将光子散射到 $\mathrm{d}\Omega_2^\gamma$ 范围的概率为

$$\mathrm{d}W = \frac{\omega_2^2}{Vc^3} \mid M_{21} \mid^2 \mathrm{d}\Omega_2^\gamma. \qquad (4.5.17)$$

将它除以单个入射光子的流密度 $\left(\frac{1}{V}\right)c$,结果即为微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_2^\gamma} = \frac{1}{c^4} \mid \omega_2 M_{21} \mid^2. \qquad (4.5.18)$$

此值已与归一化体积 $V$ 无关.

**2. $S$ 矩阵元的约化**

在弹性散射而且初末态相同($\phi_2 = \phi_1$)情况,$\delta(E_2 + \hbar\omega_2 - E_1 - \hbar\omega_1) = \frac{1}{\hbar}\delta(\omega_2 - \omega_1)$,(4.5.15)式中 $M_{21} \to M_{11}$. $M_{11}$ 的值为

$$M_{11}=\frac{e^2}{m\omega}\left\{\sum_n\left[\frac{\langle \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{1n}\langle \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{n1}}{m(E_1+\hbar\omega-E_n)}+\frac{\langle \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{1n}\langle \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{n1}}{m(E_1-\hbar\omega-E_n)}\right]\right.$$
$$\left.+(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})\right\}\equiv M_{11}^{(1)}+M_{11}^{(2)},\tag{4.5.19}$$

其中 $\omega=\omega_1=\omega_2$，$M_{11}^{(1)}$ 和 $M_{11}^{(2)}$ 分别为单光子作用项与双光子作用项的贡献. 为了将上式进一步化简，我们先将 $M_{11}^{(1)}$ 中两个分母展开为

$$\frac{1}{E_1-E_n\pm\hbar\omega}=\frac{1}{E_1-E_n}\mp\frac{\hbar\omega}{(E_1-E_n)^2}+\frac{\hbar^2\omega^2}{(E_1-E_n)^2(E_1-E_n\pm\hbar\omega)}.\tag{4.5.20}$$

值得指出的是，由于最后一项分母不是 $(E_1-E_n)^3$ 而是 $(E_1-E_n)^2(E_1-E_n\pm\hbar\omega)$，故上述展式并未作近似. 再由公式(4.1.10)亦即

$$\langle a\mid\hat{\boldsymbol{p}}\mid b\rangle=\mathrm{i}m\omega_0\langle a\mid\boldsymbol{x}\mid b\rangle,\ \omega_0=\frac{1}{\hbar}(E_a-E_b),\tag{4.5.21}$$

即得(4.5.20)式第一项对 $M_{11}^{(1)}$ 的贡献为

$$\frac{\mathrm{i}e^2}{m\hbar\omega}\sum_n[\langle 1\mid \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\mid n\rangle\langle n\mid \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\mid 1\rangle-\langle 1\mid \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\mid n\rangle\langle n\mid \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\mid 1\rangle]$$
$$=\frac{\mathrm{i}e^2}{m\hbar\omega}\langle 1\mid[(\boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})-(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x})]\mid 1\rangle.$$

如将 $\boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}$ 写作 $\sum_j(e_2)_jx_j$，将 $\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ 写作 $\sum_{j'}(e_1)_{j'}\cdot\hat{p}_{j'}$，再利用 $x_j$ 与 $\hat{p}_{j'}$ 之间的对易关系，即可将上式化为 $-\frac{e^2}{m\omega}(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2l_2})$，从而第一项与 $M_{11}^{(2)}$ 正好消去.

(4.5.20)式第二项对 $M_{11}^{(1)}$ 的贡献为

$$\frac{e^2\hbar}{m^2}\sum_n(E_1-E_n)^{-2}[-\langle 1\mid \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\mid n\rangle\langle n\mid \boldsymbol{e}_{k_1,l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\mid 1\rangle$$
$$+\langle 1\mid \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\mid n\rangle\langle n\mid \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{p}\mid 1\rangle],$$

利用(4.5.21)式即将上式化为

$$-\frac{e^2}{\hbar}\sum_n[\langle 1\mid \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\mid n\rangle\langle n\mid \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x}\mid 1\rangle-\langle 1\mid \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x}\mid n\rangle\langle n\mid \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\mid 1\rangle]$$
$$=-\frac{e^2}{\hbar}\langle 1\mid[(\boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x})]\mid 1\rangle=0.$$

这样(4.5.19)式中就只剩(4.5.20)式右方第三项对 $M_{11}$ 有贡献. 利用(4.5.21)式即得出弹性散射的 $M_{11}$ 最后值为

$$M_{11}=e^2\omega\sum_n\left[\frac{\langle \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{1n}\langle \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1+\hbar\omega-E_n}+\frac{\langle \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{1n}\langle \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1-\hbar\omega-E_n}\right].\tag{4.5.22}$$

我们看到上式中的分子已化成电偶极矩的跃迁矩阵元的积.

从以上推导中,可以看出对于较低频光子和较高频光子,双光子作用项 $M_{11}^{(2)}$ 都很重要.对于较低频光子,当 $\hbar\omega$ 比所有中间态与初态间的能量差 $|E_n - E_1|$ 都小得多时,(4.5.20)式右方就是按 $\frac{\hbar\omega}{|E_1 - E_n|}$ 展开的最大项,次大项与剩余项.这样,从以上推导中可见,单光子作用项中的最大项与 $M_{11}^{(2)}$ 相消,亦即 $M_{11}^{(1)}$ 与 $M_{11}^{(2)}$ 同量级①.对于较高频光子(但仍属非相对论范围,而且(4.5.19)式仍适用),当 $\hbar\omega$ 比所有有重要贡献的中间态与初态的能量差 $|E_n - E_1|$ 都大得多时,双光子作用项甚至成为主导项,因为这时

$$\frac{1}{E_1 - E_n \pm \hbar\omega} = \pm \frac{1}{\hbar\omega} - \frac{E_1 - E_n}{\hbar^2\omega^2} + \cdots,$$

在代入 $M_{11}$ 的表达式(4.5.22)后,上式右方第一项(最大项)贡献为零,第二项的贡献可利用(4.5.21)式仿前化成 $\frac{e^2}{m\omega}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1})$,这样 $M_{11}$ 就近似等于 $M_{11}^{(2)}$,从而双光子作用项的确成为主导项.实际上,只当 $\omega$ 在上述两种极端情况之间并位于某个 $\frac{1}{\hbar}|E_n - E_1|$ 附近时,双光子作用项才不重要.从(5.4.22)式来看,当 $\hbar\omega$ 正好等于 $|E_n - E_1|$ 时,其中有一项的分母将为零,从而 $M_{11}$ 将发散.这种情形对应于初态到中间态的跃迁为实跃迁.当然,$M_{11}$ 不会真地变成无穷大,因为原子能级实际上有一个宽度并不是一个完全确定的值(参见第六章中的讨论).但在这些频率点 $|M_{11}|$ 会出现高峰.这种情况称为共振散射(荧光).有关问题我们将在以后课文中讨论.

下面回到较高频和较低频情况微分截面大小的问题.对较高频光子,不难求出

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_2^\gamma} = r_c^2[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}]^2. \tag{4.5.23}$$

此式也就是光子与自由电子散射的(4.4.22)式.如果初态光子是非偏振的,测量散射截面时又不区分末态光子的偏振,则微分散射截面亦将由(4.4.29)式表示,总截面 $\sigma_{\text{tot}}$ 由(4.4.30)式表示,其值为 $\frac{8\pi}{3}r_c^2$.这表明在 $\hbar\omega \gg E_n - E_1$ 情况下,原子中的电子可看成是自由电子.

---

① 由于出现这种相消,(4.5.22)式的有效性需要进一步审查.主要问题是因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}$ 是否还能略去.不难看出,若 $\omega$ 不是太小,对于重要的中间态 $\left(\frac{\hbar\omega}{E_n - E_1}\right)^2$ 仍比 $ka$ 大得多的情况,略去 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}$ 因子仍然是可以的.

上述总截面已是一个很小的量,而按(4.5.22)式下面的讨论,对于低频光子,由于 $M_{11}^{(1)}$ 与 $M_{11}^{(2)}$ 之间的相消,总截面比上述 $\sigma_{\text{tot}}$(它由 $M_{11}^{(2)}$ 所贡献)还要小得多,并与 $\omega^4$ 成正比.

我们看到,原子对光子的散射行为定性上与经典电动力学中所给出的谐振子散射相似.在较低频区散射截面随 $\omega^4$ 增加,中间出现共振峰,最后趋于汤姆孙散射,其总截面已变得与频率无关.

对于非弹性散射(拉曼散射)的情况,双光子作用项的贡献 $\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \rangle_{21}$ 等于零,单光子作用项首先化成

$$\frac{\mathrm{i}e^2}{\hbar\omega\sqrt{\omega_1\omega_2}}\sum_n\left[\frac{(E_n - E_1)\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{2n}\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1 + \hbar\omega_1 - E_n}\right.$$
$$\left.+\frac{(E_2 - E_n)\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \boldsymbol{x}\rangle_{2n}\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\rangle_{n1}}{E_1 - \hbar\omega_2 - E_n}\right], \tag{4.5.24}$$

再将

$$\frac{E_n - E_1}{E_1 + \hbar\omega_1 - E_n} = -1 + \frac{\hbar\omega_1}{E_1 + \hbar\omega_1 - E_n}, \quad \frac{E_2 - E_n}{E_1 - \hbar\omega_2 - E_n} = 1 + \frac{\hbar\omega_1}{E_1 - \hbar\omega_2 - E_n}, \tag{4.5.25}$$

代入.(4.5.25)两式右方第一项对(4.5.24)式的贡献合起来可写成

$$-\frac{e^2}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}}\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1}\rangle_{21}.$$

像双光子项一样,它也等于零.(4.5.25)两式中剩下的另一项可仿前来处理,最后结果得

$$M_{21} = e^2\sqrt{\omega_1\omega_2}\sum_n\left[\frac{\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \boldsymbol{x}\rangle_{2n}\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1 + \hbar\omega_1 - E_n} + \frac{\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1 l_1} \cdot \boldsymbol{x}\rangle_{2n}\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2 l_2} \cdot \boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1 - \hbar\omega_2 - E_n}\right]. \tag{4.5.26}$$

若初末原子态相同,即 $\phi_2 = \phi_1$,上式就化为(4.5.22)式.

最后,我们指出,由于能量守恒关系,散射光子与入射光子的频率差

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_2), \tag{4.5.27}$$

与散射角无关,而由 $E_1 - E_2$ 确定.因此通过拉曼散射可给出原子能级方面的知识.

**3. 关于双光子项来源的讨论**

这是一个有兴趣的问题,因为在原本的哈密顿量中作用项为(3.1.41)式即

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \frac{e}{c}\int \hat{j}_{\mu}(\boldsymbol{x},t)\hat{A}_{\mu}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3 x, \tag{4.5.28}$$

只是单光子作用项,在作了非相对论近似后才出现双光子作用项.如何从物理上来理解它的来源?下面将阐明,它实际上是通过中间态的二次过程,只是因为这个中间态含有正负电子对,其能量较大.在非相对论情况下,它与初态间的能量差可近似为常数 $2mc^2$.这样才约化成表观上的双光子作用.下面仍以原子的弹性散射为例来作具体的说明.

当我们从相对论性理论出发来讨论这一问题时,仍可取库仑规范,并将 $\hat{H}$ 写成 $\hat{H}_0+\hat{H}_{\text{int}}$,其中 $\hat{H}_0=\hat{H}_{\text{at}}+\hat{H}_{\text{rad}}$. $\hat{H}_{\text{at}}$ 为原子的相对论性哈密顿量

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{at}}(t) &= \int \hat{\psi}^{\dagger}(x)(-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta mc^2+V(\boldsymbol{x}))\hat{\psi}(x)\mathrm{d}^3 x \\ &= \int \hat{\bar{\psi}}^{\dagger}(x)(\hbar c\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+mc^2+\gamma_4 V(\boldsymbol{x}))\hat{\psi}(x)\mathrm{d}^3 x,\end{aligned} \tag{4.5.29}$$

其中 $V(\boldsymbol{x})$ 代表核库仑势.与上章不同的是,现在 $\hat{\psi}(x)$ 要用核库仑势中的波函数 $\psi^{(n)}(x)\equiv\psi^{(n)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t}$ 来展开,其中 $\psi^{(n)}(\boldsymbol{x})$ 满足定态狄拉克方程

$$(-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta mc^2+V(\boldsymbol{x}))\psi^{(n)}(\boldsymbol{x}) = E_n\psi^{(n)}(\boldsymbol{x}). \tag{4.5.30}$$

上式中的 $E_n$ 有大于零(正能级)和小于零(负能级)两类值,分别用 $E_1,E_2,\cdots$ 和 $E_{-1},E_{-2},\cdots$ 来表示.在相互作用图像中,$\hat{\psi}(x)$ 和 $\hat{\bar{\psi}}(x)$ 的展式可写成

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\alpha}_n\psi^{(n)}(x)+\sum_{n=-1}^{-\infty}\hat{\beta}_n^{\dagger}\psi^{(n)}(x), \\ \hat{\bar{\psi}}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\alpha}_n^{\dagger}\bar{\psi}^{(n)}(x)+\sum_{n=-1}^{-\infty}\hat{\beta}_n\bar{\psi}^{(n)}(x),\end{aligned} \tag{4.5.31}$$

于是电子在核库仑势 $V$ 中的传播子即为

$$\tilde{S}^{\mathrm{F}}_{\sigma\rho}(x'-x)\equiv\langle 0\mid T\hat{\psi}_{\sigma}(x')\hat{\bar{\psi}}_{\rho}(x)\mid 0\rangle = \begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{\sigma}^{(n)}(\boldsymbol{x}')\bar{\psi}_{\rho}^{(n)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}(t'-t)}, & t'>t, \\ \displaystyle -\sum_{n=-1}^{-\infty}\psi_{\sigma}^{(n)}(\boldsymbol{x}')\bar{\psi}_{\rho}^{(n)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}(t'-t)}, & t'<t.\end{cases} \tag{4.5.32}$$

我们可将(4.5.32)式中 $t'>t$ 和 $t'<t$ 两个表达式统一地表示出来,结果为

$$\tilde{S}^{\mathrm{F}}_{\sigma\rho}(x'-x) = \frac{\hbar c}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 c(t'-t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{\sigma}^{(n)}(\boldsymbol{x}')\bar{\psi}_{\rho}^{(n)}(\boldsymbol{x})}{E_n(1-\mathrm{i}\epsilon)+\hbar k_0 c}. \tag{4.5.33}$$

在上式的分母中,除了 $E_n+\hbar k_0 c$ 之外,还有一个无穷小虚部,而该无穷小虚部的

符号正好与 $E_n$ 相反. 由于 $E_n$ 的取值有正有负,故在 $k_0$ 的复平面中被积函数的极点位置如图 4.5.1 所示.

(4.5.33)式的证明如下(参见阿希叶泽尔等《量子电动力学》p.362). 先推导下述公式

$$\frac{\hbar c}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ik_0 ct}}{E_n(1-i\epsilon)+\hbar k_0 c}dk_0$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}(t<0,E_n>0)\text{或}(t>0,E_n<0),\\ e^{-iE_n t/\hbar}, & \text{当 } t>0,E_n>0,\\ -e^{-iE_n t/\hbar}, & \text{当 } t<0,E_n<0.\end{cases} \tag{4.5.34}$$

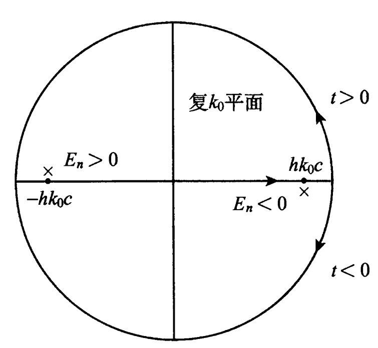



图 4.5.1 $k_0$ 复平面中的积分路线: $t>0$ 时为上半圆. $t<0$ 时为下半圆

推导也很简单,当 $t<0$ 时,上式积分可补以下半大圆,而当 $t>0$ 时可补以上半大圆,(见图 4.5.1),理由如(3.4.9)式下面所述. 被积函数的极点在 $E_n>0$ 时位于第二象限,在 $E_n<0$ 时位于第四象限,如图中×所示. 通过留数定理即可得出(4.5.34)式,有了(4.5.34)式就不难得出(4.5.33)式.

二级微扰的散射算符 $\hat{S}^{(2)}$ 与过去有同样的正规乘积表达式,只是 $\hat{A}$ 中只含横光子,从而

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}N\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x d^4x' \hat{\overline{\psi}}(x')\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{A}}(x')$$

$$\widetilde{S}^F(x'-x)\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{A}}(x)\hat{\psi}(x). \tag{4.5.35}$$

于是散射的 $S$ 矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{e^2}{\hbar V}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int d^4x d^4x' \overline{\psi}^{(2)}(x')[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})e^{-ik_2\cdot x'}\widetilde{S}^F(x'-x)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})e^{ik_1\cdot x}$$

$$+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})e^{ik_1\cdot x'}\widetilde{S}^F(x'-x)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})e^{-ik_2\cdot x}]\psi^{(1)}(x), \tag{4.5.36}$$

将其中 $\widetilde{S}^F(x'-x)$ 用(4.5.33)式代入后先对四维 $x$ 和 $x'$ 进行积分,然后再对 $k_0$ 积分即得出

$$S_{fi}^{(2)} = -i\frac{4\pi^2\hbar e^2 c^2}{V\sqrt{\omega_1\omega_2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg[\frac{\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{n1}}{E_n(1-i\epsilon)-E_1-\hbar\omega_1}$$

$$+\frac{\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{n1}}{E_n(1-i\epsilon)-E_1+\hbar\omega_2}\Bigg]\delta(E_2+\hbar\omega_2-E_1-\hbar\omega_1). \tag{4.5.37}$$

上式中 $n$ 取正整数的部分在作非相对论近似后即为单光子作用项部分. 下面来指明:求和中 $n$ 取负整数部分在作非相对论近似后即为双光子作用项.

首先,从(4.5.32)可以看出,只有 $t'<t$ 的情况求和指标 $n$ 才取负数.因此 $n$ 取负数与图 4.5.2 相对应.该图清楚地显示,第一次作用(较早)发生在 $t'$,这次作用产生了正负电子对,同时或发出末态光子或吸收初态光子,如图 4.5.2(a)、(b)两图所示.在情况(a),中间态能量为 $E_1+\hbar\omega_1+\widetilde{E}_n+E_2+\hbar\omega_2$,其中 $\widetilde{E}_n$ 为正电子(反电子)的能量(取正值).而在情况(b),中间态能量为 $E_1+E_2+\widetilde{E}_n$.初态与中间态的能量差分别为 $(\Delta\varepsilon)_a=-(\widetilde{E}_n+E_2+\hbar\omega_2)$ 和 $(\Delta\varepsilon)_b=-(\widetilde{E}_n+E_2-\hbar\omega_1)$.另要指出的是,在 $n$ 取负数的情况下,(4.5.37)式中的 $E_n$ 为负值[见(4.5.30)式下的说明],它实际上就是 $-\widetilde{E}_n$.再利用 $E_1+\hbar\omega_1=E_2+\hbar\omega_2$ 即得 $(\Delta\varepsilon)_a=E_n-E_1-\hbar\omega_1$,$(\Delta\varepsilon)_b=E_n-E_1+\hbar\omega_2$.它们分别就是 $n$ 取负数时(4.5.37)式中两项的分母(除了附加的无穷小虚部以外).而两次相互作用的矩阵元除了常系数外分别就是 $\langle n|\mathrm{N}\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}')\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')|i\rangle$ 和 $\langle f|\mathrm{N}\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x})|n\rangle$.将两者的乘积对空间积分后,在图(a)情况即为 $-\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2l_2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{n1}$,而在图 4.5.2(b)情况即为 $-\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2l_2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{n1}$.

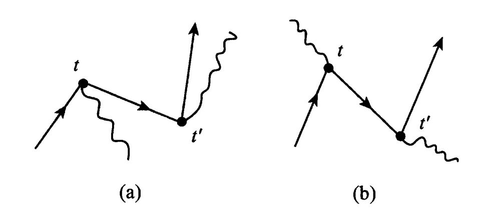



图 4.5.2 $t'<t$ 时的散射图形

在非相对论近似中,上述两个分母都近似等于 $-2mc^2$.于是负能级部分对 $S_{fi}^{(2)}$ 的贡献就化为

$$\bar{S}_{fi}^{(2)}=-\mathrm{i}\frac{2\pi^2e^2\hbar}{mV\sqrt{\omega_1\omega_2}}\sum_{n=-\infty}^{-1}[\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2l_2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{n1}$$
$$+\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2l_2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{n1}]\delta(E_1+\hbar\omega_1-E_2-\hbar\omega_2).\quad(4.5.38)$$

下一步是要完成对 $n$ 的求和.需要注意的是,对于狄拉克方程,全部负能级的解并不构成完备集.但若在 $\psi^{(n)}(\boldsymbol{x})$ 前乘上负能级的投影算符.那么就可以将"对 $n$ 的求和"扩展到"从 $-\infty$ 到 $+\infty$".在非相对论情况下,负能级的投影算符就是 $\frac{1}{2}(1-\gamma_4)=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$,因为这时负能级波函数只有下两个分量,而正能级波函数只有上两个分量,从而有

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\psi^{(n)}=\begin{cases}\psi^{(n)}, & 当\ n<0,\\ 0, & 当\ n>0.\end{cases}\quad(4.5.39)$$

利用上述负能级的投影算符,(4.5.38)式中第一项求和 $\sum_{n=-\infty}^{-1}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2l_2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{2n}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot$

$\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_n$ 就化为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}\ \frac{1}{2}(1-\gamma_4)\right\rangle_{2n}\left\langle\frac{1}{2}(1-\gamma_4)(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\right\rangle_{n1}$，再利用全部 $\psi^{(n)}$($n$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$)构成完备集以及 $\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\frac{1}{2}(1-\gamma_4)=\frac{1}{2}(1-\gamma_4)$即将上述求和化为

$$\frac{1}{2}\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})(1-\gamma_4)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{21}.$$

进一步利用 $\gamma_4$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的反对易性，将$\frac{1}{2}(1-\gamma_4)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})$化成$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\frac{1}{2}(1+\gamma_4)$，其中$\frac{1}{2}(1+\gamma_4)$是非相对论情况下正能级的投影算符. 而初态 $\psi^{(1)}$ 是正能级，$\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\psi^{(1)}=\psi^{(1)}$，于是上式最终简化为

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{21}.$$

同样(4.5.38)式中第二项求和可以简化成

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_{k_2 l_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{21}.$$

最后利用 $\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=2\delta_{ij}$，上两项加在一起就得出

$$2\langle(\boldsymbol{e}_{k_2 l_2}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{21}.$$

代回(4.5.38)式后，即将 $\overline{S}_{fi}^{(2)}$ 化成

$$\overline{S}_{fi}^{(2)}=-\mathrm{i}\frac{4\pi^2e^2\hbar}{mV\sqrt{\omega_1\omega_2}}\langle(\boldsymbol{e}_{k_2 l_2}\cdot\boldsymbol{e}_{k_1 l_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{21}\delta(E_1+\hbar\omega_1-E_2-\hbar\omega_2),\tag{4.5.40}$$

正好就是(4.5.7)式中的双光子作用项.

从以上讨论我们看到：(4.5.37)式中 $n$ 取负整数部分表观上对应于电子从 $\psi^{(1)}(\boldsymbol{x})$跃迁到负能级波函数 $\psi^{(n)}(\boldsymbol{x})$再跃迁到 $\psi^{(2)}(\boldsymbol{x})$，实际上如图 4.5.2 所示是先产生一对正负电子(并吸收或放出一个光子)，再通过一次作用将一对正负电子湮没. 证实了(4.5.28)式下面的陈述.

物理上我们也可以这样来理解双光子项：由于中间态含正负电子对，与初态的能量差 $\Delta E$ 很大，根据 $\Delta E\Delta t\approx\hbar$，该中间态存在的时间将很短，从而两次作用几乎重合，近似地就合成了一个双光子作用.

另外一个问题. 初看起来通过负 $n$ 中间态(即含有正负电子对的中间态)的项应该贡献小，因为它的分母 $\varepsilon_i-\varepsilon_N$ 的绝对值$\approx 2mc^2$，比起正 $n$ 的中间态分母的绝对值$\approx\hbar\omega+mv^2$ 要大得多，但实际结果并非这样简单，双光子作用项一般比单光

子作用项要大(除了共振散射的情况以外),原因在于:$\boldsymbol{\gamma}$ 等于$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$,而当 $n$ 为负值时 $\psi^{(n)}$ 大分量在下,小分量在上,$\langle\boldsymbol{\gamma}\rangle_{2n}$ 和$\langle\boldsymbol{\gamma}\rangle_{n1}$ 分别都等于 $\pm\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}$ 在两个大分量之间的矩阵元,而当 $n$ 为正值时,却都等于 $\pm\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}$ 在一个大分量和一个小分量之间的矩阵元.因此在弹性散射情况下,前者的分子要比后者大$\frac{c^2}{v^2}$,于是负 $n$ 中间态与正 $n$ 中间态的项之比$\approx\frac{c^2}{v^2}\frac{\hbar\omega+mv^2}{mc^2}$.当 $\hbar\omega\ll mv^2$ 时,两项比值同量级,而当 $\hbar\omega\gg mv^2$ 时,负 $n$ 项将比正 $n$ 项的贡献还要大.这一分析表明,即使在光学过程中,正负电子对的效应也不是完全可以忽略的.

**4. 双光子辐射**

前面已经指出,对于原子从 $j=0$ 的初态到 $j=0$ 的末态的跃迁,单光子辐射率严格地为零.因为光子的 $J$ 最小值为 1,角动量守恒严格禁止了上述的辐射跃迁.但双光子辐射是允许的,在这种情况下成为主要的辐射.不过上述双光子辐射只当原子具有偶数个电子才有可能出现,因奇数个电子的量子数 $j$ 只能是半整数,不会等于零.在单个电子情况,双光子辐射是否也可能成为主要辐射呢?也是有的(当然不是从 $j=0$ 到 $j=0$).下面来对此具体说明.首先在非相对论的多极辐射理论中,原子从 $l=0$ 到 $l=0$ 并辐射一个光子的跃迁率等于零.因为这时原子初末态的 $j$ 都等于$\frac{1}{2}$,从而只有 $J=1,P$ 为偶的单光子多极辐射也就是磁偶极辐射才有可能.但是在此情况下,跃迁磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m}_{21}=-\frac{e\hbar}{2mc}\int\phi_2^{\dagger}(\boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{\sigma})\phi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x=-\frac{e\hbar}{2mc}\int\phi_2^{\dagger}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\phi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x, \tag{4.5.41}$$

上式中 $\phi_1(\boldsymbol{x})$和 $\phi_2(\boldsymbol{x})$可表成旋量球函数 $\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)$与径向波函数的乘积.由于不同能量的径向波函数互相正交,故$\boldsymbol{m}_{21}$将为零.只有考虑相对论修正后,辐射率才不为零.但其数值极小.例如氢原子 $2\mathrm{S}_{1/2}$ 态,能量比它低的只有 $1\mathrm{S}_{1/2}$ 态.这两个态之间的单光子跃迁率只有 $10^{-7}$/秒,相应的寿命约为 $10^2$ 天.在此情况,双光子辐射率要比单光子大得多.下面就对此作定量的计算.

双光子辐射的 $S$ 矩阵元可利用(4.5.7)式来计算,只是$|i\rangle$应取为$|\phi^{(1)};0\rangle$,$|f\rangle$应取为$|\phi^{(2)};\boldsymbol{k}_1,l_1,\boldsymbol{k}_2,l_2\rangle$.该式第一项内的中间态$|n\rangle$仍有两种取法,即$|\phi^{(n)};\boldsymbol{k}_1,l_1\rangle$和$|\phi^{(n)};\boldsymbol{k}_2,l_2\rangle$.所求出的 $M_{21}$ 与"光子-原子非弹性散射"的结果相似,只需把(4.5.14)求和内的 $\omega_1$ 改成 $-\omega_1$,把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}$ 改成 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}$(求和号外的$\sqrt{\omega_1}$不变).在 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}$和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}}$可近似取为 1 的情况下有

$$S_{(fi)}^{(2)} = -\frac{\mathrm{i}4\pi\hbar}{V}M_{21}\delta(E_2 + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - E_1), \tag{4.5.42a}$$

$$M_{21} = \sqrt{\omega_1\omega_2}e^2\sum_n\left[\frac{\langle \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{2n}\langle \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1 - \hbar\omega_1 - E_n} + \frac{\langle \boldsymbol{e}_{k_1l_1}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{2n}\langle \boldsymbol{e}_{k_2l_2}\cdot\boldsymbol{x}\rangle_{n1}}{E_1 - \hbar\omega_2 - E_n}\right]. \tag{4.5.42b}$$

(4.5.42b)式与非弹性散射 $M_{21}$ 的公式(4.5.26)的差别就只是方括号内第一项分母中的 $\hbar\omega_1$ 变成了 $-\hbar\omega_1$. 相应的跃迁率为

$$w = \frac{1}{T}|S_{fi}^{(2)}|^2 = \frac{8\pi^3e^4\hbar}{V^2}|M_{21}|^2\delta(E_2 + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - E_1). \tag{4.5.43}$$

但要指出的是,双光子辐射过程与非弹性散射过程两者末态的状态数完全不同. 因为在这里,末态中有两个光子,而非弹性散射情况末态中只有一个光子.

两个光子的动量在 $\mathrm{d}^3k_1\mathrm{d}^3k_2$ 范围的状态数为

$$\frac{V^2}{(2\pi)^6}\mathrm{d}^3k_1\mathrm{d}^3k_2 = \frac{v^2\omega_1^2\omega_2^2}{(2\pi c)^6}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}\Omega_2, \tag{4.5.44}$$

将此状态数乘到跃迁率(4. 5. 43) $w$ 上,并对 $\omega_2$ 积分后,得出两光子辐射到 $\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}\Omega_2\mathrm{d}\omega_2$ 范围的跃迁率为

$$\mathrm{d}W = \frac{e^4\omega_1^2\omega_2^2}{8\pi^3c^6}|M_{21}|^2\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}\Omega_2\mathrm{d}\omega_1, \tag{4.5.45}$$

其中 $\omega_2 = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_2) - \omega_1$.

另外,要特别指出的是,末态 $|\phi^{(2)};\boldsymbol{k}_1,l_1,\boldsymbol{k}_2,l_2\rangle = \hat{a}_{k_1l_1}^{\dagger}\hat{a}_{k_2l_2}^{\dagger}|\phi^{(2)};0\rangle$,代表在 $(\boldsymbol{k}_1,l_1)$ 和 $(\boldsymbol{k}_2,l_2)$ 模中各有一个光子,并不区分第一个光子和第二个光子. 因而与"第一个光子的波矢和偏振为 $(\boldsymbol{k}_1,l_1)$,第二个光子的波矢和偏振为 $(\boldsymbol{k}_2,l_2)$"的说法含意不同. 表现在求总跃迁率 $w$(双光子辐射率)时,在将(4. 5. 45)对 $l_1$、$l_2$ 求和,对 $\mathrm{d}\Omega_1$、$\mathrm{d}\Omega_2$ 和 $\mathrm{d}\omega_1$ 积分后,要除一个因子 2,以避免重复计算.

按照上述公式对氢原子从 $2S_{1/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 跃迁计算的结果(见 Breit and Tellel, Astrophys, **91**, 215(1940)), $W\approx7$/秒,其值比前述单光子磁偶极辐射的跃迁率要大得多.

最后还要指出的是,上述双光子辐射不是通过双光子作用项来实现的,而是通过两次单光子的作用. 由于原子的初末态正交, $\hat{V}_2^{(s)}$ 的贡献为零,情况与非弹性散射一样.

# 第五章　量子光场的相干态　光场的量子统计描述

在以前几章中，对于量子光场我们采用的是粒子数表象(也称作福克表象)，即用粒子数算符的本征态(也就是自由能量本征态)来表示光场的任一个状态. 这种本征态能较好地显示光场的粒子性，也能方便地表示出光场与电子的作用. 但下面将看到，这种态所描述的光场具有完全不确定的相位(初相位)，因而它并不对应于经典相干光场. 这也反映在"该态中 $\hat{A}_\mu(x)$，$\hat{\boldsymbol{E}}(x)$和 $\hat{\boldsymbol{B}}(x)$的平均值都为零"这一情况上面(尽管 $\hat{A}_\mu^2(x)$，$\hat{E}^2(x)$和 $\hat{B}^2(x)$的平均值并不为零). 表明该态所描述的是随机交替变化的电磁势和场强. 在量子电动力学中，一个相干光场将用量子相干态来描述. 本章的内容就是介绍量子相干态的定义和它的基本特性，说明它是最接近经典相干场的量子场状态. 或者说，它是经典相干场的量子对应.

量子相干态在光学中有着重要的地位. 工作在远离阈值以上的激光器所生成的光场(激光)就近似为相位缓慢扩散的量子相干态(参见第八章). 相干态表象作为一种数学工具也在广泛的物理领域(如粒子物理，统计物理)的理论中获得了应用.

我们知道，体系的状态有纯态和统计混合态两种类型. 对于量子体系，纯态由态矢量表示，而统计混合态常采用状态密度算符来表示. 前者对应于经典理论中的力学态，后者对应于经典统计理论中的统计系综. 在本章中我们将在相干态的基础上讨论光场密度算符(纯态也可为它的特殊情况)的表示，以及与密度算符相联系的分布函数和特征函数.

分布函数和特征函数有几种定义，它们都是 $C$ 数函数，但却能完全地描述量子"统计混合态"(量子统计系综)，它们在处理量子开放系统中有重要的应用.

在本章中，除第 6 节外我们没有考虑光场与电子相互作用，$\hat{A}(\boldsymbol{x},t)$都是指自由光场.

## §5.1　光场的相位因子算符

在经典光学中，光场的相位是一个可观测量，因此在量子化后应当可以引入相应的相位算符(但这一问题有一定的复杂性，至今仍有一些论文在进行讨论，本节只对比较基本的内容作一般性的介绍). 我们将说明，在量子光学中，光场的幅模(或光子数)与相位应是一对共轭量，两者不可能同时测准. 它们的不确定度之间存在海森伯的测不准关系. 另外，具有简明定义的实际是"相位因子"算符而不是相位

算符本身.最后我们将讨论相位因子算符的本征态问题.

**1. 相位因子算符的定义**

先来考察一个行波模式的自由经典光场

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = [A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e} + A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}^*], \tag{5.1.1}$$

其中 $A$ 可分解为幅模与相位因子的乘积即 $|A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $|A|$ 代表振幅的大小即幅模, $\phi$ 代表幅角即振幅的相位.以下简称相位(实际是在原点的初相位), $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 将称为相位因子.在量子化后, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 已成为算符 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)$,对于上述单模行波场,

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}}[\hat{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e} + \hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}^*] \tag{5.1.2}$$

我们也可以将 $\hat{a}$ 表示成幅模算符① 和相位因子算符的乘积.但现经典情况不同,在量子理论中这种分解不是唯一的,因为相位因子算符与幅模算符不对易(见下文),排列的前后次序不同时结果将不同.我们将按下式将 $\hat{a}$ 分解成幅模算符和相位因子算符:

$$\hat{a} = \sqrt{\hat{n}+1}\,\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}, \tag{5.1.3}$$

其中 $\sqrt{\hat{n}+1}$ 是一个有确切定义的算符:它的本征态为 $|n\rangle$,对应的本征值为 $\sqrt{n+1}$.在 $n$ 表象中它是对角矩阵,对角元即为 $\sqrt{n+1}$.不仅如此,它的逆是存在的,在 $n$ 表象中也是对角矩阵,对角元为 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$(这就是我们不把(5.1.3)式右方取成 $\sqrt{\hat{n}}\,\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}$ 的原因.并参见下文).逆的存在有着重要意义,它使得 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}$ 也成为有确切定义的算符

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a}. \tag{5.1.4}$$

上述 $\sqrt{\hat{n}+1}$ 和 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}$ 就是我们所要定义的幅模算符和相位因子算符.再将 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}$ 的厄米共轭算符记作 $\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}$,于是由(5.1.3)和(5.1.4)式而得

$$\hat{a}^\dagger = \widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}\sqrt{\hat{n}+1}, \quad \widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}} = \hat{a}^\dagger(\hat{n}+1)^{-1/2}. \tag{5.1.5}$$

再由 $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{n}+1$ 即可得出

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}\,\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}} = 1. \tag{5.1.6}$$

但 $\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}$ 并非是完全意义下 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}$ 的逆,它只是 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}$ 的右逆,因为

$$\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}\,\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} \neq 1. \tag{5.1.7}$$

---

① 这里为了方便不考虑 $C$ 数因子 $\sqrt{\dfrac{2\pi\hbar c}{V\omega}}$.

上式可从

$$\widehat{e^{i\phi}}\,|\,0\rangle = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a}\,|\,0\rangle = 0 \tag{5.1.8}$$

得到佐证:因由(5.1.8)式$\langle 0|\widehat{e^{-i\phi}}\,\widehat{e^{i\phi}}\,|0\rangle=0$,而若(5.1.7)式成立,它将等于$\langle 0|0\rangle=1$.以上讨论表明,$\widehat{e^{i\phi}}$并不存在完全意义下的逆.这也是我们不把$\widehat{e^{i\phi}}$写成$e^{i\hat{\phi}}$的原因.后者具有完全的逆$e^{-i\hat{\phi}}$.

在有些文献中采用下述方式来定义相位因子算符和幅模算符:

$$\hat{a} = \widehat{e^{i\phi}}\sqrt{\hat{n}}, \quad \hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\hat{n}}\,\widehat{e^{-i\phi}}.$$

这种定义看起来较简洁,但却存在一个缺陷:由于$\sqrt{\hat{n}}$不存在严格意义下的逆(因为在 $n$ 表象中,它有一个对角元为0,其倒数将为$\infty$).于是,算符因子$\widehat{e^{i\phi}}$将无完全确切的定义.

上述讨论还表明,我们所定义的只是相位因子算符而不是相位算符本身,后者只能在某种限制(或近似)的意义下才被采用.参见下文和§8.5处对激光的讨论.

下面来对算符$\widehat{e^{i\phi}}$的性质作进一步讨论.由(5.1.4)式以及该式上面关于算符$(\hat{n}+1)^{-\frac{1}{2}}$的说明,当 $n\neq 0$ 时,

$$\widehat{e^{i\phi}}\,|\,n\rangle = \sqrt{n}(\hat{n}+1)^{-\frac{1}{2}}\,|\,n-1\rangle = |\,n-1\rangle, \tag{5.1.9}$$

而当$|\,n\rangle$取为$|0\rangle$时,如(5.1.8)式所示,$\widehat{e^{i\phi}}$作用上去后为0(意思是作用后的态不存在).这表明$\widehat{e^{i\phi}}$作用的后果就是简单地使粒子数减少1.同样可得出$\widehat{e^{-i\phi}}$的作用后果是使粒子数增加1(由此可见,它们才分别是单纯的吸收和发射算符).

根据(5.1.8)和(5.1.9)式,我们可以把$\widehat{e^{i\phi}}$表示为

$$\widehat{e^{i\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty}|\,n\rangle\langle n+1\,|. \tag{5.1.10}$$

对上式取厄米共轭,得

$$\widehat{e^{-i\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty}|\,n+1\rangle\langle n\,|. \tag{5.1.11}$$

由此可见

$$\widehat{e^{i\phi}}\,\widehat{e^{-i\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty}|\,n\rangle\langle n\,| = 1, \tag{5.1.12}$$

而

$$\widehat{e^{-i\phi}}\,\widehat{e^{i\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty}|\,n+1\rangle\langle n+1\,| = 1-|\,0\rangle\langle 0\,|. \tag{5.1.13}$$

上式表明$\widehat{e^{-i\phi}}\,\widehat{e^{i\phi}}$与1的差别只是一项真空态的投影算符$|0\rangle\langle 0|$,并表明$\widehat{e^{-i\phi}}$与$\widehat{e^{i\phi}}$互

不对易,两者的对易子为

$$[\widehat{e^{i\phi}},\widehat{e^{-i\phi}}] = |0\rangle\langle 0|. \tag{5.1.14}$$

**2. 相位因子算符的近似本征态**

由(5.1.10)式,任何粒子数态$|n\rangle$的有限项的叠加都不可能是$\widehat{e^{i\phi}}$的本征态.换句话说,若其本征态存在,只能是粒子数态的无穷级数.不难证实,它的本征态为

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi}|n\rangle, \tag{5.1.15}$$

因为$\widehat{e^{i\phi}}$作用上去的结果为

$$\widehat{e^{i\phi}}|\phi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\phi}|n-1\rangle = e^{i\phi}|\phi\rangle. \tag{5.1.16}$$

从上式并得出其本征值而为$e^{i\phi}$.附带指出,由于$\widehat{e^{i\phi}}$并非厄米算符,故其本征值可以不是实数.

附带指出,$e^{i\hat{n}\phi_0}$为相位态(5.1.15)式的平移算符.因

$$e^{i\hat{n}\phi_0}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi+in\phi_0}|n\rangle = |\phi+\phi_0\rangle.$$

按(5.1.15)式定义的态$|\phi\rangle$不能归一化,不同本征值的态彼此也不正交①,但它们构成完备集,即$\int_0^{2\pi} d\phi|\phi\rangle\langle\phi| = 1$.此式不难通过(5.1.15)式来证明.人们可以在某种近似意义下定义$\widehat{e^{i\phi}}$的可归一化的本征态:

$$|\phi\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\sum_{n=0}^{N} e^{in\phi}|n\rangle. \tag{5.1.17}$$

对于此状态$|\phi\rangle_N$,有

$$\widehat{e^{i\phi}}|\phi\rangle_N = e^{i\phi}|\phi\rangle - \frac{1}{\sqrt{N+1}}e^{i(N+1)\phi}|N\rangle. \tag{5.1.18}$$

当$N$很大时,后项"长度"的平方$\frac{1}{N+1}$是一个小量.

还需要指出的是,由(5.1.15)式定义的$|\phi\rangle$并非$\widehat{e^{-i\phi}}$的本征态.实际上$\widehat{e^{-i\phi}}$不可能具有本征态,因为$n$有一个"有限的"最小值0(而不是到$-\infty$).对于由(5.1.17)式定义的$|\phi\rangle_N$,$\widehat{e^{-i\phi}}$作用上去后的结果为

---

① "不能归一化"和"彼此不正交"不一定就是问题.$\hat{p}$和$\hat{q}$的本征态就不能归一化,下节定义的相干态彼此也不正交.

$$\widehat{e^{-i\phi}}\,|\,\phi\rangle_N = e^{-i\phi}\,|\,\phi\rangle_N + \frac{1}{\sqrt{N+1}}(e^{iN\phi}\,|\,N+1\rangle - e^{i\phi}\,|\,0\rangle), \tag{5.1.19}$$

即$|\phi\rangle_N$只近似地为$\widehat{e^{-i\phi}}$的本征态(本征值为$e^{-i\phi}$),但在 $n$ 的最大值和最小值处各有一项误差.就是由(5.1.15)式定义的含无穷项的态$|\phi\rangle$也不是$\widehat{e^{-i\phi}}$的本征态.

Pegg 和 Barnett 曾利用(5.1.17)式来定义一个厄米相位算符(Phys. Rev. A **39**,1665(1989);**43**,2579(1991)).他们取 $\phi$ 为一系列离散值:$\phi_j=\frac{2\pi j}{N+1}$,$j=0,1,\cdots,N$.这样,由(5.1.17)式定义的两个不同相位的态将彼此正交:${}_N\langle\phi_j|\phi_{j'}\rangle_N=\delta_{jj'}$.他们并定义相位算符为

$$\hat{\phi} = \sum_{i=0}^{N}\phi_j\,|\,\phi_j\rangle_{N\,N}\langle\phi_j\,|,$$

于是有

$$\hat{\phi}\,|\,\phi_j\rangle_N = \phi_j\,|\,\phi_j\rangle.$$

并且$\hat{\phi}$为厄米算符.在此理论中 $N$ 为一个大的正整数,并在计算的最后结果中令 $N\to\infty$.

另外要指出的是,对于状态$|\phi\rangle_N$,粒子数是完全不确定的,$n$ 的各种取值以均等的概率出现.当$\langle n\rangle\to\infty$时,方差 $\Delta n$ 也随之趋于$\infty$:

$$\langle n\rangle = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}n = \frac{1}{2}N,$$

$$\langle n^2\rangle = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}n^2 = \frac{1}{3}N(N+2). \tag{5.1.20}$$

于是 $n$ 的方差为一个相当大的值:

$$\Delta n = \sqrt{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{N(N+2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{3}}N. \tag{5.1.21}$$

### 3. 粒子数与相位间的测不准关系

为此先来推导粒子数算符与相位因子算符间的对易关系.从$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$可得

$$\left(\sqrt{\hat{n}+1}\,\widehat{e^{i\phi}}\;\widehat{e^{-i\phi}}\sqrt{\hat{n}+1}\right) - \left(\widehat{e^{-i\phi}}\,(\hat{n}+1)\,\widehat{e^{i\phi}}\right) = 1,$$

再利用(5.1.12)式即化出$(\hat{n}+1)-\widehat{e^{-i\phi}}(\hat{n}+1)\widehat{e^{i\phi}}=1$,最后,从右乘$\widehat{e^{-i\phi}}$,得到的结果就是

$$[\hat{n},\widehat{e^{-i\phi}}] = \widehat{e^{-i\phi}}. \tag{5.1.22}$$

通过对上式取厄米共轭,还可得出

$$[\hat{n},\widehat{e^{i\phi}}] = -\widehat{e^{i\phi}}. \tag{5.1.23}$$

(5.1.22)和(5.1.23)式表明,粒子数算符$\hat{n}$与相位因子$\widehat{e^{\pm i\phi}}$是不可对易的,它们间的对易子分别为$\mp\widehat{e^{\pm i\varphi}}$.关于上述对易关系的内涵,可参见下面小字的讨论.

如果我们简单化地(或者说示意性地)把 $\widehat{e^{i\phi}}$ 作为 $e^{i\hat{\phi}}$，那么从(5.1.23)式就可得出粒子数算符 $\hat{n}$ 和位相算符 $\hat{\phi}$ 之间的简单对易关系(推导见后)

$$[\hat{n},\hat{\phi}] = i, \tag{5.1.24}$$

相应地有

$$\Delta n \Delta\phi \geqslant \frac{1}{2}.$$

此两式比(5.1.23)式具有更简明的意义，使得 $\hat{n}$ 和 $\hat{\phi}$ 更像一对共轭算符(由于它们都是无量纲的量，故 $\hbar$ 不出现). 推导如下.

将 $e^{i\hat{\phi}}$ 展成级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\hat{\phi}^n$ 并代入相应修改后的(5.1.23)式 $[\hat{n},e^{i\hat{\phi}}]=-e^{i\hat{\phi}}$. 然后逐项对比就得出

$$\frac{i^{k+1}}{(k+1)!}[\hat{n},\hat{\phi}^{k+1}] = -\frac{i^k}{k!}\hat{\phi}^k, \quad k = 0,1,2,\cdots, \tag{5.1.25}$$

其中第一项($k=0$ 的项)就是(5.1.24)式. 当此式成立时，(5.1.25)式对所有的 $k$ 亦都成立. 从而(5.1.24)式与 $[\hat{n},e^{i\hat{\phi}}]=-e^{i\hat{\phi}}$ 等价.

但如前面所指出的，$\hat{\phi}$ 算符本身只具有局限的意义. 实际上，朴素形式的(5.1.24)式含有内在的矛盾. 对它在两个粒子数本征态间取矩阵元时将得出 $(n_1-n_2)\langle n_1|\hat{\phi}|n_2\rangle = i\delta_{n_1n_2}$. 再取 $n_1=n_2$ 即得左方为零而右方为 i(思考题：在量子力学中，将对易关系 $[\hat{q},\hat{p}]=i\hbar$ 在 $\hat{q}$ 的两半征态中取值会不会得出同样的矛盾?).

通常可测量的物理量都对应厄米算符，而 $\widehat{e^{i\phi}}$ 和 $\widehat{e^{-i\phi}}$ 都不是，但我们可以定义两个厄米的相位因子算符来代替它们，那就是 $\widehat{\cos\phi}$ 和 $\widehat{\sin\phi}$ ：

$$\widehat{\cos\phi} = \frac{1}{2}[\widehat{e^{i\phi}} + \widehat{e^{-i\phi}}], \qquad \widehat{\sin\phi} = \frac{1}{2i}[\widehat{e^{i\phi}} - \widehat{e^{-i\phi}}]. \tag{5.1.26}$$

这两个算符彼此也是不可对易的，不难求出

$$[\widehat{\cos\phi}, \widehat{\sin\phi}] = \frac{1}{2}i|0\rangle\langle 0|. \tag{5.1.27}$$

其右方比(5.1.14)式右方只多一个常数因子 $\frac{1}{2}i$. 从(5.1.22)和(5.1.23)式还可得出这两个算符与 $\hat{n}$ 之间的对易关系为

$$[\hat{n}, \widehat{\sin\phi}] = i\,\widehat{\cos\phi}, \quad [\hat{n}, \widehat{\cos\phi}] = -i\,\widehat{\sin\phi}. \tag{5.1.28}$$

从上式可得出相应的海森伯测不准关系.

$$\Delta n\Delta(\sin\phi) \geqslant \frac{1}{2}|\langle\widehat{\cos\phi}\rangle|, \qquad \Delta n\Delta(\cos\phi) \geqslant \frac{1}{2}|\langle\widehat{\sin\phi}\rangle|. \tag{5.1.29}$$

由(5.1.17)式定义的 $|\phi\rangle_N$ 也是 $\widehat{\cos\phi}$ 和 $\widehat{\sin\phi}$ 两算符的近似本征态，本征值分别为 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$.

最后来考察相位因子算符在粒子数态中的期望值和方差.不难求出①

$$\langle n \mid (\widehat{\cos\phi}) \mid n\rangle = \langle n \mid (\widehat{\sin\phi}) \mid n\rangle = 0,$$

$$\langle n \mid (\widehat{\cos\phi})^2 \mid n\rangle = \langle n \mid (\widehat{\sin\phi})^2 \mid n\rangle = \frac{1}{2}, \quad (\text{当 } n \neq 0 \text{ 时}). \tag{5.1.30}$$

这样,对于光子数 $n$ 不为零的态,有

$$\Delta(\cos\phi) = \sqrt{\langle(\widehat{\cos\phi})^2\rangle - \langle\widehat{\cos\phi}\rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\Delta(\sin\phi) = \sqrt{\langle(\widehat{\sin\phi})^2\rangle - \langle(\widehat{\sin\phi})^2\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5.1.31}$$

上述结果意味着,在有光子的粒子数态 $|n\rangle$ 中,光场相位是在 0 到 $2\pi$ 之间以均等的概率随机分布.因为在这种随机分布的情况下,相位处于 $\phi \to \phi + \mathrm{d}\phi$ 间隔的概率就是 $\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi$,从而

$$\overline{\sin\phi} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi \mathrm{d}\phi = 0, \quad \overline{\sin^2\phi} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2},$$

同样有

$$\overline{\cos\phi} = 0, \quad \overline{\cos^2\phi} = \frac{1}{2},$$

由此给出的 $\Delta(\sin\phi)$ 和 $\Delta(\cos\phi)$ 与(5.1.31)式一致.

通过本节的讨论我们看到 $|n\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 是两个极端的情况,前者具有确定的粒子数(幅模)而相位完全不确定②,后者正好相反,它具有确定的相位,但粒子数则完全不确定(粒子数的各种取值以均等概率出现).

最后要指出的是,光场的相位因子与光场量子态的相位因子不是一回事.如 §1.1 所述,光场任一个量子态 $|\rangle$ 在乘上相位因子 $e^{i\theta}$ 后,在物理上仍代表原来状态,而光场的相位因子是有物理意义的,$\widehat{\sin\phi}$ (或 $\widehat{\cos\phi}$ )都是与可观测物理量相对应的算符.

## §5.2 量子光场的相干态和它的基本性质

从上节的讨论我们看到,单模光场的粒子数态 $|n\rangle$ 和相位态 $|\phi\rangle$ 都与经典光学

---

① 真空态的情况比较特殊:$\langle 0|(\widehat{\cos\phi})^2|0\rangle = \langle 0|(\widehat{\sin\phi})^2|0\rangle = \frac{1}{4}$.

② 这里只是说,粒子数确定的光场的绝对相位不确定.但这并不意味着它不能发生干涉现象.因为干涉现象取决于两个"时空"点 $(\boldsymbol{x}, t)$ 与 $(\boldsymbol{x}', t')$ 之间的相位差,参见 §7.1.

中的振幅确定的光有着很大的差异:一个具有极大的相位涨落,一个具有极大的幅模涨落.在经典光学中,振幅确定的光同时具有确定的幅模和确定的相位.在量子光学中由于 $\hat{n}$ 与 $\widehat{e^{i\phi}}$ 不对易,幅模和相位都确定的光场是不可能的,只能有一种幅模与相位的"相对涨落值"都较小,与上述经典光波最接近量子光场,那就是振幅算符①的本征态(又称量子相干态).本节将比较详尽地讨论它的基本性质.

## 1. 量子光场的相干态

我们仍先讨论单模平面行波的情况.振幅算符也就是吸收算符 $\hat{a}$ 的本征态为 $|\alpha\rangle$②,满足

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{5.2.1}$$

$\alpha$ 一般为复数,因为 $\hat{a}$ 不是厄米算符.利用光子数本征态 $|n\rangle$ 的表达式

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle,$$

即可得出:若 $|\alpha\rangle$ 态存在,则有

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|\hat{a}^n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle, \qquad n = 0,1,2,\cdots. \tag{5.2.2}$$

上式中的 $\langle 0|\alpha\rangle$ 为一个与 $n$ 无关的常数.通过归一化条件

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_n\langle\alpha|n\rangle\langle n|\alpha\rangle = 1 \tag{5.2.3}$$

即得出

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = 1.$$

于是有

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \tag{5.2.4}$$

代回(5.2.2)式,结果即为

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}, \tag{5.2.5}$$

从而

---

① 参见 P.20 中的附注.

② 在海森伯图象中,在自由光场情况,$|\alpha\rangle$ 不仅是 $\hat{a}$ 的本征态也是任意时刻 $\hat{a}(t)$ 的本征态,相应的本征值即为 $\alpha e^{-i\omega t}$.

$$|\alpha\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\alpha\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}|n\rangle. \tag{5.2.6}$$

以上是假定$|\alpha\rangle$存在的情况下导出的结果.不难证明,由上式定义的$|\alpha\rangle$确实满足(5.2.1)式,因而就是所定义的量子相干态.利用(5.2.2)式,$|\alpha\rangle$还可表示为

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^{\dagger})^n}{n!}|0\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}}|0\rangle, \tag{5.2.7}$$

或

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle. \tag{5.2.8}$$

(5.2.8)式可利用 Baker-Hausdorff 公式来推导.该公式为:设 $\hat{L}_1$ 和 $\hat{L}_2$ 满足条件$[\hat{L}_1,\hat{L}_2]$与 $\hat{L}_1$ 和 $\hat{L}_2$ 都对易,则有

$$\mathrm{e}^{\hat{L}_1}\mathrm{e}^{\hat{L}_2}=\mathrm{e}^{\hat{L}_1+\hat{L}_2+\frac{1}{2}[\hat{L}_1,\hat{L}_2]}, \tag{5.2.9}$$

此公式可在一般量子力学书中查到.

取 $\hat{L}_1=\alpha\hat{a}^{\dagger},\hat{L}_2=-\alpha^*\hat{a}$即得出

$$\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}=\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^*\hat{a}+\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \tag{5.2.10}$$

再利用

$$\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle=[1-(\alpha^*\hat{a})+\frac{1}{2!}(\alpha^*\hat{a})^2-\frac{1}{3!}(\alpha^*\hat{a})^3+\cdots]|0\rangle=|0\rangle,$$

即可证明(5.2.7)式与(5.2.8)式相等.

$\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^*\hat{a}$为反厄米算符(反厄米算符 $\hat{L}$定义为 $\hat{L}^{\dagger}=-\hat{L}$),因而 $\hat{D}(\alpha)\equiv\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^*\hat{a}}$为幺正算符,满足 $\hat{D}^{-1}(\alpha)=\hat{D}^{\dagger}(\alpha)=\hat{D}(-\alpha)$.这样,(5.2.8)式就给出:$|\alpha\rangle$与真空态$|0\rangle$之间为幺正变换关系.(5.2.9)式还给出

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)}\hat{D}(\alpha+\beta), \tag{5.2.11}$$

从而当 $\hat{D}(\alpha)$作用到相干态$|\beta\rangle$上时,结果为

$$\hat{D}(\alpha)|\beta\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)}|\alpha+\beta\rangle, \tag{5.2.12}$$

由于这一性质,$\hat{D}(\alpha)$又被称为平移算符.

从(5.2.7)式可以看出,$\alpha=0$ 的相干态就是真空态.而当 $\alpha\neq0$ 时,$|\alpha\rangle$为$|n\rangle$的一个无穷级数.在这一点上它与相位本征态(5.1.15)式相似,两者的差异是,在$|\alpha\rangle$态中,各个$|n\rangle$对应的概率幅不是均等的,$\langle n|\alpha\rangle$在 $n$ 增大时趋于零很快,使得对任意 $\alpha$ 值相干态都是可归一化的.

**2. 相干态的基本性质**

不难得出相干态$|\alpha\rangle(\alpha\neq0)$具有下述性质:

(1) 设$|\alpha\rangle$态中光子数为 $n$ 的概率为$P_\alpha(n)$,则由(5.2.5)式

$$P_\alpha(n) = |\langle n | \alpha\rangle|^2 = \frac{1}{n!} |\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}. \tag{5.2.13}$$

这个分布在 $\alpha\neq0$ 时称为泊松分布.关于这种分布的物理内涵,参见§7.3.

(2) 光子数的平均值等于$|\alpha|^2$:

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha\rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha\rangle = |\alpha|^2. \tag{5.2.14}$$

在推导最后一式时,利用了(5.2.1)式及其厄米共轭式.另外,从泊松分布直接计算,也得出同样的结果

$$\bar{n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} nP_\alpha(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} |\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}$$

$$= |\alpha|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2} = |\alpha|^2.$$

按(5.2.1)式,相干态为具有确定复振幅 $\alpha$ 的态,(5.2.14)式就表示该态的 $\bar{n}$ 就等于幅模的平方.

(3) 具有最大概率的 $n$ 值:为了求出最大概率的 $n$ 值,我们来考察当 $n$ 从 0 到$\infty$的增加过程中,$P_\alpha(n)$的变化.当光子数从 $n_0-1$ 变到 $n_0$ 时,$P_\alpha(n)$的分母增加 $n_0$,而分子增加$|\alpha|^2$.于是当 $n_0<|\alpha|^2$ 时,这一改变导致概率增大,而当 $n_0>|\alpha|^2$时,导致概率减少.由此可见,概率最大的 $n_M$ 为邻近$|\alpha|^2$ 的整数.更具体地说,当$|\alpha|^2$ 不是整数时,$n_M$ 为小于并最近于$|\alpha|^2$ 的整数.当$|\alpha|^2$ 为整数时,$n_M$ 有两个值其概率一样大,即$|\alpha|^2$ 和$|\alpha|^2-1$.

由此可见,当$|\alpha|^2<1$ 时,概率最大出现在 $n=0$ 处即真空态,$P_\alpha(n)$为 $n$ 的单调下降函数.而当$|\alpha|^2\gg1$ 时,$P_\alpha(n)$为山丘状的分布.

(4) $n$ 的方差: $\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle=\langle\alpha|\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)\hat{a}|\alpha\rangle=|\alpha|^4+|\alpha|^2$,从泊松分布来计算同样也可求出这一结果.于是得出 $\Delta n$ 为

$$\Delta n = \sqrt{\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha\rangle - (\langle \alpha | \hat{n} | \alpha\rangle)^2} = |\alpha|, \tag{5.2.15}$$

从而有(在$|\alpha|\neq0$ 情况下)

$$\frac{\Delta n}{\langle\hat{n}\rangle} = \frac{1}{|\alpha|}. \tag{5.2.16}$$

当$0<|\alpha|<1$ 时,方差比平均值大,而当$|\alpha|>1$ 时,虽然方差 $\Delta n$ 随幅值$|\alpha|$增加而增大,但它与平均值$\langle\hat{n}\rangle$的比(可称为比方差)却在减小.到$|\alpha|$很大时,比方差$\Delta n/\langle\hat{n}\rangle$已成为很小的数,即光子数 $n$ 基本上就分布在$\langle\hat{n}\rangle$附近,表现为围绕着$\langle\hat{n}\rangle$的涨落.这一结果告诉我们,相干态虽然不是定态(能量的本征态),但在$|\alpha|$大时,能量的相对不确定度$\frac{\Delta E}{\langle E\rangle}$为一小量.

(5) 相位因子的期望值和方差　我们接着来考察相干态中相位值的情况. 设 $\alpha$ 的相位为 $\phi$, 即

$$\alpha = |\alpha| e^{i\phi}, \tag{5.2.17}$$

则光场相位因子算符 $\widehat{\cos\phi}$ 在相干态 $|\alpha\rangle$ 中的期望值为

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\widehat{\cos\phi}|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}\langle\alpha|(\hat{n}+1)^{-\frac{1}{2}}\hat{a}+\hat{a}(\hat{n}+1)^{-\frac{1}{2}}|\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*)\langle\alpha|(\hat{n}+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}|\alpha\rangle \\ &= |\alpha|\cos\phi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\frac{1}{(n+1)^{1/2}}e^{-|\alpha|^2}.\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

最后一等式是通过将(5.2.6)式代入而得出的. 在 $|\alpha|^2 \gg 1$ 的情况下, 上式可表示为级数(参见 Carruthers and Nieto, Phys. Rev. Lett. **14**, 387(1965))

$$\langle\alpha|\widehat{\cos\phi}|\alpha\rangle = \cos\phi\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\cdots\right). \tag{5.2.19}$$

换句话说, $\widehat{\cos\phi}$ 在相干态 $|\alpha\rangle$ 中的期望值当 $|\alpha|$ 大时就近似为 $\alpha$ 的相位因子 $\cos\phi$. 下面再来求 $(\widehat{\cos\phi})^2$ 的期望值. 首先将 $(\widehat{\cos\phi})$ 用 $\widehat{e^{i\phi}}$ 和 $\widehat{e^{-i\phi}}$ 表示出来, 即 $(\widehat{\cos\phi})^2 = \frac{1}{4}[(\widehat{e^{i\phi}})^2+(\widehat{e^{-i\phi}})^2+(\widehat{e^{i\phi}})(\widehat{e^{-i\phi}})+(\widehat{e^{-i\phi}})(\widehat{e^{i\phi}})]$, 再利用(5.1.10)和(5.1.11)式就得出上式前两项在相干态中的期望值为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[\langle\alpha|n\rangle\langle n+2|\alpha\rangle+\langle\alpha|n+2\rangle\langle n|\alpha\rangle] \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2+\alpha^{*2})e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}} \\ &= (\cos^2\phi-\frac{1}{2})|\alpha|^2e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}},\end{aligned}$$

而 $(\widehat{\cos\phi})^2$ 展式中后两项 $\frac{1}{4}[(\widehat{e^{i\phi}})(\widehat{e^{-i\phi}})+(\widehat{e^{-i\phi}})(\widehat{e^{i\phi}})]$ 的期望值利用(5.1.12)和(5.1.13)式立即求出为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(\langle 0|\alpha\rangle)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-|\alpha|^2}$. 合起来即得

$$\begin{aligned}\langle\alpha|(\widehat{\cos\phi})^2|\alpha\rangle &= (\cos^2\phi-\frac{1}{2})|\alpha|^2e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}} \\ &\quad+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-|\alpha|^2}\right).\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

同样, 在 $|\alpha|^2 \gg 1$ 情况下, 由前引文献, 上式可表示为级数

$$\langle\alpha\mid(\widehat{\cos\phi})^2\mid\alpha\rangle=\cos^2\phi-\frac{1}{2\mid\alpha\mid^2}(\cos^2\phi-\frac{1}{2})+\cdots.\qquad(5.2.21)$$

从(5.2.19)和(5.2.21)式立即得出$|\alpha|^2$大时$\widehat{\cos^2}\phi$在相干态$|\alpha\rangle$中的均方差为

$$\Delta(\cos\phi)=\sqrt{\langle\alpha\mid(\widehat{\cos\phi})^2\mid\alpha\rangle-\langle\alpha\mid\widehat{\cos\phi}\mid\alpha\rangle^2}\approx\frac{1}{2\mid\alpha\mid}\mid\sin\phi\mid.\qquad(5.2.22)$$

可见当$|\alpha|\to\infty$时,此方差趋于零.另外,由上式和(5.2.15)式还得出

$$\Delta n\Delta(\cos\phi)\approx\frac{1}{2}\mid\sin\phi\mid,\qquad(5.2.23)$$

右方即为海森伯测不准关系(5.1.29)第二式所允许的最小值.

以上讨论表明,在$|\alpha|$大时,$|\alpha\rangle$就是量子理论所允许的最接近经典相干光的状态.

(6) $\hat{a}$的直角分量：　令$\hat{a}=\hat{a}_1+i\hat{a}_2$,其中$\hat{a}_1$和$\hat{a}_2$皆为厄米算符,则有

$$\hat{a}_1=\frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger),\quad\hat{a}_2=\frac{1}{2i}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger).$$

$\hat{a}_1$和$\hat{a}_2$分别正比于该模自由度的广义坐标$\hat{q}$和广义动量$\hat{p}$.$\hat{a}_1$与$\hat{a}_2$是互不对易的,$[\hat{a}_1,\hat{a}_2]=\frac{1}{2}i$.在相干态中$\hat{a}_1$的期望值为$\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*)$,$\hat{a}_1^2$的期望值为$\frac{1}{4}(\alpha+\alpha^*)^2+\frac{1}{4}$,于是$\Delta a_1=\frac{1}{2}$.同样可求出$\Delta a_2=\frac{1}{2}$(这表明相干态既不是$\hat{a}_1$也不是$\hat{a}_2$的本征态)由此可得

$$\Delta a_1\Delta a_2=\frac{1}{4},\qquad(5.2.24)$$

为测不准关系所允许的最小积.这进一步说明了$|\alpha\rangle$是经典相干光的量子对应.

我们也可以引入$\hat{a}_1$的本征态$|\alpha'_1\rangle$和$\hat{a}_2$的本征态$|\alpha'_2\rangle$.它们分别构成完备集,即

$$\int|\alpha'_1\rangle\langle\alpha'_1|d\alpha'_1=1,\qquad(5.2.25a)$$

$$\int|\alpha'_2\rangle\langle\alpha'_2|d\alpha'_2=1.\qquad(5.2.25b)$$

值得提醒的是,我们用$\alpha'_1$和$\alpha'_2$来表示$\hat{a}_1$和$\hat{a}_2$的本征值,以区别$\alpha$的实部$\alpha_1$和虚部$\alpha_2$.

### 3. 经典谐振子的量子对应

在这一小节中,我们将通过经典谐振子的量子对应来进一步阐明相干态的物

理特点.一维经典谐振子的运动可表示为

$$q(t) = A_0\cos(\omega t - \phi),$$
$$p(t) = - m\omega A_0\sin(\omega t - \phi). \tag{5.2.26}$$

$q$ 具有确定的幅模 $A_0$ 和(初)相位 $\phi$.我们也可将它表示成

$$q(t) = \frac{1}{2}(q_0 e^{i\omega t} + q_0^* e^{-i\omega t}), \tag{5.2.27}$$

其中 $q_0 = A_0 e^{i\phi}$ 即为振动的复振幅.此谐振子的能量为

$$H = \frac{1}{2m}p^2(t) + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2. \tag{5.2.28}$$

此值只与幅模 $A_0$ 有关,与相位 $\phi$ 无关.

再来看量子谐振子.在海森伯图象中 $\hat{q}(t)$和 $\hat{p}(t)$的运动方程和经典的相同,但由于对易关系

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar, \tag{5.2.29}$$

坐标和动量不能同时具有确定值.

在通常的量子力学书中,讨论的是振子能量本征态.相应的薛定谔波函数 $\psi(q,t) = \psi(q)e^{-i\omega t}$,从而$|\psi(q,t)|^2 = |\psi(q)|^2$,它给出的振子在空间的概率分布是恒定的,不显示振子不断地往复振动的图象.也看不出在 $\hbar \to 0$ 时,量子振子的行为趋于经典振子.

为了寻求与经典振子行为相接近的量子态,我们用 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 来代替 $\hat{p}$和 $\hat{q}$.它们类似于单模光场的吸收算符和放射算符,只是系数上有不同(比较(1.3.21)式)

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}[m\omega\hat{q}(t) + i\hat{p}(t)],$$
$$\hat{a}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}[m\omega\hat{q}(t) - i\hat{p}(t)]. \tag{5.2.30}$$

从 $\hat{q}(t)$与 $\hat{p}(t)$的对易关系(5.2.28)式,不难得出 $\hat{a}(t)$与 $\hat{a}^\dagger(t)$间的对易关系

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1. \tag{5.2.31}$$

$\hat{H}$用 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 表示的结果为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2(t) = \hbar\omega\left[\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\right]. \tag{5.2.32}$$

我们看到谐振子的 $\hat{H}$以及对易关系(5.2.31)都与单模自由光场的一致.于是同样可解出

$$\hat{a}(t) = \hat{a}e^{-i\omega t}, \qquad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}. \tag{5.2.33}$$

代入(5.2.30)式即解出

$$\hat{q}(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}),\tag{5.2.34a}$$

$$\hat{p}(t)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}).\tag{5.2.34b}$$

与(5.2.27)式相比,$\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\hat{a}$ 相当于复振幅算符(即与该式中 $q_0$ 相对应).同前一样.$\hat{a}$可分解为幅模算符和相位因子算符(不考虑常数因子$\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$).(5.2.32)式表明,$\hat{H}$只与幅模算符有关($\hat{a}^{\dagger}(t)\hat{a}(t)=\hat{n}(t)$).从而对于 $\hat{H}$的本征态,相位是完全不确定的.这就是 $\hat{H}$的本征态不显示振动图象的原因.

我们可像前面一样定义"振幅算符"$\hat{a}$的本征态

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle.\tag{5.2.35}$$

它也就是量子谐振子的相干态,仿前可求出坐标 $\hat{q}(t)$和动量 $\hat{p}(t)$在此态中的期望值为

$$\bar{q}(t)\equiv\langle\alpha|\hat{q}(t)|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|\cos(\omega t-\phi),$$

$$\bar{p}(t)\equiv\langle\alpha|\hat{p}(t)|\alpha\rangle=-\sqrt{2m\hbar\omega}|\alpha|\sin(\omega t-\phi).\tag{5.2.36}$$

于是 $\bar{q}(t)$和 $\bar{p}(t)$与一个幅模为 $A_0=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|$,相位为 $\phi$ 的经典振子的坐标和动量相一致[参见(5.2.26)式].它们以频率 $\omega$ 随着时间作周期性的变化.显示出了振动的图象.坐标和动量的方差亦不难求出,结果为

$$\Delta q(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},$$

$$\Delta p(t)=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}.\tag{5.2.37}$$

此结果有两个值得注意的特点:1)$\Delta q$ 与 $\Delta p$ 与 $\alpha$ 无关,因而也就等于振子作零点振动时(振子的基态)$q$ 和 $p$ 的不确定度,2)$\Delta q$ 与 $\Delta p$ 与 $t$ 无关,其积并等于测不准关系所允许的最小值

$$\Delta q(t)\Delta p(t)=\frac{\hbar}{2}.\tag{5.2.38}$$

我们来进一步看在坐标表象中相干态的波函数 $f_\alpha(q,t)$.为此先定义海森伯

图象中 $\hat{q}(t)$的本征值为 $q$ 的态$|q,t\rangle$[①]:

$$\hat{q}(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle. \tag{5.2.39}$$

相干态$|\alpha\rangle$所对应的薛定谔波函数就等于

$$f_\alpha(q,t) = \langle q,t|\alpha\rangle. \tag{5.2.40}$$

此波函数可如下来确定.首先,利用(5.2.30)和(5.2.33)式得

$$\left\langle q,t\left|\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q}(t)+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}(t)\right]\right|\alpha\right\rangle = \langle q,t|\hat{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|\alpha\rangle$$

$$= \alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_\alpha(q,t). \tag{5.2.41}$$

上式左方第一项又可以通过(5.2.39)式求出,即

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle q,t|\hat{q}(t)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}qf_\alpha(q,t).$$

为求(5.2.41)式左方第二项,我们再引入 $\hat{p}(t)$的本征态$|p,t\rangle$,其本征值为 $p$:

$$\hat{p}(t)|p,t\rangle = p|p,t\rangle. \tag{5.2.42}$$

这种态的全体亦构成完备集合,即

$$\int|p,t\rangle\langle p,t|\mathrm{d}p = 1. \tag{5.2.43}$$

它在$|q,t\rangle$上的投影即为动量本征态在坐标表象中的波函数:

$$\langle q,t|p,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq/\hbar}. \tag{5.2.44}$$

于是有 $p\langle q,t|p,t\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q,t|p,t\rangle$.利用(5.2.43)式和此式即得

$$\langle q,t|\hat{p}(t)|\alpha\rangle = \int\mathrm{d}p\langle q,t|\hat{p}(t)|p,t\rangle\langle p,t|\alpha\rangle$$

$$= \int\mathrm{d}pp\langle q,t|p,t\rangle\langle p,t|\alpha\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q}\int\mathrm{d}p\langle q,t|p,t\rangle\langle p,t|\alpha\rangle$$

$$= -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q}f_\alpha(q,t). \tag{5.2.45}$$

将(5.2.39)和(5.2.45)式代入(5.2.41)式左方就化出 $f_\alpha(q,t)$满足的微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial q}f_\alpha(q,t) + \frac{m\omega}{\hbar}qf(q,t) - \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_\alpha(q,t) = 0. \tag{5.2.46}$$

---

① 这是海森伯图象中的态,它并不随 $t$ 变化.这里把态矢量写成$|q,t\rangle$,表示它是 $t$ 时刻的坐标算符 $\hat{q}(t)$的本征态(本征值为 $q$).

此方程实际上是一个常微分方程($t$ 只是一个参量),因而可以立即解出.它形如 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}f_\alpha=(aq+b)f_\alpha$,在写成 $\frac{\mathrm{d}f_\alpha}{f_\alpha}=(aq+b)\mathrm{d}q$ 后,两边积分即可得出 $f_\alpha=f_0\mathrm{e}^{\frac{1}{2}aq^2+bq}$.将 $a=-\frac{m\omega}{\hbar}$,$b=\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{1}{\hbar}[m\omega\bar{q}(t)+\mathrm{i}\bar{p}(t)]$代入,并通过归一化条件定出 $f_0$,最后得出

$$f_\alpha(q,t)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\bar{p}(t)q}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}[q-\bar{q}(t)]^2},\tag{5.2.47}$$

其中 $\bar{q}(t)$与 $\bar{p}(t)$如(5.2.36)式所示.下面先来看 $f_\alpha(q,t)$绝对值的平方,它给出相干态谐振子在空间的概率分布:

$$|f_\alpha(q,t)|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{\hbar}[q-\bar{q}(t)]^2}.\tag{5.2.48}$$

这是一个中心位于 $\bar{q}(t)$的高斯分布,其宽度与 $\alpha$ 无关,因而它也就是原点移动到 $\bar{q}(t)$的零点振动的概率分布函数(因 $\alpha=0$ 对应于零点振动,相应的 $\bar{q}(t)=0$,参见(5.2.36)式).我们看到,由(5.2.48)式描述的波包并不随 $t$ 而变形(即波包不弥散),只是其中心点在往复振动($\alpha=0$ 的情形除外).换句话说,上述波包就像一个坐标具有零点振动不确定度的经典振子的运动.当 $\hbar\to0$ 时,此零点不确定度$\to0$(即波包宽度趋于零,变成一个质点)量子振子的相干态的空间分布就趋于一个往复振动的经典振子.

我们再返回来看(5.2.47)式.其中的相位因子 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\bar{p}(t)q}$所表示的是一个动量随$t$而变的行波,动量 $\bar{p}(t)$随时间的变化与一个经典振子相似[如(5.2.36)式所示].(5.2.47)式中的另一个因子 $\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}[q-\bar{q}(t)]^2}$可看成是该平面波的包络.通过傅里叶分解可以得出:振子的动量亦具有高斯型分布,其中心值即为 $\bar{p}(t)$.动量不确定度也就是零点振动的动量分布,与 $\alpha$ 无关.当 $\hbar\to0$ 时,动量的不确定度亦趋于零.

由此可见,经典振子的量子对应就是处于相干态的量子振子,因为它均衡地照顾到幅模和相位两个方面.

相干态的能量期望值为

$$\langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle=\hbar\omega\left(|\alpha|^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}m\omega^2A_0^2+\frac{1}{2}\hbar\omega,\tag{5.2.49}$$

其中 $A_0=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|$.上式右方第一项与(5.2.28)式给出的值相同,即幅模为 $A_0$ 的经典振子的能量.(5.2.49)式右方第二项代表零点振动的能量,其值为 $\hbar\omega$ 的一半.同样不难求出 $\hat{H}^2$ 在相干态中的期望值.结果为

$$\langle\alpha|\hat{H}^2|\alpha\rangle=\hbar^2\omega^2\left(2|\alpha|^2+|\alpha|^4+\frac{1}{4}\right),\tag{5.2.50}$$

因此能量 $U$ 的方差为

$$\Delta U = \hbar\omega \mid \alpha \mid. \tag{5.2.51}$$

当$|\alpha|$增大时，此方差虽然在增大，但它与 $\overline{U}=\langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle$的比值

$$\frac{\Delta U}{\overline{U}} = \frac{|\alpha|}{|\alpha|^2 + \frac{1}{2}} \tag{5.2.52}$$

却随着$|\alpha|\to\infty$而趋于零．换句话说，对于大的$|\alpha|$，能量的量子涨落相对能量平均值为一小量．

**4．光场相干态的矢势和场强**

对于前面求出的单模平面行波光场相干态$|\alpha\rangle$，矢势 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)$和场强 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)$的期望值为①

$$\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{V\omega}}|\alpha|\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)\boldsymbol{e}, \tag{5.2.53}$$

$$\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)|\alpha\rangle = -\sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}}|\alpha|\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)\boldsymbol{e}. \tag{5.2.54}$$

为了求矢势和电场的不确定度，我们还需要求 $\hat{A}^2$ 和 $\hat{E}^2$ 的期望值．结果为

$$\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{A}}^2(\boldsymbol{x},t)|\alpha\rangle = \frac{8\pi\hbar c^2}{V\omega}\left[|\alpha|^2\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)+\frac{1}{4}\right],$$

$$\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{E}}^2(\boldsymbol{x},t)|\alpha\rangle = \frac{8\pi\hbar\omega}{V}\left[|\alpha|^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)+\frac{1}{4}\right]. \tag{5.2.55}$$

于是得出

$$\Delta A(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}},$$

$$\Delta E(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}. \tag{5.2.56}$$

它们都与$(\boldsymbol{x},t)$无关，即各点各个时刻的不确定度都相同．另外，它们也与 $\alpha$ 无关，实际上就是光场零点振动所对应的矢势和场强．可见相干态光场就相应于“带有零点振动不确定度”的经典光场．

当$|\alpha|$大时$\frac{\Delta A}{\langle A\rangle}$和$\frac{\Delta E}{\langle E\rangle}$都$\approx\frac{1}{|\alpha|}$，因而为一小量．这时相干态光场就相应于“带

① 这是指线偏振情况，若为圆偏振 $\boldsymbol{e}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_2$ 则(5.2.53)式中的 $\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)\boldsymbol{e}$ 应改为 $\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)\boldsymbol{e}_1-\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi)\boldsymbol{e}_2$．对(5.2.54)式亦应作相应的改变．

有零点振动不确定度”的经典光场.如果用图形来描绘其矢势或场强随时间或空间的变化,则可将它们表示为带有一定模糊度的波形曲线.

最后,我们给出光场的多模相干态.由于不同模代表不同的自由度,因此多模光场的态矢量可表示为各个模态矢量的外积.如用 $s$ 统一表示模参量(如 $\boldsymbol{k}, l$),则多模光场的相干态即为 $\prod_s |\alpha^{(s)}\rangle$.我们也可用 $\{\alpha\} = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \cdots\}$ 来表示所有模参量的 $\alpha$ 的集合,这时多模光场相干态也可记作 $|\{\alpha\}\rangle$.任一模的吸收算符 $\hat{a}^{(s)}$ 作用到 $|\{\alpha\}\rangle$ 上时,结果都为

$$\hat{a}^{(s)} |\{\alpha\}\rangle = \alpha^{(s)} |\{\alpha\}\rangle. \tag{5.2.57}$$

换句话说,$|\{\alpha\}\rangle$ 为所有 $\hat{a}^{(s)}$ 的共同本征态.因而也是矢势算符中正频部分 $\hat{\boldsymbol{A}}^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)$ 的本征态:

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) |\{\alpha\}\rangle = \sum_s \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{V k_s}} \boldsymbol{e}_s \alpha^{(s)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\omega_s t} |\{\alpha\}\rangle, \tag{5.2.58}$$

而矢势算符在此状态的期望值即为

$$\langle\{\alpha\}| \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t) |\{\alpha\}\rangle = \sum_s \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{V k_s}} \boldsymbol{e}_s [\alpha^{(s)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\omega_s t} + \alpha^{(s)*} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{x} + \mathrm{i}\omega_s t}]. \tag{5.2.59}$$

对于多模相干态的性质,可以仿前进行讨论,这里不再重复.

## §5.3　光场态矢量按相干态的展开　相干态全纯表象

相干态的概念早在 1926 年就提出来了(Schrödinger, Naturwissenschaften **14**, 664, 1926),但由于不同本征值的相干态互相不正交(参见下文),因此在相当长的时间内在物理学中未获得重视和应用. 1963 年, Glauber (Phys. Rev. **131**, 2766 (1963))将它应用到光场的量子相干性理论中.他强调指出,尽管相干态互相不正交,但它的全部集合却是完备的(实际是超完备的),因而可以用它作为表象的基底.光场的任意态矢量都可表示为相干态的叠加.如果表示函数限制为全纯函数,那么展开还是唯一的.这种表象就称为相干态全纯表象.任何光场可以在此表象中表示出来.本节将对这些问题进行讨论.

### 1. 光场态矢量按相干态的展开　全纯表示

在量子力学课中,曾经证明不同本征值的本征态互相正交,但那里指的是厄米算符的本征态. $\hat{a}$ 不是厄米算符,所以该项证明对相干态不适用.

利用相干态按粒子数态 $|n\rangle$ 的展式(5.2.6),可得

$$\langle\alpha'|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\alpha'|^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha'^*\alpha)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha-\alpha'|^2+\mathrm{i}\mathrm{Im}(\alpha'^*\alpha)}. \tag{5.3.1}$$

这具体显示出不同本征值的相干态的确不正交.将上式取绝对值的平方,结果即为

$$|\langle\alpha'|\alpha\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha-\alpha'|^2}. \tag{5.3.2}$$

即$|\alpha\rangle$态投影到$|\alpha'\rangle$态上的概率随着$\alpha$与$\alpha'$距离平方$|\alpha-\alpha'|^2$而指数下降.这意味着$|\alpha\rangle$态只与附近的$|\alpha'\rangle$态相交叠.

然而正交性并非是一组态能否作为展开基底的必要条件.必要条件是该组态的完备性.一组态的完备性表示为其中各个态的投影算符总加起来等于1.换句话说,把任意态在这一组态上的投影分量都加起来,就会得到完全的原态.以粒子数态为例,各态的投影算符为$|n\rangle\langle n|$,它们的完备性就表现为$\sum_n|n\rangle\langle n|=1$,从而对任意态$|A\rangle$,$\sum_n|n\rangle\langle n|A\rangle=|A\rangle$,即$|A\rangle$可用$|n\rangle$来展开.如果我们能证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\alpha\rangle\langle\alpha|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}=1, \tag{5.3.3}$$

其中$\mathrm{d}^2\alpha=\mathrm{d}(\mathrm{Re}\alpha)\mathrm{d}(\mathrm{Im}\alpha)$(即积分遍及整个二维平面),那么任意态$|A\rangle$也可按$|\alpha\rangle$来展开.因为按(5.3.3)式

$$|A\rangle=\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha\rangle\langle\alpha|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\right]|A\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\alpha)|\alpha\rangle\mathrm{d}^2\alpha,$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|A\rangle. \tag{5.3.4}$$

这就表明全体$|\alpha\rangle$态是完备的.下面即来证明(5.3.3)式.

利用$\sum_n|n\rangle\langle n|=1$以及(5.2.5)式,可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|\alpha\rangle\langle\alpha|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}&=\sum_{n,m}\int_{-\infty}^{\infty}|m\rangle\langle m|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle\langle n|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\\&=\sum_{n,m}|m\rangle\langle n|\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha^m\alpha^{*n}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}.\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

将$\alpha$用$|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$代入上式并将$\mathrm{d}^2\alpha$化成$|\alpha|\mathrm{d}|\alpha|\mathrm{d}\phi$,就可将它积出:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha^m\alpha^{*n}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\mathrm{d}^2\alpha=\frac{1}{\pi}\int|\alpha|^{n+m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\phi}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}|\alpha|\mathrm{d}|\alpha|\mathrm{d}\phi=n!\delta_{nm}. \tag{5.3.6}$$

将(5.3.6)式代入(5.3.5)式即得出要证明的(5.3.3)式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\alpha\rangle\langle\alpha|\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}=\sum_n|n\rangle\langle n|=1.$$

由于相干态彼此不正交,一个相干态也可表为所有相干态的叠加.应用(5.3.3)和(5.3.1)式,有

$$|\alpha_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha_0\rangle \frac{d^2\alpha}{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\alpha_0|^2+i\mathrm{Im}(\alpha^*\alpha_0)} |\alpha\rangle \frac{d^2\alpha}{\pi}, \qquad (5.3.7)$$

这样就将$|\alpha_0\rangle$用相干态全体集合实行了展开.但不难看出$|\alpha_0\rangle$主要是那些$|\alpha-\alpha_0|$不大的$|\alpha\rangle$态叠加而成的.

(5.3.7)式表明,相干态彼此不是线性无关的.这意味着全体$|\alpha\rangle$态构成超完备集合.

到此,我们看到相干态集合的两个重要特点:1)它虽然具有连续的本征值,却是可归一的(与动量的本征态和坐标的本征态不同.后两者都不能归一.它们都规格化到δ函数).2)相干态之间不是正交的,但其集合却是完备的.实际上它们构成超完备的集合.这两点之间又是互相联系的.因在"本征值连续,本征态互相正交又构成完备集合"的情况,可以证明这些本征态是不能归一的(参见 Dirac: Quantum Mechanics p.62,39).

在经典理论中,作一维运动的粒子的瞬时状态由 $qp$ 平面中的一个点$(q,p)$来表示.而在早期量子论中,每个一维的量子态则对应于 $qp$ 平面中一个有限的面积$h(=2\pi\hbar)$.单模光场对应于一维谐振子,一维振子的 $qp$ 平面也就是$\alpha_1\alpha_2$ 平面,两者的关系是

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p. \qquad (5.3.8)$$

因此 $qp$ 平面中的面积$h$,就相当于$\alpha_1\alpha_2$ 平面中的面积元 $\pi$,也就是说,单模光场的一个量子态在$\alpha_1\alpha_2$ 平面中将占面积 $\pi$.量子论的这一结果,在此可以作如下理解:任一光场量子态$|F\rangle$在$\alpha_1\alpha_2$ 平面中实际覆盖的面积应为①$\int|\langle\alpha|F\rangle|^2 d^2\alpha = \langle F|\int|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha|F\rangle$,利用(5.3.3)式即得出其值正好为$\pi$,也就是在 $qp$ 平面中覆盖面积为$h$.按这种理解(5.3.3)式也可与通常的离散本征态的完备性条件如$\sum_n|n\rangle\langle n| = 1$对应起来.因在上述理解下,$\frac{d^2\alpha}{\pi}$代表面积元$d\alpha_1 d\alpha_2$中的状态数.再对$\alpha_1$和$\alpha_2$积分也就是对状态数求和,从而等于1.以上讨论.说明了早期早子论的合理性.

如果一个态$|f\rangle$在用粒子数态展开时的结果为

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n|n\rangle. \qquad (5.3.9)$$

则可得出它用$|\alpha\rangle$态展开的公式如下:利用(5.3.3)、(5.3.9)和(5.2.5)式得

$$|f\rangle = \int|\alpha\rangle\langle\alpha|f\rangle\frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_n f_n\int|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle\frac{d^2\alpha}{\pi} = \int e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*)|\alpha\rangle\frac{d^2\alpha}{\pi}, \qquad (5.3.10)$$

---

① $|\langle\alpha|F\rangle|^2$可看成是态$|\alpha\rangle$与$|F\rangle$的重叠度.这样,$|\langle\alpha|F\rangle|^2 d^2\alpha$就代表面积元$d^2\alpha$中为$|F\rangle$所覆盖的部分,于是$|F\rangle$覆盖的总面积就等于$\int|\langle\alpha|F\rangle|^2 d^2\alpha$.

其中

$$f(\alpha^*) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}. \tag{5.3.11}$$

当$|f\rangle$为粒子数本征态$|n_0\rangle$时,就给出$|n_0\rangle$按相干态的展开.相应的$f(\alpha^*)$就是一项$\frac{1}{\sqrt{n_0!}}(\alpha^*)^{n}_{0}$.

在$|f\rangle$是归一化的情况下,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 = 1, \tag{5.3.12}$$

(5.3.11)式右方级数的收敛半经即为$|\alpha| = \infty$.于是$f(\alpha^*)$作为$\alpha^*$的复变函数在全复平面都是正规解析的,即$f(\alpha^*)$为$\alpha^*$的全纯函数.

任意全纯函数$g(\alpha^*)$都具有下述性质:

$$\int e^{(\beta^* - \alpha^*)\alpha} g(\alpha^*) \frac{d^2\alpha}{\pi} = g(\beta^*), \tag{5.3.13}$$

即对于全纯函数$g(\alpha^*)$,$\frac{1}{\pi}e^{(\beta^* - \alpha^*)\alpha}$好像是二维$\delta$函数.上式的证明如下面小部分所示.

对于全纯函数,可在整个复平面上用幂级数展开:

$$g(\alpha^*) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \alpha^{*n},$$

于是有

$$\int e^{(\beta^* - \alpha^*)\alpha} g(\alpha^*) \frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_n g_n \int e^{(\beta^* - \alpha^*)\alpha} \alpha^{*n} \frac{d^2\alpha}{\pi}.$$

再将$e^{\beta^*\alpha}$用幂级数展开,代入后再应用(5.3.6)式,就将上式右方化为

$$\sum_{m,n} \frac{g_n}{m!}(\beta^*)^m \int \alpha^m (\alpha^*)^n e^{-|\alpha|^2} \frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_n g_n \beta^{*n} = g(\beta^*).$$

证毕.

利用(5.3.1)和(5.3.13)式,我们可以求出展式(5.3.10)式中的系数$f(\alpha^*)$与$\langle\alpha|f\rangle$的关系

$$\begin{aligned}\langle\alpha|f\rangle &= \int e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} f(\beta^*)\langle\alpha|\beta\rangle \frac{d^2\beta}{\pi} = \int e^{-|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha^*\beta} f(\beta^*) \frac{d^2\beta}{\pi} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*).\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

这样$f(\alpha^*)$将由$|f\rangle$唯一确定.由于$f(\alpha^*)$与$|f\rangle$之间这种一一对应关系,我们可将$f(\alpha^*)$作为$|f\rangle$的一个表示.这种表示就称为相干态全纯表示.

前面曾经表明,相干态彼此不是线性无关的,它们构成超完备集合.而用超完备的态集合来作展开,结果应该不是唯一的.上面得出$f(\alpha^*)$的唯一性,是因为限

制了 $f(\alpha^*)$为 $\alpha^*$ 的全纯函数．否则从(5.3.10)式得不出(5.3.14)式．

附例：关于"经典叠加"与"量子叠加"差别的思考题．

1．在经典光学中，波矢相同而振幅分别为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 两个光场的叠加等于什么？与量子光学中$|\alpha_1\rangle$与$|\alpha_2\rangle$的状态叠加有何不同？

2．若上述两个光场具有不同波矢 $\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$(设偏振相同)，结果又如何？(答案见本节末尾处)

**2．全纯表象中的算符**

下面来考虑任一个算符 $\hat{T}$的全纯表示．设 $\hat{T}$在粒子数表象中的表示为 $T_{mn}$，$T_{mn}=\langle m|\hat{T}|n\rangle$，则该算符可表示成

$$\hat{T}=\sum_{mn}T_{mn}|m\rangle\langle n| \tag{5.3.15}$$

将"单位算符的相干态展开式"(5.3.3)乘到上式右方的前后两侧，即得

$$\begin{aligned}\hat{T}&=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\sum_{mn}T_{mn}|\alpha\rangle\langle\alpha|m>\langle n|\beta\rangle\langle\beta|\\&\equiv\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}T(\alpha^*,\beta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\alpha^*\alpha+\beta^*\beta)}|\alpha\rangle\langle\beta|,\end{aligned} \tag{5.3.16a}$$

其中系数 $T(\alpha^*,\beta)$由下式表示：

$$T(\alpha^*,\beta)=\sum_{mn}T_{mn}\frac{(\alpha^*)^m\beta^n}{\sqrt{m!n!}}. \tag{5.3.16b}$$

如果上式对于任何 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 都是收敛的．则 $T(\alpha^*,\beta)$将是 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 双变量的全纯函数．在(5.3.18)式下面我们将指明，物理量算符所对应的 $T(\alpha^*,\beta)$都具有此性质．

利用 $T(\alpha^*,\beta)$的全纯性质，可仿前从(5.3.16a)式反求出 $T(\alpha^*,\beta)$．结果为

$$T(\alpha^*,\beta)=\langle\alpha|\hat{T}|\beta\rangle\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}. \tag{5.3.17}$$

此式表明，$T(\alpha^*,\beta)$也由 $\hat{T}$唯一确定，即两者为一一对应关系，因而我们可用 $T(\alpha^*,\beta)$来表示 $\hat{T}$．此表示称作 $\hat{T}$的相干态全纯表示．

两个算符乘积的全纯表示亦不难求出．令 $\hat{T}=\hat{T}_1\hat{T}_2$，则由

$$\langle\alpha|\hat{T}|\beta\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\pi}\langle\alpha|\hat{T}_1|\gamma\rangle\langle\gamma|\hat{T}_2|\beta\rangle$$

以及公式(5.3.17)，即可得出

$$T(\alpha^*,\beta)=\int\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\pi}T_1(\alpha^*,\gamma)T_2(\gamma^*,\beta)\mathrm{e}^{-\gamma^*\gamma}. \tag{5.3.18}$$

在量子光学中，一般物理量算符 $\hat{T}$都可表为吸收算符和发射算符的正规乘积

的多项式，如能量、动量和角动量都只是二次式．我们将它写作

$$\hat{T}=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\tau_{mn}\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^{n}. \tag{5.3.19}$$

利用相干态的定义即可求出

$$\langle\alpha|\hat{T}|\beta\rangle=\tau(\alpha^*,\beta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha^*\beta}, \tag{5.3.20}$$

其中

$$\tau(\alpha^*,\beta)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\tau_{mn}\alpha^{*m}\beta^{n}, \tag{5.3.21}$$

称为算符 $\hat{T}$的正规核，它是 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 的有限多项式．由(5.3.17)和(5.3.20)式，全纯表示 $T(\alpha^*,\beta)$与正规核 $\tau(\alpha^*,\beta)$之间的关系为

$$T(\alpha^*,\beta)=\tau(\alpha^*,\beta)\mathrm{e}^{\alpha^*\beta}. \tag{5.3.22}$$

于是即知 $T(\alpha^*,\beta)$为 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 双变量的全纯函数．

算符 $\hat{T}$与它的正规核之间有着更直接的对应关系．知道了正规核 $\tau(\alpha^*,\beta)$，$\hat{T}$可以立即得出：

$$\hat{T}=\mathrm{N}\tau(\hat{a}^\dagger,\hat{a}), \tag{5.3.23}$$

其中 N 代表正规编序符号．再由(5.3.22)式，从 $\hat{T}$的全纯表示 $T(\alpha^*,\beta)$也可直接求出 $\hat{T}$，结果即为

$$\hat{T}=\mathrm{N}T(\hat{a}^\dagger,\hat{a})\mathrm{e}^{-\hat{a}^\dagger,\hat{a}}. \tag{5.3.24}$$

但这一公式使用起来不如(5.3.23)方便，因为 $\tau(\alpha^*,\beta)$是 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 的有限多项式．

附第一小节思考题答案：

1．在经典情况，叠加结果即为"振幅为 $\alpha_1+\alpha_2$"的光场(它的量子对应为 $|\alpha_1+\alpha_2\rangle$)，而 $|\alpha_1\rangle$与 $|\alpha_2\rangle$叠加的意义则不同，它代表"光场部分地处于 $|\alpha_1\rangle$态，部分地处于 $|\alpha_2\rangle$态"(狄拉克说法)．若两态的概率幅分别为 $A_1$ 和 $A_2$，则叠加结果即为 $A_1|\alpha_1\rangle+A_2|\alpha_2\rangle$．即一个是两光场的叠加，一个是同一光场两状态的叠加．

2．在经典情况，若略去偏振矢量不写，并采用复表示，结果应表为 $\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega_1 t}+\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega_2 t}$，而在量子情况，结果为双模相干态，可简单表示为 $|\alpha_1^{(1)}\rangle|\alpha_2^{(2)}\rangle$，上标(1)和(2)为模指标．只有同一模的两个状态才能叠加．

## §5.4 量子混合态的统计描述 光场密度算符的全纯表示和 $P$ 表示

在量子理论中，当体系的状态不完全确定而具有某种统计性的时候，常采用密度算符来对它描述．这样的体系对应于一个量子统计系综．本节的内容就是介绍密

度算符的概念以及光场的密度算符在相干态表象中的表示.我们将指出,对光场密度算符,除了引入相干态全纯表示以外还可引入一种相干态对角表示$P(\alpha)$,通常称为 $P$ 表示.它是一种在形式上类似经典系综的表示.从函数 $P(\alpha)$的行为还可判断一个量子光场是否具有类似经典光场的特征.

## 1. 纯态和统计混合态　状态的密度算符描述

量子系统的一般状态除了纯态以外,还有统计混合态.它们分别与经典理论中的“力学”态和统计系综相对应.量子理论中的纯态就是由某个态矢量来描述的状态,在通常量子力学或量子电动力学课程中所涉及的态一般都是纯态.而统计混合态则由量子系统在一组给定的态矢量上的概率分布来表示(这一组态并不一定是互相正交的,但假定它们都已归一化),例如给出系统在一组态$|F_j\rangle$上的出现概率为 $P_j$.需要注意的是,这时系统的状态并非就是$\sum_j \sqrt{P_j}\,|F_j\rangle$.后者为一纯态,它是各个$|F_j\rangle$态的相干叠加.而在统计混合态情况,各个$|F_j\rangle$间的相对相位是完全不确定的,也就是说各个$|F_j\rangle$态之间无相位关联(参见(5.4.7)式下面的例子).

从以上说明可以看出,统计混合态是对系统的一种统计性的描述,它对应于一个量子统计系综.在量子统计物理中所涉及的态就是这种统计混合态.

对于统计混合态,比较方便的是采用密度算符(或称密度矩阵)来表示.例如上面所说的例子,相应的密度算符就是(其中各个$|F_j\rangle$不一定互相正交)

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j\,|F_j\rangle\langle F_j|. \tag{5.4.1}$$

它是一个厄米算符:

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}. \tag{5.4.2}$$

厄米性是密度算符的第一个重要性质,它保证了物理量的期望值为实数,并可通过幺正变换将$\hat{\rho}$对角化(参见后文).当指标 $j$ 连续取值时,(5.4.1)式中的求和即相应地化为积分,同时 $P_j$ 换成概率密度.

不难证明(参见下),对任意两个态$|a\rangle$和$|b\rangle$(两态不一定正交),有

$$\mathrm{tr}|a\rangle\langle b| = \langle b|a\rangle. \tag{5.4.3}$$

我们知道一个算符(或矩阵)的迹是与表象无关的.于是我们可取分立的一组正交完备集$|n\rangle$,在此表象中算符$|a\rangle\langle b|$的对角元就是$\langle n|a\rangle\langle b|n\rangle$,而$|a\rangle\langle b|$的迹即为对角元的和:

$$\mathrm{tr}|a\rangle\langle b| = \sum_n \langle n|a\rangle\langle b|n\rangle = \sum_n \langle b|n\rangle\langle n|a\rangle = \langle b|a\rangle.$$

在上式推导中我们利用$\langle n|a\rangle$和$\langle b|n\rangle$都是 $C$ 数因而互相对易,以及完备集的性质$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$.

由于$\sum_j P_j = 1$,故从(5.4.1)式即得

$$\mathrm{tr}\hat{\rho} = 1. \tag{5.4.4}$$

这是密度算符的重要一般性质之二.利用(5.4.1)和(5.4.3)式还可得出:任何力学量$\hat{L}$在统计混合态中的期望值可通过对$\hat{L}$与$\hat{\rho}$乘积求迹的方式来表示:首先在各个$|F_j\rangle$态中求力学量$\hat{L}$的期望值$\langle F_j|\hat{L}|F_j\rangle$,然后再对$j$来平均,再利用(5.4.3)式即得密度算符的第三点重要性质:

$$\overline{L} = \sum_j P_j \langle F_j|\hat{L}|F_j\rangle = \mathrm{tr}\sum_j P_j \hat{L}|F_j\rangle\langle F_j| = \mathrm{tr}(\hat{L}\hat{\rho}). \tag{5.4.5}$$

当然,也可将$\overline{L}$表成$\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{L})$(由此还可见,$\hat{\rho}$的厄米性保证了任何物理量的期望值为实数).不仅如此,测出力学量$\hat{L}$为其某个本征值$L_0$的概率①,也可用$\hat{\rho}$在本征态$|L_0\rangle$的期望值来表示,并可表成$\hat{\rho}$与该本征态的投影算符$|L_0\rangle\langle L_0|$乘积的迹(密度算符的第四点重要性质):

$$\begin{aligned} P(L_0) &= \sum_j P_j |\langle L_0|F_j\rangle|^2 = \sum_j P_j \langle L_0|F_j\rangle\langle F_j|L_0\rangle \\ &= \langle L_0|\hat{\rho}|L_0\rangle = \mathrm{tr}(\hat{\rho}|L_0\rangle\langle L_0|). \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

纯态可看成是统计混合态的一个特殊情况,即该"态矢量集合"中只有一个态.于是纯态所对应的密度算符就是

$$\hat{\rho} = |F\rangle\langle F|.$$

由(5.4.1)式还可得出

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) = \mathrm{tr}\sum_{j,k} P_j P_k |F_j\rangle\langle F_j|F_k\rangle\langle F_k|.$$

如令$f_{jk} = \langle F_j|F_k\rangle$,则上式右方可化为$\sum_{j,k} P_j P_k f_{jk}\,\mathrm{tr}|F_j\rangle\langle F_k| = \sum_{j,k} P_j P_k |f_{jk}|^2 \leqslant \sum_{j,k} P_j P_k$,因为$|f_{jk}|^2 \leqslant 1$.由此即得

$$0 < \mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) \leqslant 1. \tag{5.4.7}$$

不难看出,上式中的等号只当状态为纯态,即(5.4.1)式右方只有一项时才成立.因此"$\mathrm{tr}(\hat{\rho})^2$是等于1还是小于1"可作为相应的系统是处在纯态还是统计混合态的一个判据.这是密度算符的第五点重要性质.

下面我们通过一个例子来看纯态和统计混合态间的关系.设系统的状态为$|F_\theta\rangle = \sqrt{P_1}|F_1\rangle + \sqrt{P_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|F_2\rangle$,当$\theta$取确定值时,该态为一个纯态,而若$\theta$在0到$2\pi$范围内以均匀概率取值,即$\theta$的概率密度$P(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}$,则按(5.4.1)式以及

① 如果$\hat{L}$具有连续分布的本征值,则应为概率密度.

(5.4.2)式下面的说明，该系统的密度算符即为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F_\theta\rangle\langle F_\theta| \mathrm{d}\theta. \tag{5.4.8}$$

将所给出的$|F_\theta\rangle$表示式代入后，对$\theta$的积分即可求出，结果即为

$$\hat{\rho} = P_1|F_1\rangle\langle F_1| + P_2|F_2\rangle\langle F_2|. \tag{5.4.9}$$

这表明(5.4.8)和(5.4.9)式两种表示是等价的，即(5.4.9)式所表示的统计混合态就相当于$|F_1\rangle$和$|F_2\rangle$以确定的幅值$\sqrt{P_1}$和$\sqrt{P_2}$，但以完全随机的相对相位叠加的状态.

在薛定谔图象中，密度算符与态矢量相似将随时间变化. 设$t=0$时密度算符的值为

$$\hat{\rho}(0) = \sum_j P_j |F_j\rangle\langle F_j|,$$

则根据$|F_j\rangle$随时间的变化，即得

$$\hat{\rho}(t) = \sum_j P_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|F_j\rangle\langle F_j|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}. \tag{5.4.10}$$

我们还可由上式求出$\hat{\rho}(t)$所满足的方程①

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = \hat{H}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{H} = [\hat{H},\hat{\rho}(t)]. \tag{5.4.11}$$

同样，在作用图象中，$\hat{\rho}$随时间的变化为

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t,0)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t,0), \tag{5.4.12}$$

其中$\hat{U}(t,0)$为作用图象中的演化算符. 利用$\hat{U}(t,0)$所满足的方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t,0) = \hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0),$$

即可得出作用图象中$\hat{\rho}(t)$的运动方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t),\hat{\rho}(t)]. \tag{5.4.13}$$

在本小节的最后，我们来讨论密度算符的本征态和密度算符的半正定性. 为方便起见我们仍在粒子数表象来讨论. 将(5.4.1)式中$|F_j\rangle$用$|n\rangle$来展开：

$$|F_j\rangle = \sum_n a_{jn}|n\rangle, \tag{5.4.14}$$

代入(5.4.1)式中即得

---

① 注意此方程与海森伯图象中力学量$\hat{L}(t)$的运动方程的差别. 后者为$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{L}(t) = [\hat{L}(t),\hat{H}]$.

$$\hat{\rho}=\sum_{n,n'}\rho_{nn'}|n\rangle\langle n'|,\tag{5.4.15}$$

其中

$$\rho_{nn'}=\sum_{j}P_{j}a_{jn}a_{jn'}^{*},\tag{5.4.16}$$

为 $\hat{\rho}$在 $n$ 表象中的表示并等于$\langle n|\hat{\rho}|n'\rangle$.由 $\rho_{nn'}$作为矩阵元所构成的矩阵就是 $n$ 表象中的密度矩阵.它的对角元 $\rho_{nn}$等于体系出现在$|n\rangle$态的概率 $P(n)$.

由于 $\hat{\rho}$为厄米算符,故有 $\rho_{nn'}^{*}=\rho_{n'n}$.即密度矩阵为厄米矩阵.从而可通过幺正变换将它对角化.在对角化的表象中 $\rho_{ll'}=P_{l}\delta_{ll'}$.此新表象的基矢$|l\rangle$即为 $\hat{\rho}$的本征态,相应的本征为 $P_{l}$.换句话说,对任意 $\rho$ 总可选择一组正交归一化的$|l\rangle$,将它表示成

$$\hat{\rho}=\sum_{l}P_{l}|l\rangle\langle l|.\tag{5.4.17}$$

$|l\rangle$代表互不相干的一组态,$P_{l}$ 即为系统状态中含$|l\rangle$态的概率.由 $P_{l}\geqslant0$,密度矩阵为半正定的.

**2. 相互纠缠的子系统的状态**

当一个系统包含若干个相互作用的子系统时,即使总系统处在纯态,子系统也通常是处在统计混合态(除了总系统的态矢量是各个子系统态矢量外乘的特殊情况以外在这种特殊情况,每个子系统的状态与其他子系统的状态无关)例如由原子与光场组成的系统,我们可将该系统的任意纯态$|T\rangle$按原子的一组正交归一的态矢量集合$|A_{j}\rangle$来展开:

$$|T\rangle=\sum_{j}a_{j}|F_{j}\rangle\otimes|A_{j}\rangle,\tag{5.4.18}$$

其中$|F_{j}\rangle$代表光场的某个光场状态,也已经归一化,但不同 $j$ 的$|F_{j}\rangle$彼此不一定正交.符号$\otimes$代表外乘.当我们计算光场的任意物理量 $\hat{L}$ 的期望值时,应用(5.4.18)式以及$(\langle A_{k}|\otimes\langle F_{k}|)\hat{L}(|F_{j}\rangle\otimes|A_{j}\rangle)=\langle F_{k}|\hat{L}|F_{j}\rangle\langle A_{k}|A_{j}\rangle=\langle F_{k}|\hat{L}|F_{j}\rangle\delta_{kj}$,即得

$$\langle T|\hat{L}|T\rangle=\sum_{j}|a_{j}|^{2}\langle F_{j}|\hat{L}|F_{j}\rangle\equiv\mathrm{tr}(\hat{L}\hat{\rho}_{ph}),\tag{5.4.19}$$

其中 $\hat{\rho}_{ph}$代表子系统(光场)的密度算符,其定义为

$$\hat{\rho}_{ph}=\sum_{j}|a_{j}|^{2}|F_{j}\rangle\langle F_{j}|.\tag{5.4.20}$$

它就等于总系统的密度算符$|T\rangle\langle T|$对原子自由度求迹后的结果:

$$\hat{\rho}_{ph} = \mathrm{tr}_{at} \mid T\rangle\langle T \mid .$$

值得注意的是，$\hat{L}$ 的期望值不等于"把(5.4.18)式各项中的 $\mid A_j\rangle$ 去掉做成一个光场态矢 $\mid F\rangle \equiv \sum a_j \mid F_j\rangle$"，然后用 $\mid F\rangle$ 来求 $\hat{L}$ 的期望值(即$\langle F \mid \hat{L} \mid F\rangle$). ①

在(5.4.18)式的求和中不止一项的情况. 系统的状态 $|T\rangle$ 称为量子纠缠态，而原子和光场称为相互纠缠的子系统. 在这种情况下(5.4.20)式给出的 $\hat{\rho}_{ph}$ 就代表一个统计混合态. 这表明：尽管总系统是处在纯态 $|T\rangle$(其中各项 $|F_j\rangle \otimes |A_j\rangle$ 是相干叠加的)，但对子系统光场来说，各个 $|F_j\rangle$ 并不是相干叠加的：由于 $|A_j\rangle$ 与 $|A_k\rangle$ 正交，使得(5.4.19)式中不出现 $a_j a_k^* \langle F_k | \hat{L} | F_j\rangle$ 这样的交叉项.

更一般地来说，若总系统由若干个子系统 $s_1, s_2, \cdots$ 构成，总系统的状态由密度算符 $\rho$ 描写，那么描述子系统 $s_1$ 的密度算符 $\hat{\rho}_1$ 即为 $\hat{\rho}$ 对其余系统求迹的结果：

$$\hat{\rho}_1 = \mathop{\mathrm{tr}}_{s_2, s_3, \cdots} \hat{\rho}. \tag{5.4.21}$$

若 $\mid a_2, a_3, \cdots\rangle$ 代表余系统 $s_2 s_3 \cdots$ 状态的一组正交完备集，则 $\mathop{\mathrm{tr}}\limits_{s_2, s_3, \cdots} \hat{\rho}$ 可表为 $\sum\limits_{a_2, a_3, \cdots} \langle a_2, a_3, \cdots \mid \hat{\rho} \mid a_2, a_3, \cdots\rangle$. 当总系统为纠缠的纯态时，子系统将处于统计混合态(除非该子系统与其他子系统都不发生纠缠).

在量子光学中，常考虑的对象是开放系统，亦即不断与外界环境相作用的系统. 这时即使该光学系统与环境总起来是处于纯态，该光学系统本身一般也是处于统计混合态. 故一般要用密度算符来描述.

本小节的内容虽然不多，但比较重要. 如果不加重视，容易出现原则性错误. 这也是我们把它单列成一小节的原因.

### 3. 系统的熵算符

在量子统计理论中，并可通过密度算符来定义一个系统的熵算符：

$$\hat{S} = -k \ln \hat{\rho}, \tag{5.4.22}$$

而该系统的熵即为 $\hat{S}$ 在系统状态中的期望值：

$$S = \langle \hat{S} \rangle = -k \mathrm{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \tag{5.4.23}$$

在密度算符的对角表象中，$S$ 的值可以方便地计算出来. 因这时(参见(5.4.17)式)

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j \mid j\rangle\langle j \mid, \tag{5.4.24}$$

---

① 这两种做法的区别在于，在 $\mid F\rangle = \sum a_j \mid F_j\rangle$ 中，各个 $\mid F_j\rangle$ 是相干叠加的，而在(5.4.18)式中各个 $\mid F_j\rangle$ 之间则无相位关连. 参见(5.4.20)式以及(5.4.9)式上面的讨论.

其中$|j\rangle$为正交归一的集合.这时$|j\rangle$是$\hat{\rho}$的本征态(本征值为$P_j$),它当然也是$\ln\hat{\rho}$的本征态,本征值即为$\ln P_j$.于是得

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}) = \sum_j P_j\langle j\mid\ln\hat{\rho}\mid j\rangle = \sum_j P_j\ln P_j. \tag{5.4.25}$$

代入(5.4.23)式中就得出吉布斯公式

$$S = -k\sum_j P_j\ln P_j. \tag{5.4.26}$$

当系统处于纯态时,(5.4.24)式中只有一项.这时熵的值即为零.非纯态时熵的值恒大于零(因$\ln P_j<0$).这也可以作为纯态和统计混合态的一个判据.如果(5.4.24)式中有$N$项,而且每项中的概率都相同即$1/N$(这是$N$给定时,$S$取最大值的情况,参见(5.4.31)式下的讨论).则$S=k\ln N$.因此,$N$愈大熵也就愈大.我们也可用$S$的值作为统计混合度的一种量度.

下面用一个例子来作更具体的说明.设系统处在二个正交态矢量$|1\rangle$和$|2\rangle$上,其密度矩阵形如

$$\rho = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.4.27}$$

其中$p_{21}=p_{12}^*$(按$\hat{\rho}$的厄米性),$p_{11}+p_{22}=1$(按基本性质2).此密度矩阵所描述的情况为:$|1\rangle$和$|2\rangle$两态出现的概率分别为$p_{11}$和$p_{22}$(按基本性质4或(5.4.16)式),但$|1\rangle$与$|2\rangle$两态间的相对相位$\theta$不一定具有确定值,而由某种概率分布$p(\theta)$来描述.因此该系统状态也可表示为$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\left[\sqrt{p_{11}}\,|1\rangle+\sqrt{1-p_{11}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|2\rangle\right]$,其中$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$是一个无关重要的因子,在$\hat{\rho}$中并不出现,而$p_{12}$将由下式表示:

$$p_{12} = \sqrt{p_{11}(1-p_{11})}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}p(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{5.4.28}$$

由上式可见$p_{12}$的绝对值的取值范围为0到$\sqrt{p_{11}(1-p_{11})}$.当$p(\theta)=\frac{1}{2\pi}$,即$|1\rangle$与$|2\rangle$之完全无相位关联时,相应的$p_{12}$为0,而当$p(\theta)=\delta(\theta-\theta_0)$即两态之间具有确定相对相位亦即系统实际处在纯态时,$p_{12}=\sqrt{p_{11}(1-p_{11})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$,其绝对值即达到最大的可能值$\sqrt{p_{11}(1-p_{11})}$.

该密度矩阵(5.4.27)的**本征值**由方程$(p_{11}-p)(p_{22}-p)=|p_{12}|^2$决定.由此解出两个本征值$p_1$和$p_2$为

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}[1\pm\sqrt{1-4D}], \tag{5.4.29}$$

其中$D=p_{11}p_{22}-|p_{12}|^2=p_{11}(1-p_{11})-|p_{12}|^2$.由(5.4.26)式,熵的值即由$p_1$(因$p_2=1-p_1$)决定:

$$S=-k[p_1\ln p_1+(1-p_1)\ln(1-p_1)].\tag{5.4.30}$$

从 $D$ 的值我们看到，$S$ 的值依赖于两个变量 $p_{11}$ 及 $|p_{12}|$. 对于给定的 $p_{11}$ 值(若 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 是能量本征态，这就对应于系统的能量给定)，$S$ 的最小值($S=0$)出现在 $|p_{12}|^2=p_{11}(1-p_{11})$ 即 $D=0$ 处(这时 $p_1=1, p_2=0$，即系统实际处在 $\hat{\rho}$ 的第一个本征态). $S$ 的最大值出现在 $|p_{12}|=0$ 处，这时两个本征值 $p_1$ 和 $p_2$ 就是 $p_{11}$ 和 $1-p_{11}$，其值为

$$S=-k[p_{11}\ln p_{11}+(1-p_{11})\ln(1-p_{11})].\tag{5.4.31}$$

如果 $p_{11}$ 也可以变动，则 $S$ 的极大值将出现在 $p_{11}=\frac{1}{2}$ 处，即体系以均等概率处于两个态上. 这时 $S$ 就等于 $k\ln 2$.

从上面的讨论，我们看到：当一个二能级系统能量给定(从而系统在两个能级上的概率也就给定)时，熵增加过程也就是两能级间相位退相干的过程①. 在两个态无相位关联的情况下，又以两个态的概率相等(各为 $\frac{1}{2}$)时熵最大. 如果两个能级能量不等时，又处于热平衡态，则后一情况对应于温度为无穷大.

最后，我们指出，当总系统的 $\hat{\rho}$ 等于两个子系统的 $\hat{\rho}_1$ 和 $\hat{\rho}_2$ 的外乘积时(这意味着两个子系统之间没有关联)，由(5.4.23)式可以求出(利用 $\mathrm{tr}\hat{\rho}_1=\mathrm{tr}\hat{\rho}_2=1$)

$$S=S_1+S_2.$$

即总系统的熵为两个子系统熵的和，但在一般情况下这一结论并不成立. 最明显的例子是，若总系统为纠缠的纯态，则它的熵 $S$ 等于零. 而二个子系统皆处于统计混合态，它们的熵 $S_1$ 和 $S_2$ 都大于零.

## 4. 单模热光场的统计性质

单模光场的能量本征态即为光子数态 $|n\rangle$，相应的能量本征值为 $n\hbar\omega$. 当该光场与温度为 $T$ 的库达到热平衡时，即为单模热光场，其各个能级的概率

$$P(n)=N\mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}},\tag{5.4.32}$$

$N$ 为归一化常数，由 $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)=1$ 来确定. 其值为

$$N=(1-\mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}).\tag{5.4.33}$$

该模上的平均光子数为$\left(令\ x=\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$

---

① 退相干时间的长短是量子相干的态在实用上的重要参数.

$$\langle n \rangle = \sum_n nP(n) = (1-e^{-x})\sum_n ne^{-nx} = -(1-e^{-x})\frac{d}{dx}\sum_n e^{-nx} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}. \tag{5.4.34}$$

在 $T$ 不太高的情况下，对于可见光波段 $\langle n \rangle$ 是一个很小的值. 例如当波长为 $5\times 10^3$ Å 时，$\hbar\omega \approx 2.48$eV. 即使温度为 2000℃，$kT$ 也不过 0.196eV. 这样该单模态中的 $\langle n \rangle$ 只有 $3.2\times 10^{-6}$. 此值与光腔的体积无关(假如我们研究的是腔内光场的情况)，于是腔的体积愈大，该模的光子数密度愈小. 但另一方面，腔愈大，其中允许模的密度愈大(模密度与体积成正比). 通过这一因素使得腔内光子数愈多.

我们可把归一化常数 $N$ 以及 $e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$ 都用 $\langle n \rangle$ 表示出来. 结果为

$$N = \frac{1}{\langle n \rangle + 1}, \qquad e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1}. \tag{5.4.35}$$

于是 $P(n)$ 也可写成

$$P(n) = \frac{1}{\langle n \rangle + 1}\left[\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1}\right]^n. \tag{5.4.36}$$

这种分布称为几何分布. 由于 $\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1}$ 恒小于 1，故 $P(n)$ 随着 $n$ 以指数下降. 这是几何分布与泊松分布不相同的地方. 如令

$$\kappa = \ln\frac{\langle n \rangle + 1}{\langle n \rangle} \qquad (\kappa > 0), \tag{5.4.37}$$

则 $P(n)$ 可表示为与(5.4.32)式相似的形式：

$$P(n) = \frac{1}{\langle n \rangle + 1}e^{-\kappa n}. \tag{5.4.38}$$

概率分布由(5.4.36)或(5.4.38)式表示的光场(其中 $\langle n \rangle$ 不一定由温度决定)统称为混杂光场. 任何混杂光源(由大量彼此相同但互不相关联的发光体构成)所辐射的单模光都具有这样的概率分布. 它是在 $\bar{n}$ 给定的情况下($\bar{n} = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{n})$)熵具有最大值的分布. 热辐射光只是混杂光场的一种特殊情况，其 $\langle n \rangle$ 由温度 $T$ 决定，如(5.4.34)式所示. 混杂光源不限于热光源，例如气体放电管也是混杂光源.

从(5.4.38)式不难求出 $\langle n^2 \rangle$：

$$\langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 P(n) = \left(\frac{d^2}{d\kappa^2}\sum_n \frac{1}{\langle n \rangle + 1}e^{-\kappa n}\right)_{\kappa = \ln\frac{\langle n \rangle + 1}{\langle n \rangle}} = 2\langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \tag{5.4.39}$$

于是混杂光场的粒子数方差为

$$\Delta n = \sqrt{\langle n \rangle^2 + \langle n \rangle}, \tag{5.4.40}$$

从而 $\frac{\Delta n}{\langle n \rangle} > 1$，即方差比平均值还要大. 这种光的强度涨落大，故统计性质不良(尽

管它可能具有好的单色性和方向性,如该模具有确定波矢 $\boldsymbol{k}$ 的情况).

单模混杂光场的密度算符即为

$$\hat{\rho}=\sum_n P(n)|n\rangle\langle n|=\frac{1}{\langle n\rangle+1}\sum_n\left(\frac{\langle n\rangle}{\langle n\rangle+1}\right)^n|n\rangle\langle n|. \tag{5.4.41}$$

实际上由(5.4.30)式所给出的 $P(n)$也可由“$\bar{E}$(即$\langle n\rangle$)给定的条件下,熵取最大值”的要求来推出(例如参见“Louisell, Quantum Statistical Properties of Radition” p.217).

**5. 光场密度算符的全纯表示和 $P$ 表示**

在§5.3 中我们曾指出,光场相干态构成完备集合,因而任意光场(包括混杂光场)的密度算符都可在相干态全纯表象中表示出来.这种表示(全纯表示)在文献中又称为 $R$ 表示.对于单模光场,按(5.3.16a)和(5.3.17)式,$\hat{\rho}$可写成

$$\hat{\rho}=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\rho(\alpha^*,\beta)e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2}|\alpha\rangle\langle\beta|,$$

$$\rho(\alpha^*,\beta)=\langle\alpha|\hat{\rho}|\beta\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2+\frac{1}{2}|\beta|^2}. \tag{5.4.42}$$

其中 $d^2\alpha=d(\mathrm{Re}\alpha)d(\mathrm{Im}\alpha)$,$d^2\beta$意义相同.当 $\hat{\rho}=\sum_j P_j|F_j\rangle\langle F_j|$时,$\rho(\alpha^*,\beta)$即可表为

$$\rho(\alpha^*,\beta)=\sum_j P_j\langle\alpha|F_j\rangle\langle F_j|\beta\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2+\frac{1}{2}|\beta|^2}.$$

如果态矢$|F_j\rangle$的全纯表示为 $F_j(\alpha^*)$,则利用(5.3.14)式,$\rho(\alpha^*,\beta)$即化成

$$\rho(\alpha^*,\beta)=\sum_j P_jF_j(\alpha^*)F_j^*(\beta^*). \tag{5.4.43}$$

另外,如果已知 $\hat{\rho}$在光子数表象中的表示 $\rho_{mn}$,则由(5.3.16b)式,亦可直接得出 $\rho(\alpha^*,\beta)$:

$$\rho(\alpha^*,\beta)=\sum_{mn}\rho_{mn}\frac{(\alpha^*)^m\beta^n}{\sqrt{m!n!}}. \tag{5.4.44}$$

利用密度算符的厄米性并满足条件 $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2\leqslant 1$[(参见(5.4.7)式],可以得出

$$\sum_{mn}|\rho_{mn}|^2\leqslant 1. \tag{5.4.45}$$

在此条件下,由(5.4.44)式表示的 $\rho(\alpha^*,\beta)$亦将是双元变量 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 的全纯函数,与物理量的全纯表示一样[参见(5.3.22)式下].反过来,若 $\rho(\alpha^*,\beta)$已知,则通过它按 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 的幂级数展开式,即可按(5.4.44)式定出 $\rho_{mn}$.

对于单模混杂光场,利用(5.4.45)式,即可求出其密度算符的全纯表示为

$$\rho(\alpha^*,\beta)=\frac{1}{\langle n\rangle+1}\sum_n\frac{1}{n!}\left(\frac{\langle n\rangle}{\langle n\rangle+1}\alpha^*\beta\right)^n=\frac{1}{\langle n\rangle+1}e^{\frac{\langle n\rangle}{\langle n\rangle+1}\alpha^*\beta}. \tag{5.4.46}$$

上式的右方实际是单变量($\alpha^{*}\beta$)的函数.

“相干态$|\alpha\rangle$彼此不正交,其全体构成超完备的集合”看起来是它的缺点,但却提供了一种有利的可能性:即利用这种超完备性将广泛一类的光场的密度算符都表成对角的形式,即

$$\hat{\rho}=\int d^{2}\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|. \tag{5.4.47}$$

这种表示被称为 $P$ 表示,其中的 $P(\alpha)$为实函数[①]即

$$P^{*}(\alpha)=P(\alpha), \tag{5.4.48}$$

上式可从 $\hat{\rho}$的厄米性得出.由 $\mathrm{tr}\hat{\rho}=1$ 还可得出 $P(\alpha)$满足归一条件

$$\int d^{2}\alpha P(\alpha)=1. \tag{5.4.49}$$

而条件(5.4.7)式还给出

$$0<\int d^{2}\alpha d^{2}\alpha' P(\alpha)P(\alpha')e^{-|\alpha-\alpha'|^{2}}\leqslant 1. \tag{5.4.50}$$

当物理量表示成正规乘积的情况下,用 $P$ 表示计算其期望值特别方便,只需将该物理量中的 $\hat{a}^{\dagger}$ 换成 $\alpha^{*}$. 将其中 $\hat{a}$换成 $\alpha$,再乘上 $P(\alpha)$并对二维 $\alpha$ 积分即得(不难利用(5.4.47)式来证明此结论).

从形式上看,$P(\alpha)$好像是光场处于$|\alpha\rangle$态的概率密度,实际上并不尽然,因为没有什么原则限定它只取正值.人们发现在某些情况下它还具有比 $\delta$ 函数更高的奇异性(在这种情况下,通常又称为 $P$ 表示不存在).我们将把取值恒为正而且奇异性不高于 $\delta$ 函数的 $P(\alpha)$称为具有良好行为的 $P$ 表示.

当密度算符 $\hat{\rho}$可表示成一系列反正规序的乘积项的和时,$P(\alpha)$的存在可以简单地证明并给出它的表达式.这时 $\hat{\rho}$具有形式:

$$\hat{\rho}=\sum_{j,k}b_{jk}\hat{a}^{j}(\hat{a}^{\dagger})^{k}, \tag{5.4.51}$$

将单位算符按 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 的分解式$\frac{1}{\pi}\int d^{2}\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 插入到上式右方 $\hat{a}^{j}$ 与$(\hat{a}^{\dagger})^{k}$ 之间,即可求出

$$\hat{\rho}=\int d^{2}\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

其中

$$P(\alpha)=\frac{1}{\pi}\sum_{j,k}b_{jk}\alpha^{j}(\alpha^{*})^{k}. \tag{5.4.52}$$

---

① 由于 $\alpha=\alpha_{1}+i\alpha_{2}$,故实际上有两个独立变量 $\alpha_{1}$ 和 $\alpha_{2}$.利用 $\alpha_{1}=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^{*})$,$\alpha_{2}=\frac{1}{2i}(\alpha-\alpha^{*})$,又可将函数 $P$ 表为$\alpha$ 和$\alpha^{*}$的函数,这里简写成 $P(\alpha)$.

从以上讨论我们还看到,从 $P(\alpha)$可以反过来得出 $\hat{\rho}$用反正规乘积表示的表达式.如(5.4.47)式下的注所说明并由(5.4.52)式例示,$P$ 实际为 $\alpha$ 和 $\alpha^*$ 的函数即 $P(\alpha,\alpha^*)$,将其中 $\alpha$ 换成 $\hat{a}$,将 $\alpha^*$ 换成 $\hat{a}^\dagger$ 再进行反正规编序即可得出 $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}=\pi \mathrm{A} P(\hat{a},\hat{a}^\dagger), \tag{5.4.53}$$

其中 A 为反正规偏序符号.

以上关于 $P(\alpha)$存在的论证依赖于 $\hat{\rho}$具有反正规序乘积展开式的表示.虽然这种展开原则上总可进行,但由此得出的 $P(\alpha)$可能具有很高的奇异性.

对于具有良好行为的 $P$ 表示,即 $P(\alpha)$恒为正(或零)而且其奇异性不超过 δ 函数时,它将具有准概率分布的含义.这时,光场与"以 $P(\alpha)$作为概率密度"的经典光在许多性质上相近似,我们把这种光场称为类经典光场(文献中常简称为经典光场)①,反之将称为特征量子光场(文献中常称为量子光场或非经典光场).对于类经典光场,即使光场的平均光子数很少,它的许多性质仍与宏观的经典光场相似,并不明显示微观客体的量子性.

从 $\hat{\rho}$计算相应的 $P(\alpha)$,有一个较为有效的方法.先将(5.4.47)式两边对$|\beta\rangle$取矩阵元,得

$$\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle=\int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle=\int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\mathrm{e}^{-|\alpha-\beta|^2}. \tag{5.4.54}$$

此式给出 $\hat{\rho}$的相干态矩阵元$\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$用 $P(\alpha)$表示的公式.再用 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 表示 $\alpha$ 的实部和虚部,用 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 表示 $\beta$ 的实部和虚部,并将上式写成

$$\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle=\int \mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2 P(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{e}^{-(\alpha_1-\beta_1)^2-(\alpha_2-\beta_2)^2}, \tag{5.4.55}$$

即可由此式将$\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$的傅里叶变换系数 $\rho(k_1,k_2)$与 $P(k_1,k_2)$的傅里叶变换系数 $\chi_P(k_1,k_2)$联系起来.$\rho(k_1,k_2)$和 $\chi_P(k_1,k_2)$的定义分别为

$$\rho(k_1,k_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\beta_1+\mathrm{i}k_2\beta_2}\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle, \tag{5.4.56a}$$

$$\chi_P(k_1,k_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\alpha_1+\mathrm{i}k_2\alpha_2}P(\alpha_1,\alpha_2). \tag{5.4.56b}$$

将(5.4.51)式代入(5.4.52a)式右方并令 $x_1=\beta_1-\alpha_1, x_2=\beta_2-\alpha_2$ 即得

$$\begin{aligned}\rho(k_1,k_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\alpha_1+\mathrm{i}k_2\alpha_2}P(\alpha_1,\alpha_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_1+\mathrm{i}k_2x_2}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2)}\\&=\chi_P(k_1k_2)(\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(k_1^2+k_2^2)}).\end{aligned} \tag{5.4.57}$$

---

① 这种光场仍是量子化的,故称作类经典光场比较合适.在本书中只把未量子化的光场称作经典光场.

这就是我们所要推求的结果.由于(5.4.55)式右方为两个函数 $P(\alpha_1,\alpha_2)$ 和 $e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}$ 的卷积,(5.4.53)式的含意就是:两个函数卷积的傅里叶变换等于它们各自傅里叶变换的乘积.这是傅里叶变换理论中的一个公式.从上面的讨论以及(5.4.48)式可知,如果 $\hat{\rho}$ 的 $P(\alpha)$ 存在,它将是唯一的.

根据以上的推导,我们只要先将 $\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$ 作傅里叶变换,求出 $\rho(k_1,k_2)$,然后按(5.4.57)式求出 $\chi_P(k_1,k_2)$,再作一个逆傅里叶变换即可求出 $P(\alpha_1,\alpha_2)$,即

$$P(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\alpha_1-\mathrm{i}k_2\alpha_2}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(k_1^2+k_2^2)}\rho(k_1,k_2). \tag{5.4.58}$$

在上式的右方由于有一个指数因子 $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(k_1^2+k_2^2)}$,故使无穷积分的收敛变坏,使得求出的 $P(\alpha_1,\alpha_2)$ 可能出现高度奇异性.只当 $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(k_1^2+k_2^2)}\rho(k_1,k_2)$ 在 $k_1$、$k_2$ 大时是有界的,所给出的 $P(k_1,k_2)$ 才描述的是类经典光场.

以上得出的结果也许会使人感到奇怪,即 $\hat{\rho}$ 可通过 $P(\alpha)$ 由它的相干态对角元 $\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$ 来确定,而不需要其非对角矩阵元方面的知识.

出现这一情况的原因在于,相干态构成超完备集合,从而全体相干态的对角元要比普通表象中的全体对角元给出更多的知识.另外,如前面所述,$\hat{\rho}$ 可用二元全纯函数 $\rho(\alpha^*,\beta)$ 表示.根据多元复变函数中的一个定理,一个双元全纯函数 $\rho(\alpha^*,\beta)$ 可通过 $\rho(\beta^*,\beta)$ 完全决定(参见 Bochner and Martin, Several Complex variables, p. 36,并可参见 Nussenzveig, Introduction to Quantum Optics, p. 68).这样,通过 $\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$ 得知 $\rho(\beta^*,\beta)$,进一步就可确定 $\rho(\alpha^*,\beta)$.

我们还可通过另一途径来说明这个问题.当 $\hat{\rho}$ 表示成正规乘积之和,即

$$\hat{\rho}=\sum_{m,n}\rho_{mn}(\hat{a}^\dagger)^m\hat{a}^n \tag{5.4.59}$$

时,可得出

$$\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle=\sum_{m,n}\rho_{mn}(\beta^*)^m\beta^n.$$

这样,通过将上式右方中的 $\beta^*$ 代换成 $\hat{a}^\dagger$,将 $\beta$ 代换成 $\hat{a}$,就可得出 $\hat{\rho}$,亦即通过 $\langle\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$ 就确定了 $\hat{\rho}$①.

上面介绍的这个方法,实际上就是通过下一节中所讲的特征函数以及 $P$ 表示和另一种 $Q$ 表示间的关系来确定 $P(\alpha)$ 的办法.具体例子将在下节讲述.

---

① 如果(5.4.59)式中求和的项数是有限的,则不难通过对易关系将它表成反正规序乘积的形式.然后再通过(5.4.42)式来定出 $P(\alpha)$,进一步确定 $\hat{\rho}$.

# §5.5　量子光场的分布函数与特征函数

在经典光学中，一个单模光场的状态（无论是纯态还是统计混合态）都可用一个“表示其幅模$|\alpha|$和相位$\theta$概率分布”的函数$P_c(|\alpha|,\theta)$来描述，此分布函数也可写成$P_c(\alpha_1,\alpha_2)$，其中$\alpha_1$和$\alpha_2$为振幅$\alpha$的实部和虚部.为简写起见，我们也将它写成$P_c(\alpha)$.

量子光场中的分布函数有好几种，它们也都是$(|\alpha|,\theta)$或$(\alpha_1,\alpha_2)$的$C$数实函数.虽然它们是$C$数，却仍然能给出光场的全部量子性质.与经典分布函数不同的是，它们不一定为正值，一般不具有概率分布的意义.上节所讨论的$P(\alpha)$就是量子分布函数的一种，但由于它不普遍存在（或者说有时其奇异性太高，失去意义），我们还需要引入其他的分布函数.常用的有维格纳分布函数$W(\alpha)$，$Q$表示的分布函数$Q(\alpha)$、以及正定的$P$表示函数等，最后者在研究开放性光场的演化时，有其特别的优势，参见第5小节.

在量子理论中还有一类重要的函数称为特征函数.它原本是用来计算某个物理量的各级矩，因而又称为该物理量的矩生成函数.后来才推广为整个系统的特征函数.分布函数与特征函数之间有着对应的关系.相对应的一对之间互为傅里叶变换系数.在本节中，我们先介绍特征函数的概念以及它和分布函数之间的关系.然后再具体讨论几种单模光场情况的实例.

## 1. 特征函数的概念

对于许多量子问题，人们不仅要计算物理量算符的期望值，还常常要计算其幂次的期望值.例如在计算物理量$A$的方差时，就需要知道$\hat{A}^2$的期望值，我们将称$\hat{A}$的$l$次幂的期望值$\langle\hat{A}^l\rangle$为该算符的$l$次矩.下面将看到，如果知道了$\hat{A}$的各次矩，也就可推导出$\hat{A}$的观测值的概率分布.

为了计算$\hat{A}$的各次矩，我们定义一个$C$数函数：

$$\chi_A(\xi)=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{A}}\rangle=\mathrm{tr}(\hat{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{A}}),\tag{5.5.1}$$

其中$\xi$为一个实参量，$\hat{A}$的任意次矩都可通过$\chi_A(\xi)$对$\xi$的微商来确定：

$$\langle\hat{A}^l\rangle=(-\mathrm{i})^l\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\chi_A(\xi)\Big|_{\xi=0}.\tag{5.5.2}$$

由于这一性质，$\chi_A(\xi)$被称为算符$\hat{A}$的矩生成函数或特征函数.反过来，知道了各级$\langle\hat{A}^l\rangle$，也就确定了

$$\chi_A(\xi)=\sum_l\frac{\mathrm{i}^l}{l!}\langle\hat{A}^l\rangle\xi^l.\tag{5.5.3}$$

下面再来考察特征函数与该物理量观测值的概率分布间的关系. 我们仍只看单自由度对象而且 $\hat{A}$ 的本征值具有连续分布的情况. 这时 $\hat{A}$ 的本征态无简并, 而且 1(单位算符)可用 $\hat{A}$ 的本征态投影算符展开成

$$\int \mathrm{d}A \mid A\rangle\langle A \mid = 1, \tag{5.5.4}$$

其中 $|A\rangle$ 为 $\hat{A}$ 的本征态, 本征值为实数 $A$. 规格化条件是

$$\langle A \mid A'\rangle = \delta(A - A'). \tag{5.5.5}$$

(因 $\hat{A}$ 为厄米算符, 其本征值又是连续分布的, 故其本征态不能归一而只能归到 δ 函数, 参见 Dirac, Quantum Mechanics. 另外, 也只有这种规格化才与(5.5.4)式自洽[①])将单位算符的分解式(5.5.4)左方插入到(5.5.1)式右方的求迹号内, 即得

$$\chi_A(\xi) = \mathrm{tr}\left[\hat{\rho}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{A}} \int \mathrm{d}A \mid A\rangle\langle A \mid \right] = \int \mathrm{d}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi A} \langle A \mid \hat{\rho} \mid A\rangle, \tag{5.5.6}$$

其中的 $\langle A \mid \hat{\rho} \mid A\rangle$ 代表观测值 $A$ 的概率分布密度[参见(5.4.6)式], 可记作 $P(A)$, 也就是物理量 $A$ 的分布函数. 于是(5.5.6)式可以读成: 特征函数 $\chi_A(\xi)$ 为分布函数 $P(A)$ 的傅里叶变换系数, 即

$$\chi_A(\xi) = \int \mathrm{d}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi A} P(A). \tag{5.5.7}$$

反过来, 有

$$P(A) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi A} \chi_A(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{5.5.8}$$

(5.5.6)式表明, 只需知道 $\hat{\rho}$ 在 $A$ 表象中的对角元即可确定 $\hat{A}$ 的各次矩, 反过来知道了 $\hat{A}$ 的各次矩, 通过构成 $\chi_A(\xi)$ 即可由(5.5.8)式确定 $A$ 的概率分布 $P(A)$.

将(5.5.7)式代入(5.5.2)式中还得出

$$\langle \hat{A}^l \rangle = \int A^l P(A) \mathrm{d}A. \tag{5.5.9}$$

此式即用分布函数来表示各次矩.

下面, 将单个算符的特征函数推广到一个系统的特征函数. 这时 $\hat{A}$ 将用该系统的一组动力学算符来代替, 我们仍来看单自由度量子系统, 如作一维运动的粒子. 多自由度系统可表为各个自由度的外积.

---

① 由(5.5.4)式可得 $\int \mathrm{d}A \int \mathrm{d}A' \mid A\rangle\langle A \mid A'\rangle\langle A' \mid = 1$, 只当(5.5.5)式成立时上式才能回到 $\int \mathrm{d}A \mid A\rangle\langle A \mid = 1$.

一维运动粒子的正则动力学变量为 $\hat{p}$ 和 $\hat{q}$，我们定义该系统的一种特征函数为

$$\chi_W(\mu,\nu) = \mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\hat{p}+\mathrm{i}\nu\hat{q}}\hat{\rho}), \tag{5.5.10}$$

其中 $\mu$ 和 $\nu$ 为两个实参量. 与(5.5.1)式相比就是用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\hat{p}+\mathrm{i}\nu\hat{q}}$ 代替了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{A}}$. $\chi_W(\mu,\nu)$的傅里叶变换

$$W(p,q) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\mu-\mathrm{i}q\nu}\chi_W(\mu,\nu)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu, \tag{5.5.11}$$

称为该粒子的维格纳分布函数，是维格纳于 1932 年引入的. 从(5.5.10)和(5.5.11)式不难证明，$W(p,q)$为实函数. 知道了它，反过来也可确定 $\hat{\rho}$[见(5.5.19)和(5.5.38)式]. 从而该分布函数也包含了该粒子量子状态的全部知识.

维格纳分布函数与波函数不同，波函数为单变量 $q$(或 $p$)的复函数. 而 $W(p,q)$为 $p$ 和 $q$ 双变量的实函数. 看起来更像经典的分布函数. 但它仍然可能取负值.

将(5.5.11)式对 $p,q$ 积分即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}W(p,q)\mathrm{d}p\mathrm{d}q = \chi_W(0,0) = \mathrm{tr}\hat{\rho} = 1. \tag{5.5.12}$$

这表明 $W(p,q)$是归一的. 另外，若将(5.5.11)式只对 $p$ 积分然后用(5.5.10)式代入还可得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}W(p,q)\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\nu}\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{q}\nu}\hat{\rho})\mathrm{d}\nu, \tag{5.5.13}$$

而其中的 $\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{q}\nu}\hat{\rho})$为算符 $\hat{q}$的特征函数. 按照(5.5.6)式，有

$$\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{q}\nu}\hat{\rho}) = \int\mathrm{d}q'\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'\nu}\langle q'|\hat{\rho}|q'\rangle,$$

代回(5.5.13)式，先对 $\nu$ 积分，再对 $q'$积分即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}W(p,q)\mathrm{d}p = \langle q|\hat{\rho}|q\rangle. \tag{5.5.14}$$

上式右方代表对粒子坐标测量时，得出其值为 $q$ 的概率密度(参见(5.4.6)式上文及注). 同样可证

$$\int_{-\infty}^{+\infty}W(p,q)\mathrm{d}q = \langle p|\hat{\rho}|p\rangle. \tag{5.5.15}$$

即维格纳分布函数对 $q$ 积分后即得出动量测量值为 $p$ 的概率密度.

以上性质表明，维格纳函数具有某些双变量概率分布函数的性质，它本身当然并不是动量和坐标测量值的概率分布密度. 首先，在量子理论中坐标和动量就不能同时测量，其次，它虽然是实函数但以前已经指出的并不排除取负值. 但对其中一

个变量积分后,其值恒为正或零.

**2. 光场的特征函数和分布函数**

单模光场与一维谐振子相当,因而谐振子的维格纳函数可以转用到单模光场上来.不过对于光场,通常更喜欢用 $\hat{a}$和 $\hat{a}^{\dagger}$ 来代替 $\hat{p}$和 $\hat{q}$.我们可以直接用 $\hat{a}$和 $\hat{a}^{\dagger}$ 来定义单模光场的特征函数如下:

$$\chi_W(\eta) = \mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\frac{i}{2}(\eta^* \hat{a}+\eta\hat{a}^{\dagger})}\hat{\rho}], \tag{5.5.16}$$

其中 $\eta$ 为一个复参量.有时 $\chi_W$ 也写成 $\chi_W(\eta,\eta^*)$,它对 $\eta$ 和 $\eta^*$ 的依赖如上式右方所示,维格纳分布函数仍定义为上述特征函数的傅里叶变换:

$$W(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2}\int e^{-\frac{i}{2}(\alpha\eta^*+\alpha^*\eta)}\chi_W(\eta)\mathrm{d}^2\eta. \tag{5.5.17}$$

若将 $\alpha$ 和 $\eta$ 表示成 $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2$, $\eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\eta_1$ 和 $\eta_2$ 都是实数.则上两式又可写成

$$\chi_W(\eta_1,\eta_2) = \mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta_1\hat{a}_1+\eta_2\hat{a}_2)}\hat{\rho}], \tag{5.5.18a}$$

$$W(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)}\chi_W(\eta_1,\eta_2)\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2, \tag{5.5.18b}$$

(5.5.18b)即通常的双变量的傅里叶变换形式.(5.5.17)式的逆变换为

$$\chi_W(\eta) = \int W(\alpha)\mathrm{e}^{\frac{i}{2}(\eta\alpha^*+\eta^*\alpha)}\mathrm{d}^2\alpha, \tag{5.5.19}$$

此式亦可写成

$$\chi_W(\eta_1,\eta_2) = \int W(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta_1\alpha_1+\eta_2\alpha_2)}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2. \tag{5.5.20}$$

将(5.5.18b)式对 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 积分,再利用(5.5.18a)式可得

$$\int W(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2 = \mathrm{tr}\hat{\rho} = 1. \tag{5.5.21}$$

如果在(5.5.18a)式代入(5.5.18b)式后,只对 $\alpha_1$ 积分,则可得出[①] $\int W(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{d}\alpha_1$ 等于 $\langle\alpha_2|\hat{\rho}|\alpha_2\rangle$,其中 $|\alpha_2\rangle$ 为 $\hat{a}_2$ 的本征态,其本征值正好等于 $\alpha_2$.从而 $\langle\alpha_2|\hat{\rho}|\alpha_2\rangle$ 代表对该光场测量 $\hat{a}_2$ 时得出数值为 $\alpha_2$ 的概率密度.反过来,若将对 $\alpha_1$ 的积分换成对 $\alpha_2$ 的积分,亦得出类似的结果.从上面的讨论,我们看到,$W(\alpha_1,$

① 先将单位算符的展式 $\int|\alpha'_2\rangle\langle\alpha'_2|\mathrm{d}\alpha'_2$(亦即(5.2.25b)式左方)插在(5.5.18a)式中算符 $\hat{\rho}$ 的前面,再进行推导,即可得出这一结果.

$\alpha_2$)中的 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 原本为 $\alpha$ 的实部和虚部，并非就是 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 的本征值(实际上，$\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 不可能同时有本征值)，但是在对其中一个如 $\alpha_1$ 积分以后，剩下的 $\alpha_2$ 的意义即成为 $\hat{a}_2$ 的本征值.

在上节中讨论的"$P$ 表示函数"$P(\alpha)$也是一种分布函数，它所对应的特征函数为

$$\chi_P(\eta) = \mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}\hat{\rho}]. \tag{5.5.22}$$

由于方括号内所含的 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$ 是正规编序的，故 $\chi_P(\eta)$被称为正规序的特征函数.不难证明在 $P$ 表示存在的情况下，上述 $\chi_P(\eta)$与 $P(\alpha)$之间是傅里叶变换关系.这是因为 $P$ 表示存在时，$\hat{\rho}$可表示为

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha)\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid \mathrm{d}^2\alpha,$$

将它代入(5.5.22)式就得出 $\chi_P(\eta)$为 $P(\alpha)$的傅里叶变换：

$$\chi_P(\eta) = \int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\langle\alpha\mid \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}}\mid\alpha\rangle = \int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\alpha^*+\eta^*\alpha)}. \tag{5.5.23}$$

写成分量形式即为

$$\chi_P(\eta_1,\eta_2) = \int \mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2 P(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta_1\alpha_1+\eta_2\alpha_2)}.$$

(5.5.23)式的逆变换具有下述形式：

$$P(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2}\int \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\eta^*+\alpha^*\eta)}\chi_P(\eta)\mathrm{d}^2\eta. \tag{5.5.24}$$

$\chi_P(\eta)$中自变量虽写为 $\eta$，实际上有两个独立变量 $\eta_1$ 和 $\eta_2$，通过 $\eta_1 = \frac{1}{2}(\eta+\eta^*)$，$\eta_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\eta-\eta^*)$即可将 $\chi_P$ 表示成 $\eta$ 和 $\eta^*$ 的函数.(5.5.22)式右方即显示出这种依赖关系.我们将 $\eta$ 和 $\eta^*$ 作为独立变量来对(5.5.22)式两侧微商，即可得出

$$\mathrm{tr}[(\hat{a}^\dagger)^m\hat{a}^n\hat{\rho}] = -(2\mathrm{i})^{m+n}\left.\frac{\partial^{m+n}\chi_P(\eta,\eta^*)}{\partial\eta^m\partial\eta^{*n}}\right|_{\eta=\eta^*=0}, \tag{5.5.25}$$

因此通过 $\chi_P$ 可以立即得出 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$"正规序积"的矩.

另外一个特征函数为

$$\chi_Q(\eta) = \mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\hat{\rho}]. \tag{5.5.26}$$

在上式右方的方括号中，$\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 是反正规序的，因而仿(5.5.25)式，对 $\chi_Q(\eta)$进行微商可求出 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$反正规序积的矩：

$$\operatorname{tr}[\hat{a}^m(\hat{a}^\dagger)^n\hat{\rho}] = (-2\mathrm{i})^{m+n}\left.\frac{\partial^{m+n}\chi_Q(\eta,\eta^*)}{\partial\eta^{*m}\partial\eta^n}\right|_{\eta=\eta^*=0}. \tag{5.5.27}$$

故 $\chi_Q$ 称为反正规序的特征函数. 下面来求它所对应的分布函数. 为此我们将 1 按 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 的分解式$\left(即\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\right)$插在(5.5.26)式右方两个指数函数之间, 即得出

$$\chi_Q(\eta) = \operatorname{tr}\left[\int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{\frac{i}{2}(\eta^*\alpha+\eta\alpha^*)}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{\rho}\right] = \int d^2\alpha e^{\frac{i}{2}(\eta^*\alpha+\eta\alpha^*)}Q(\alpha), \tag{5.5.28}$$

其中

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle. \tag{5.5.29}$$

称为 $\hat{\rho}$的 $Q$ 表示.

我们看到 $Q(\alpha)$正比于光场密度算符在相干态$|\alpha\rangle$上的投影$\left(带有因子\frac{1}{\pi}\right)$, 需要指出的是, 由于相干态不是正交集合, 故即使光场为 $\hat{a}$的本征值等于 $\alpha_0$ 的相干态, 它在其他$|\alpha\rangle$上的投影亦不为零. (5.5.28)式的逆变换亦不难得出, 结果为

$$Q(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2}\int e^{-\frac{i}{2}(\alpha\eta^*+\alpha\eta^*)}\chi_Q(\eta)d^2\eta. \tag{5.5.30}$$

我们在前面已经指出, 密度算符可由它在相干态中的对角元来定出. 因由 $\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$可求出 $\hat{\rho}$的全纯表示对角元 $\rho(\alpha^*,\alpha)$[参见(5.4.42)第二式], 再将其中 $\alpha$ 换成$\beta$ 即可得出全纯表示$\rho(\alpha^*,\beta)$, 从而决定 $\hat{\rho}$. 下面还将给出通过 $Q(\alpha)$先求出$\chi_Q(\eta)$来定出 $\hat{\rho}$的公式.

$Q(\alpha)$也是实函数. 将(5.5.29)式对 $d^2\alpha$ 积分, 还可得出它满足归一化条件

$$\int Q(\alpha)d^2\alpha = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\operatorname{tr}(\hat{\rho}\,|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \operatorname{tr}\hat{\rho} = 1. \tag{5.5.31}$$

这样, 三个分布函数 $P(\alpha)$、$W(\alpha)$和 $Q(\alpha)$都是实函数, 也都是归一的.

上述三个特征函数之间实际上存在着简单的关系, 利用 Bakes-Hausdorff 公式(5.2.9), 即可得出

$$e^{\frac{i}{2}(\eta\hat{a}^\dagger+\eta^*\hat{a})} = e^{-\frac{1}{8}|\eta|^2}e^{\frac{i}{2}\eta\hat{a}^\dagger}e^{\frac{i}{2}\eta^*\hat{a}} = e^{\frac{1}{8}|\eta|^2}e^{\frac{i}{2}\eta^*\hat{a}}e^{\frac{i}{2}\eta\hat{a}^\dagger}.$$

于是有

$$\chi_W(\eta) = e^{-\frac{1}{8}|\eta|^2}\chi_P(\eta),\quad \chi_Q(\eta) = e^{-\frac{1}{8}|\eta|^2}\chi_W(\eta). \tag{5.5.32}$$

由于上述关系, (5.5.17)式右方无穷积分的收敛性要比(5.5.24)式的要好, 而(5.5.30)式右方无穷积分的收敛性又比(5.5.17)式的要好.

下面再来对 $W(\alpha)$和 $Q(\alpha)$的行为进行研究.首先,我们可从 $\chi_W(\eta)$的定义式得出其绝对值大小的知识.为此将 $\hat{\rho}$的对角形式(5.4.17)代入(5.5.16)式得

$$\chi_W(\eta) = \sum P_l < l \mid e^{\frac{i}{2}(\eta^* \hat{a} + \eta \hat{a}^\dagger)} \mid l \rangle, \tag{5.5.33}$$

其中 $e^{\frac{i}{2}(\eta^* \hat{a} + \eta \hat{a}^\dagger)}$为幺正算符,而一个幺正算符的任一矩阵元的绝对值都小于(至多等于)1[①].于是$|\chi_W(\eta)| \leqslant \sum_l P_l$,即$|\chi_W(\eta)| \leqslant 1$.这样 $W(\alpha)$对于一切光场都是存在的,而且其奇异性不超过 δ 函数.

至于 $Q(\alpha)$,可以证明它为有限的实数而且$\geqslant 0$.因为用 $\hat{\rho}$的对角形式(5.4.17)代入 $Q(\alpha)$的定义式即得

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle \alpha \mid \hat{\rho} \mid \alpha \rangle = \frac{1}{\pi}\sum P_l \langle \alpha \mid l \rangle \langle l \mid \alpha \rangle = \frac{1}{\pi}\sum_l P_l \mid \langle \alpha \mid l \rangle \mid^2.$$

于是 $Q(\alpha)$将小于或等于$\frac{1}{\pi}\sum_l P_l$,从而

$$0 \leqslant Q(\alpha) \leqslant \frac{1}{\pi}. \tag{5.5.34}$$

$P(\alpha)$的情况则不同.虽然 $\chi_P(\eta)$总是存在的,但由于它等于 $e^{\frac{1}{8}|\eta|^2}\chi_W(\eta)$,当$\eta \to \infty$时可能高度发散,从而使(5.5.24)式的积分失去意义(高度奇异).

在(5.4.16)式的下面,我们已经指出,对于正规序的乘积,其期望值可以方便地用 $P(\alpha)$表示出来,使 $P(\alpha)$具有"正规序乘积所代表的物理量"的分布函数的意义:

$$\mathrm{tr}(\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n\hat{\rho}) = \int \alpha^{*m}\alpha^n P(\alpha)\mathrm{d}^2\alpha. \tag{5.5.35a}$$

同样,对反正规序的乘积,$Q(\alpha)$具有分布函数意义,因为通过插入$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathrm{d}^2\alpha$即得

$$\mathrm{tr}(\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger n}\hat{\rho}) = \mathrm{tr}(\hat{a}^m \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid \hat{a}^{\dagger n}\hat{\rho}) = \int \alpha^m\alpha^{*n}Q(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{5.5.35b}$$

顺便指出,上节(5.4.52b)中的 $\chi_P(k_1, k_2)$即为 $P(\alpha)$的特征函数,而(5.4.52a)式中的 $\rho(k_1, k_2)$只与 $\chi_Q$ 差一个因子$\frac{1}{\pi}$.

---

① 如以 $\hat{U}$代表 $e^{\frac{i}{2}(\eta^* \hat{a} + \eta \hat{a}^\dagger)}$,则有$\sum_{l'} |\langle l \mid \hat{U} \mid l' \rangle|^2 = \sum_{l'} \langle l \mid \hat{U} \mid l' \rangle \langle l \mid \hat{U}^\dagger \mid l' \rangle = \langle l \mid \hat{U}\hat{U}^\dagger \mid l \rangle = \langle l \mid l \rangle = 1$.因此$|\langle l \mid \hat{U} \mid l' \rangle|^2 \leqslant 1$,$|\langle l \mid \hat{U} \mid l' \rangle| \leqslant 1$.

### 3. 密度算符用特征函数的表示

光场的特征函数能给出光场状态的全部知识.本小节将阐明,密度算符 $\hat{\rho}$ 可以通过它直接表示出来.为此我们来求(5.5.16)、(5.5.22)和(5.5.26)等式的反演.先来看 $\chi_Q(\eta)$ 的反演.我们将证明结果就是

$$\hat{\rho}=\frac{1}{4\pi}\int\chi_Q(\eta)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}\mathrm{d}^2\eta. \tag{5.5.36}$$

对比(5.5.26) 式,此式更相似于傅里叶变换.在(5.5.26) 式中,由于右方是算符的积左方为 $C$ 数函数,故二维积分为 tr 所取代.另外要注意的是,在(5.5.26) 式中,$\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 是反正规序的,而在反演式(5.5.36) 式中则是正规序的,这样求出的 $\hat{\rho}$ 将具有 $\sum\limits_{m,n}\alpha_{mn}(\hat{a}^\dagger)^m\hat{a}^n$ 的形式.

为了证明(5.5.36) 式是正确的解,首先我们将它代入(5.5.26) 式右方以确证即可化出 $\chi_Q(\eta)$. 为此先将(5.5.26) 式右方写成 $\mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\hat{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}]$, 然后将(5.5.36) 式中的积分变量 $\eta,\eta^*$ 换成 $\zeta,\zeta^*$ 并代入其中,并在方括号最后处插入 1 用 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 的分解式 $\frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|$,即得出

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\hat{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}]&=\frac{1}{4\pi^2}\int\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\int\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\chi_Q(\eta_1,\eta_2)\\&\quad\cdot\langle\alpha\mid\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\hat{a}^\dagger-\zeta\hat{a}^\dagger)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\zeta^*\hat{a}-\eta^*\hat{a})}\mid\alpha\rangle\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\int\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\chi_Q(\eta_1,\eta_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta_1-\zeta_1)\alpha_1+\mathrm{i}(\eta_2-\zeta_2)\alpha_2}\\&=\chi_Q(\eta).\end{aligned} \tag{5.5.37}$$

其次我们再说明它是唯一的解.因为若两个 $\hat{\rho}$ 都给出同样的 $\chi_Q(\eta)$,那就意味它们在相干态上的对角元 $\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$ 也相同[参见(5.5.30)式,因 $\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle=\pi Q(\alpha)$].前已指出由 $\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$ 可以完全决定 $\hat{\rho}$.这就表明(5.5.36)式是唯一的解.

有了(5.5.36)式再利用 $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{8}|\eta|^2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\hat{a}^\dagger+\eta^*\hat{a})}$ 和(5.5.32)第二式,立即得出 $\hat{\rho}$ 用维格纳特征函数表示的公式:

$$\hat{\rho}=\int\chi_W(\eta)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\hat{a}^\dagger+\eta^*\hat{a})}\frac{\mathrm{d}^2\eta}{4\pi}. \tag{5.5.38}$$

同样,从上式还可以得出(至少在形式上)

$$\hat{\rho}=\int\chi_P(\eta)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\frac{\mathrm{d}^2\eta}{4\pi}. \tag{5.5.39}$$

但由于 $\chi_P(\eta)$ 在 $|\eta|\to\infty$ 时可能高度发散,使上式可能只有形式上的意义.

(5.5.38)和(5.5.39)式右方与(5.5.36)式一样也具有傅里叶变换的形式,但它们变换核中的算符具有不同的排序.导致了要采用不同的特征函数作为傅里叶系数才得出同一个 $\hat{\rho}$.

顺便指出,若将$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|$插入到(5.5.39)式两个指数函数之间.再利用(5.5.24)式即可化出 $\hat{\rho}$ 用 $P(\alpha)$ 的表达式

$$\hat{\rho}=\int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

对于具有量子特征的光场,$P(\alpha)$通常太奇异从而失去意义.这时应该采用$W(\alpha)$或 $Q(\alpha)$.具体一些实例的 $P(\alpha)$,$W(\alpha)$和 $Q(\alpha)$将在下一小节介绍.

**4. 几个具体实例**

(1) 单模相干态　设此相干态的本征值为 $\alpha_0$,于是 $\hat{\rho}=|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$.相应的 $Q$ 表示即为

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle=\frac{1}{\pi}|\langle\alpha|\alpha_0\rangle|^2=\frac{1}{\pi}e^{-|\alpha-\alpha_0|^2},\qquad(5.5.40)$$

上式右方也可写成$\frac{1}{\pi}e^{-(\alpha_1-\alpha_{10})^2-(\alpha_2-\alpha_{20})^2}$.它是 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的解析函数,而且其值在0与$\frac{1}{\pi}$之间,在$|\alpha_1|$和$|\alpha_2|\to\infty$时趋于零.通过傅里叶变换不难求出

$$\chi_Q(\eta_1,\eta_2)=e^{-\frac{1}{4}|\eta|^2+\frac{i}{2}(\eta\alpha_0^*+\eta^*\alpha_0)}.\qquad(5.5.41)$$

从(5.5.32)第二式及上式可得

$$\chi_W(\eta)=e^{-\frac{1}{8}|\eta|^2+\frac{i}{2}(\eta\alpha_0^*+\eta^*\alpha_0)},\qquad(5.5.42)$$

通过傅里叶变换可得

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}e^{-2|\alpha-\alpha_0|^2}.\qquad(5.5.43)$$

它也是 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的解析函数,在$|\alpha_1|$和$|\alpha_2|\to\infty$时也趋于零,但变化比 $Q(\alpha)$要更急剧些.

如果对象不是单模光场而是谐振子,我们可在上式中用 $q$ 和 $p$ 代替 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$:

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q,\qquad\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p.\qquad(5.5.44)$$

于是 $d\alpha_1 d\alpha_2=\frac{1}{2\hbar}dp dq$.这时该谐振子的维格纳分布函数形如

$$W(p,q)=\frac{1}{\pi\hbar}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(q-q_0)^2-\frac{1}{m\hbar\omega}(p-p_0)^2},\qquad(5.5.45)$$

即动量和坐标都分布在 $p_0$ 和 $q_0$ 附近,$p_0$ 和 $q_0$ 代表动量和坐标的平均值,由 $\alpha_{10}$ 和 $\alpha_{20}$ 通过(5.5.44)式决定.对 $p$ 积分后得出

$$W(q)=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{\hbar}(q-q_0)^2}, \tag{5.5.46}$$

与(5.2.48)式中所给出的 $|f_\alpha(q,t)|^2$ 一致,只是在这里,$\bar{q}(t)$ 取了固定值 $q_0$.同样,(5.5.45)式对 $q$ 积分后得出的 $W(p)$ 亦为一个以 $p_0$ 为中心的高斯分布,如§5.2所述.

从 $\chi_W(\eta)$ 立即可求出 $\chi_P(\eta)$:

$$\chi_P(\eta)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\alpha_0^*+\eta^*\alpha_0)}. \tag{5.5.47}$$

通过傅里叶变换即求出

$$P(\alpha_1,\alpha_2)=\delta(\alpha_1-\alpha_{10})\delta(\alpha_2-\alpha_{20})\equiv\delta^{(2)}(\alpha-\alpha_0). \tag{5.5.48}$$

这一结果是显然的,因当初就设定 $\hat{\rho}=|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$.

(2) 单模光子数本征态　这时 $\hat{\rho}=|n\rangle\langle n|$,于是 $Q$ 表示为

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}|\langle\alpha|n\rangle|^2=\frac{|\alpha|^{2n}}{\pi n!}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}=\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^n}{\pi n!}\mathrm{e}^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}. \tag{5.5.49}$$

同样是"行为良好"的 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的解析函数,其值亦在 0 与 $\frac{1}{\pi}$ 之间(因 $\frac{1}{n!}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^n$ 对所有 $n$ 求和才等于 $\mathrm{e}^{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$).当 $|\alpha_1|$ 和 $|\alpha_2|\to\infty$ 时 $Q(\alpha)$ 趋于零.相应的特征函数为

$$\chi_Q(\eta)=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\eta_1^2+\eta_2^2)}. \tag{5.5.50}$$

与 $P$ 表示相应的特征函数可通过上式求出,更方便的是从其定义式来求:

$$\begin{aligned}\chi_P(\eta)&=\langle n|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\hat{a}}|n|\rangle\\&=\left\langle n\left|\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\eta\right)^l\hat{a}^{\dagger l}\right]\left[\sum_{l'=0}^{\infty}\frac{1}{l'!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\eta^*\right)^{l'}\hat{a}^{l'}|n\right]\right.\right\rangle\\&=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}C_l^n\left(-\frac{1}{4}\eta^*\eta\right)^l.\end{aligned} \tag{5.5.51}$$

此式表明,当 $|\eta|^2\to\infty$ 时,$\chi_P(\eta)$ 以 $|\eta|^{2n}$ 发散.相应的 $P(\alpha)$ 为高度奇异的函数

$$P(\alpha)=\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{4^l l!}C_l^n\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)^l\delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2). \tag{5.5.52}$$

计算 $P(\alpha)$ 的另一种较直接方法是将 $\hat{\rho}$ 的 $P$ 表示公式(5.4.43)代到 $\langle-\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$ 中,结果得出

$$\langle-\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle=\int\mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\langle-\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle=\mathrm{e}^{-|\beta|^2}\int[P(\alpha)\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}]\mathrm{e}^{\beta\alpha^*-\beta^*\alpha}\mathrm{d}^2\alpha.$$

这表明$\langle -\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle e^{|\beta|^2}$为$P(\alpha)e^{-|\alpha|^2}$的傅里叶变换.通过反变换即求出

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2}e^{|\alpha|^2}\int\langle -\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle e^{|\beta|^2-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha}d^2\beta. \tag{5.5.53}$$

将$\hat{\rho}$用$|n\rangle\langle n|$代入即可求出$P(\alpha)$的一个较简洁的表达式

$$P(\alpha) = \frac{(-1)^n}{\pi^2 n!}e^{|\alpha|^2}\int|\beta|^{2n}e^{-\beta\alpha^{*\dagger}\beta^*\alpha}d^2\beta = \frac{1}{4^n n!}e^{|\alpha|^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)^n\delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2). \tag{5.5.54}$$

在$n>0$时,上式具有高度奇异性使$P(\alpha)$失去意义,因而粒子数本征态为特征量子光场.

从(5.5.51)式立即可得出

$$\chi_W(\eta) = \sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l!4^l}C_l^n(\eta_1^2+\eta_2^2)^l e^{-\frac{1}{8}(\eta_1^2+\eta_2^2)}, \tag{5.5.55}$$

相应的维格纳分布函数为

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}(-1)^n e^{-2|\alpha|^2}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{(l!)^2(n-l)!}(-4|\alpha|^2)^l. \tag{5.5.56}$$

我们看到它是行为良好的$\alpha_1$和$\alpha_2$的解析函数,在$|\alpha_1|$和$|\alpha_2|$趋于无穷时趋于零.

如果对象不是单模光场而是谐振子,则通过对应关系(5.5.44)可将上式写成$W(p,q)$.这时$|n\rangle$代表第$n$个能级.为具体起见,我们看$n=1$即第一激发态的情况,这时

$$W(p,q) = \frac{1}{\pi\hbar}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}q^2+\frac{2}{m\hbar\omega}p^2-1\right)e^{-\frac{m\omega}{\hbar}q^2-\frac{1}{m\omega\hbar}p^2}.$$

由上式可见,当$q$和$p$都很小时,$W$取负值.当$q^2$和$p^2$足够大(即$\frac{2m\omega}{\hbar}q^2+\frac{2}{m\hbar\omega}p^2>1$)以后就一直保持为正,在$q^2\to\infty$或$p^2\to\infty$时$W$趋于零.

若将上式对$p$积分,结果为

$$W(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}q^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}q^2},$$

与量子力学中得出的第一激发态的波函数一致.

(3) 单模混杂光场 前已求出在光子数表象中[参见(5.4.36)式及(5.4.38)式下面说明]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\langle n\rangle+1}\sum_n\left(\frac{\langle n\rangle}{\langle n\rangle+1}\right)^n|n\rangle\langle n|, \tag{5.5.57}$$

于是即得出

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\langle n\rangle+1}e^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle n\rangle+1}}. \tag{5.5.58}$$

显然其值亦在 0 与$\frac{1}{\pi}$之间. 相应的特征函数不难通过傅里叶变换求出. 结果为

$$\chi_Q(\eta) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\langle n\rangle+1)|\eta|^2}. \tag{5.5.59}$$

通过 $\chi_Q$ 即可求出 $\chi_W$ 和 $\chi_P$,它们分别为

$$\chi_W(\eta) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(\langle n\rangle+\frac{1}{2}\right)|\eta|^2}, \tag{5.5.60}$$

$$\chi_P(\eta) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\langle n\rangle|\eta|^2}. \tag{5.5.61}$$

通过傅里叶变换不难求出

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi\left(\langle n\rangle + \frac{1}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle n\rangle+\frac{1}{2}}}, \tag{5.5.62}$$

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle}\mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle n\rangle}}. \tag{5.5.63}$$

我们看到在这种状态,$P(\alpha)$是一个行为好的函数,无奇异性而且恒大于零. 故它具有准概率密度的意义. 这种高斯分布的光通常是由大量幅值相当、但位相无关联的众多波包所合成,因而具有类似于无规行走或布朗运动的位移的分布(两者的位移都具有高斯分布). 这种光的强度$|\alpha|^2$ 在零点的概率最大,强度增加时,概率呈指数下降. 这表明它是一种品质不好(强度涨落大)的光场.

**5. 正 *P* 表示**

分布函数在量子光学理论中有着重要应用,因为密度算符 $\hat{\rho}$所满足的算符方程可以转化为分布函数的偏微分方程. 它是一个 $C$ 数方程,比较容易处理. 当所研究的光场为开放系统(即与周围环境有相互作用)时,$\hat{\rho}$所满足的方程通常称为主方程(见§6.4 和§6.5). 通过主方程所得出的 $P$ 表示、$W$ 表示和 $Q$ 表示的偏微分方程虽然相似于福克尔-普朗克方程,但并不一定是真正的福克尔-普朗克方程,因其中的扩散矩阵并非总是半正定的①. 我们希望能找到一个新的表示,它所满足偏微分方程总是真正的福克尔-普朗克方程,具有半正定的扩散矩阵. 这一性质具有重要意义,因为真正的福克尔-普朗克方程能转换成一阶的随机常微分方程组,从而处理起来要方便得多(参见 Gardiner, Handbook of Stochastinc Methods, 1985; Walls and Milburn, Quantum Optics, 1995).

正 $P$ 表示就是为适用这一需要提出来的,它恒取正值,从主方程导出它的演化方程是二阶的,并具有正定的扩散矩阵,因而总是真正的福克尔-普朗克方程. 故

① 一个厄米矩阵或实对称矩阵是半正定的充分和必要条件是其本征值≥0. 一个厄米矩阵 $A$ 是半正定的,当且仅当存在一个矩阵 $B$,使得 $A=B^\dagger B$. 一个实对称矩阵 $A$ 是半正定的,当且仅当存在一个实矩阵 $B$,使得 $A=B^\mathrm{T}B$.

它是比我们前面讲过的其他表示适用范围更广的一种表示.

此表示最早由 Chaturredi,Drumond 和 Walls 于 1977 年提出来,但未给出其存在的证明(J. Phys. A. **10**,L187). 1980 年才由 Drumond 和 Gardiner 给出了所需的一般性证明(J. Phys. A. **13**,2353),见该文定理 4.

正 $P$ 表示函数 $P(\alpha,\beta^*)$ 与 $\hat{\rho}$ 的关系为

$$\hat{\rho}=\int P(\alpha,\beta^*)\frac{|\alpha\rangle\langle\beta|}{\langle\beta|\alpha\rangle}\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{d}^2\beta,\tag{5.5.64}$$

它满足归一条件

$$\int P(\alpha,\beta^*)\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{d}^2\beta=1.\tag{5.5.65}$$

通过对(5.5.64)式求迹即可证明上式. 比较(5.5.64)与(5.4.43)式可以看出正 $P$ 表示与 $P$ 表示间的差异. 另外正 $P$ 表示亦与全纯表示不同,后者亦常不满足福克尔–普朗克方程. 光子算符正规序乘积的期望值也可以通过正 $P$ 表示方便地表达出来:

$$\langle\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^{n}\rangle=\int\alpha^n\beta^{*m}P(\alpha,\beta^*)\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{d}^2\beta.$$

一般说来,(5.5.64)并不唯一地确定 $P(\alpha,\beta^*)$,于是我们可以选取它恒为正值(见下式),这时它才称作正 $P$ 表示. 在上述 Drumond 和 Gandier 的文中,曾给出正 $P$ 表示的一个表达式,它与 $Q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 只差一个函数因子:

$$P(\alpha,\beta^*)=\frac{4}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2}\left\langle\frac{\alpha+\beta}{2}\right|\hat{\rho}\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right\rangle.\tag{5.5.66}$$

由于 $Q$ 表示 $\frac{1}{\pi}\left\langle\frac{\alpha+\beta}{2}\right|\hat{\rho}\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right\rangle$ 恒为正,故上式所表达的 $P(\alpha,\beta^*)$ 亦恒为正. 另外,由于正 $P$ 表示满足真正的福克尔–普朗克方程,因而只要初值 $P(\alpha,\beta^*,t_0)$ 按(5.5.66)式取为正值,从方程解出的任何时刻的值都将保持为正.

一个具体的应用例子见附录 E.

### 6. 激光场的近似 $P$ 表示

激光场并非单纯的相干态 $|\alpha\rangle$. 它与 $|\alpha\rangle$ 的差别有两点:

(1) 它不具有确定的相位. 若将 $\alpha$ 写作 $|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则在激光场情况,$\theta$ 不具有确定值而是在 0 到 $2\pi$ 内随机分布. 在耗散过程的量子朗之万理论中这是由于涨落力所引起的相位扩散导致的结果,参见 §8.4.

下面来考察:当一个相干态的相位 $\theta$ 变得完全不确定时,密度算符的改变.

单模相干态对应的密度算符本为

$$\hat{\rho}=|\alpha\rangle\langle\alpha|=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{m!n!}}\alpha^m\alpha^{*n}|m\rangle\langle n|$$

$$=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{m!n!}}|\alpha|^{m+n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}|m\rangle\langle n|. \tag{5.5.67}$$

当相位 $\theta$ 在 0 到 $2\pi$ 之间均匀分布时,应将上式对 $\theta$ 从 0 到 $2\pi$ 积分,再除以$\frac{1}{2\pi}$,结果即为

$$\hat{\rho}'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{\rho}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_n\frac{1}{\pi!}|\alpha|^{2n}|n\rangle\langle n|. \tag{5.5.68}$$

这是一个统计混合态,算符 $\hat{a}$ 在该态的期望值为零,但光子数仍服从泊松分布.

(2) 它还叠加有一个噪音光场.

在量子光学中,当然亦可谈论两光场的叠加(不是指同一光场两个状态的叠加.参见§5.3第一小节中的思考题)并给出叠加场的表示.对于两个类经典的量子光场,其叠加场的 $P$ 表示即为原来两个光场 $P$ 表示的卷积.设原来的两个光场的 $P$ 表示分别为 $P_1(\alpha)$ 和 $P_2(\alpha)$,叠加场的 $P$ 表示即由下式表示①:

$$P(\alpha)=\int P_1(\alpha')P_2(\alpha-\alpha')\mathrm{d}^2\alpha'. \tag{5.5.69}$$

相干光场的 $P$ 表示为 $P_1(\alpha)=\delta^{(2)}(\alpha-\alpha_0)$,噪音光场(混杂光场)的 $P$ 表示由(5.5.63)式给出,为一高斯分布函数,即 $P_2(\alpha)=\frac{1}{\pi\langle n_s\rangle}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/\langle n_s\rangle}$,其中 $\langle n_s\rangle$ 为噪音光场的平均光子数,一般为一个小量,于是按(5.5.69)式即得出

$$P(\alpha)=\frac{1}{\pi\langle n_s\rangle}\mathrm{e}^{-|\alpha-\alpha_0|^2/\langle n_s\rangle}, \tag{5.5.70}$$

即中心点移到 $\alpha_0$ 的高斯分布,因而是一个恒正的无奇异性函数. $\langle n_s\rangle$ 愈小,代表噪音光场愈弱.当 $\langle n_s\rangle\to0$ 时, $P(\alpha)\to\delta^2(\alpha-\alpha_0)$.另外,不难求出,总光子数期望值 $\langle n\rangle=|\alpha|^2+\langle n_s\rangle$.

如果 $\alpha_0$ 的相位 $\theta'$ 又是在 0 到 $2\pi$ 间均匀分布,那么还应将上式对 $\theta'$ 积分并除以 $2\pi$. 利用 $\mathrm{e}^{-|\alpha-\alpha_0|^2/\langle n_s\rangle}=\mathrm{e}^{-(|\alpha|^2+|\alpha_0|^2)/\langle n_s\rangle-2|\alpha\alpha_0|\cos(\theta'-\theta)/\langle n_s\rangle}$, 以及公式 $\mathrm{I}_0(x)=$

---

① 简单论证如下:当光场为类经典光场时,其 $P(\alpha)$ 具有概率密度的意义,即 $P_1(\alpha')$ 和 $P_2(\alpha'')$ 可看成是第一、二个光场的振幅分别为 $\alpha'$ 和 $\alpha''$ 的概率密度.这样,两光场叠加后,得出振幅为 $\alpha'+\alpha''$ 的四维概率密度即为 $P_1(\alpha')P_2(\alpha'')$.将它乘上 $|\alpha'+\alpha''\rangle\langle\alpha'+\alpha''|$ 并进行积分,就得出叠加光场的密度算符为 $\hat{\rho}=\int P_1(\alpha')P_2(\alpha'')|\alpha'+\alpha''\rangle\langle\alpha'+\alpha''|\mathrm{d}^2\alpha'\mathrm{d}^2\alpha''$.再令 $\alpha=\alpha'+\alpha''$,上式即化为 $\hat{\rho}=\int P_1(\alpha')P_2(\alpha-\alpha')|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha'\mathrm{d}^2\alpha$.由此即得出(5.5.69)式.

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos(\theta'-\theta)} d\theta'$,其中 $I_0(x)$ 为第一类修正的贝塞尔函数,即得

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\langle n_s\rangle} I_0\left(\frac{2\mid \alpha\alpha_0 \mid}{\langle n_s\rangle}\right) e^{-(|\alpha|^2+|\alpha_0|^2)/\langle n_s\rangle}. \tag{5.5.71}$$

这就是所要推求的激光场的近似 $P$ 表示,它恒正($I_0(x)$的正定性可由上述积分表达式看出)并具有良好的行为. 由(5.5.71)式计算出的光子计数分布(photon counting distribution,参见§7.3)能很好地拟合对激光光场的实际测量结果(见 Freed and Haus, IEEE J. Quantum Electron. **QE 2**, 190 (1966), Magill and Soni, Phys. Rev. Lett. **16**, 911(1966)). 此结果的一个重要不足之处在于,它不能反映由于相位扩散所导致的激光谱线宽度(参见§8.6),因为(5.5.71)式只反映了相位扩散的最后效果

$$\langle \hat{a}\rangle = \mathrm{tr}(\hat{a}\,\hat{\rho}) = \int d^2\alpha P(\alpha)\langle \alpha \mid \hat{a} \mid \alpha\rangle = 0,$$

而未涉及其衰减率,而谱宽正与该因素相关.

# §5.6　纯态经典电流的量子辐射场　半经典理论的近似性问题

以上各节我们讨论了光场相干态的性质以及如何用相干态来表示一般的光场密度算符,但很少涉及到如何产生相干态,只在§5.5第6小节中提到激光场与相干态光场的关系. 本节将阐明,一个经典的交变电流所产生的量子辐射场即为标准的相干态. 本节的第二个问题是对光学中通常用的半经典理论(即光场不量子化,只对原子系统采用量子理论)的近似性问题进行讨论.

## 1. 纯态经典交变电流的量子辐射场

本节仍将采用作用图象,并取横场规范(即库仑规范). 从无线电波直到微波波段,发射电流和辐射场都可用经典理论描述. 在本节中我们先来看看,从量子场论角度,纯态经典电流的辐射场是怎样的. 经典交流电流设为 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$它是 $C$ 数(不是算符). 纯态是指它由一个确定的矢量函数来描写而不是由一组矢量函数的概率分布来描写.

在这种情况下,相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = -\frac{1}{c}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\cdot \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) d^3x. \tag{5.6.1}$$

相应的运动方程是

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mid t\rangle = \hat{H}_{\text{int}}(t)\mid t\rangle. \tag{5.6.2}$$

经典电流情况的特点在于,$\hat{H}_{\text{int}}$中只含光场的算符,从而状态矢量$|t\rangle$只有光场的自由度(不含电子或原子自由度).纯态经典电流在 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内所产生的 $\mathrm{d}|t\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\mathrm{d}t\hat{H}_{\text{int}}(t)|t\rangle$将相干地叠加到原来的$|t\rangle$上(设 $t$ 时刻光场为纯态):

$$|t+\mathrm{d}t\rangle=|t\rangle+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\mathrm{d}t\hat{H}_{\text{int}}(t)|t\rangle. \tag{5.6.3}$$

这样,只要当初($t=0$)光场为纯态(包括真空态),以后任何时刻它都保持为纯态.量子电流的情况则不同,量子电流由算符描写.态矢量$|t\rangle$则既含光场的自由度也含电子(或原子)的自由度.当 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$作用到$|t\rangle$上时,一般说来不仅改变场的状态也会改变电子(或原子)状态.对于"光场+电子系统"来说,$|t\rangle+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\mathrm{d}t\hat{H}_{\text{int}}(t)|t\rangle$虽然是纯态,但对光场这个子系统来说一般却是统计混合态(参见§5.4第2小节).具体就原子发光来说,设初始时束缚电子处于激发态 $\phi_2$,光场为真空态(此态记作$|\phi_1,0\rangle$)到 $t$ 时刻时,束缚电子有一定的概率幅跃迁到基态 $\phi_1$,并放射了一个光子(此态记作$|\phi_1,1\rangle$),于是

$$|t\rangle=a(t)|\phi_2,0\rangle+b(t)|\phi_1,1\rangle|.$$

对于光场子系统来说,其 $t$ 时刻状态将由密度算符 $\hat{\rho}(t)$表示(参见§5.4第2小节):

$$\hat{\rho}(t)=|a(t)|^2|0\rangle\langle 0|+b(t)|^2|1\rangle\langle 1|. \tag{5.6.4}$$

此式明确地表示出光场处于统计混合态.在量子电流情况,只当 $\hat{j}$在系统状态中的方差为零(或很小)时,所产生的光场才是纯态(或近纯态).

对于经典电流情况的 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$(即(5.6.1)式),方程(5.6.2)是可严格求解的.Glauber 给出了它的精确解.根据(3.2.33)和(3.2.36)式,

$$\hat{U}(t,t_0)=\mathrm{T}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}=\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_n}^{t}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}\cdots\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t_1}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}, \tag{5.6.5}$$

其中 $t_j=t_0+j\Delta t$,第一等号右方的 T 为编时算符.由于$[\hat{H}_{\text{int}}(t'),\hat{H}_{\text{int}}(t'')]$为一个 $C$ 数,故应用公式(5.2.9)可将(5.6.5)式右方第一、二个指数因子合并起来:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{c}\hbar}\int_{t_n}^{t}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t\,n-1}^{t}\hat{H}_{\text{int}}(t')\mathrm{d}t'}C(t,t_{n-1}), \tag{5.6.6}$$

其中

$$C(t,t_{n-1})=\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar^2}\int_{t_n}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t\ n-1}^{t_n}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\text{int}}(t'),\hat{H}_{\text{int}}(t'')]\right\}, \tag{5.6.7}$$

为一个 $C$ 数相因子.这样我们完成了"(5.6.5)式右方连乘积"中最左的两项的合并.仿此进行下去,即得

$$\hat{U}(t,t_0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{int}}(t')\mathrm{d}t'}. \tag{5.6.8}$$

注意,(5.6.8)与(5.6.5)式中间一式相比,已消去了编时算符 T. 相位因子 $\varphi(t)$ 由下式给出:

$$\varphi(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{i}}{2\hbar^2}\left\{\int_{t_n}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'),\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'')]\right.$$
$$\left.+\int_{t_{n-1}}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'),\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'')+\cdots]\right\}.$$

为了求出 $\varphi(t)$ 的紧致表达式,我们将上式对 $t$ 微商:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{i}}{2\hbar^2}\left\{\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t),\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'')]+\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t),\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'')]+\cdots\right\}$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{2\hbar^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t),\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'')]. \tag{5.6.9}$$

在求电流的辐射场时,通常将 $t_0$ 取为 $-\infty$,由此得出

$$\varphi(t)=\frac{\mathrm{i}}{2\hbar^2}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{t'}\mathrm{d}t''[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'),\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'')], \tag{5.6.10}$$

而 $t=-\infty$ 时光场的初始态为真空 $|0\rangle$,于是由(5.6.8)式得

$$|t\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar c}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t')\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t')\right]. \tag{5.6.11}$$

这就是所要的精确解. 下面来阐明上述状态为光场的多模相干态. 为此将 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t')$ 按平面行波的展开式(1.3.33)代入上式的指数中. 结果即为

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar c}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\cdot=\sum_{\boldsymbol{k}s}[\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}^{\dagger}\beta_{\boldsymbol{k}s}(t)-\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}\beta_{\boldsymbol{k}s}^{*}(t)], \tag{5.6.12}$$

其中

$$\beta_{\boldsymbol{k}s}(t)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{V\hbar\omega}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t')\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t'}. \tag{5.6.13}$$

将(5.6.12)式代回(5.6.11)式中即得出

$$|t\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\prod_{\boldsymbol{k}s}\mathrm{e}^{\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}^{\dagger}\beta_{\boldsymbol{k}s}(t)-\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}\beta_{\boldsymbol{k}s}^{*}(t)}|0\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\prod_{\boldsymbol{k}s}|\beta_{\boldsymbol{k}s}(t)\rangle. \tag{5.6.14}$$

上式右方为各个模相干态 $|\beta_{\boldsymbol{k}s}(t)\rangle$ 的外积. 这表明总体光场为多模相干态. 各模相干光场的"振幅"(即该模吸收算符 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}$ 的本征值)$\beta_{\boldsymbol{k}s}(t)$ 由(5.6.13)式决定. 它正比于经典电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t')$ 在模函数 $\frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t'}$ 上投影对 $t'$ 的积分(从 $-\infty$ 到 $t$). 此积分值愈大,该模的振幅就愈大. 值得注意的是在这里各模相干态的本征值 $\beta_{\boldsymbol{k}s}$ 是随

时间变化的.如果在 $t>T$ 后电流为零,则 $\beta_{ks}$ 在 $t>T$ 以后即保持不变.

以上得出辐射出的光场为相干态是由于求出了精确解.如果用微扰论来计算,则作到 $n$ 阶微扰至多能辐射 $n$ 个光子,不可能得出相干态.

在经典电动力学中,两个电流分布 $\boldsymbol{j}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{j}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)$(如两根天线上的电流)产生的辐射场是相干的,即两个源产生的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 等于它们各自产生的 $\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{A}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)$ 的和.在这里,经典电流产生的量子辐射场也有类似的结果.因为当 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{j}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{j}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)$ 时,由(5.6.13)式,

$$\beta_{ks}(t)=\beta_{ks}^{(1)}(t)+\beta_{ks}^{(2)}(t).$$

于是矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 的期望值等于两项的相干叠加

$$\langle t|\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)|t\rangle=\langle t|\hat{\boldsymbol{A}}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)|t\rangle+\langle t|\hat{\boldsymbol{A}}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)|t\rangle, \quad (5.6.15)$$

其中

$$\langle t|\hat{\boldsymbol{A}}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)|t\rangle=\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}\left[\beta_{ks}^{(1)}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\beta_{ks}^{(1)*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}\right],$$

$$\langle t|\hat{\boldsymbol{A}}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)|t\rangle=\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}\left[\beta_{ks}^{(2)}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\beta_{ks}^{(2)*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}\right].$$

(5.6.16)

如果用两台均工作在远离阈值之上的激光器($A$,$B$)来代替上述天线,并假设它们都产生量子相干态光场,那么按照上面的推导亦将产生相干叠加现象,从而出现干涉条纹.如果我们把光子看成是量子力学中的粒子,那么"从两个激光器中分别发出的"两个光子的波函数是不能发生干涉的(因为量子叠加是一个客体的两个状态或几个状态的叠加,二个客体的状态是不能叠加的).因此只能说(用狄拉克语言):每个光子是部分地从 $A$ 激光器、部分地从 $B$ 激光器发出的.而这个结论对于两个有一定距离并有各自的运转系统的激光器来说,从物理上是比较难接受的,但若从量子场论的观点来看,就比较容易接收了.因为客体就是一个,即电磁场.激光器的作用是将场激发到某个状态.上述干涉现象就是同一客体(电磁场)的两个状态的叠加所造成的.两个激光器所产生光场的干涉现象 20 世纪 60 年代就已在实验上观察到,见 Magyan and Mandel, Nature, **198**, 255(1963); Pfleeger and Mandel, Phys. Rev. **159**, 1084(1967).

## 2. 半经典理论的近似性问题

在量子力学和光学中,半经典理论有着广泛的应用.所谓的半经典理论是指对原子(或电子)要用量子理论,而对光场则用经典理论.简单的半经典理论只将原子(或电子)作为动力学系统,光场取为已知的经典函数.我们先来看这种简单的情况,并从全量子理论的角度看它的近似性.

在作用图象中,半经典理论的运动方程为

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} | t \rangle = \hat{H}_{\text{int}}^{(sc)}(t) | t \rangle, \tag{5.6.17a}$$

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(sc)}(t) = -\frac{1}{c}\int \hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{x},t). \tag{5.6.17b}$$

其中$\mathscr{A}(\boldsymbol{x},t)$为矢量 $C$ 函数.因而 $\hat{H}_{\text{int}}^{(sc)}$ 只含原子算符,态矢量$|t\rangle$中也只含原子自由度.情况与第一小节正相反.

对于光学中所常用的光场,其密度矩阵都具有 $P$ 表示,而且 $P(\alpha)$具有良好的行为(恒正,奇异性不超过 δ 函数),可赋予准概率密度的意义,这时我们可只讨论光场为纯态相干光的情况.一般情况下的结果只需将纯相干态光场的结果用$P(\alpha)$来作平均即可得出.

设原子系统初始状态为$|R_0\rangle$,光场为多模相干态$|\{\alpha_{ks}\}\rangle$,$\{\alpha_{ks}\}$代表所有模的 $\alpha$ 值的集合(参见 §5.2 第 4 小节).整个系统初始的全量子状态即为

$$|R_0,\{\alpha_{ks}\}\rangle = |R_0\rangle \prod_{ks}\hat{D}(\alpha_{ks})|0\rangle = \hat{D}\,|R_0,0\rangle. \tag{5.6.18}$$

上式中的$|0\rangle$指光场的真空态,$\hat{D}=\prod_{ks}\hat{D}(\alpha_{ks})$,其中 $\hat{D}(\alpha_{ks})$ 为($\boldsymbol{k}s$)模的平移算符[参见(5.2.11) 式]:

$$\hat{D}(\alpha_{ks}) = \mathrm{e}^{\alpha_{ks}\hat{a}_{ks}^{\dagger}-\alpha_{ks}^{*}\hat{a}_{s}^{k}}. \tag{5.6.19}$$

在全量子理论中,系统在任何时刻的状态可用作用图象中的演化算符表示出来:

$$|t\rangle = \hat{U}(t,t_0)|R_0,\{\alpha_{ks}\}\rangle = \left[1+\frac{1}{\mathrm{c}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\hat{H}_{\text{int}}(t_1)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\text{int}}(t_1)\hat{H}_{\text{int}}(t_2)+\cdots\right]|R_0\{\alpha_{ks}\}\rangle, \tag{5.6.20}$$

其中 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$为全量子理论中的相互作用哈密顿量.

用(5.6.18)式中的算符 $\hat{D}$来对 $\hat{H}_{\text{int}}$作变换:

$$\hat{H}'_{\text{int}}(t) = \hat{D}^{-1}\hat{H}_{\text{int}}(t)\hat{D}. \tag{5.6.21}$$

其中 $\hat{H}'_{\text{int}}(t)$为变换后的算符.上式给出 $\hat{H}_{\text{int}}(t)=\hat{D}\hat{H}'_{\text{int}}(t)\hat{D}^{-1}$,将它代入到(5.6.20)式中右方,并令

$$|t\rangle' = \hat{D}^{-1}|t\rangle, \tag{5.6.22}$$

则$|t'\rangle$的演化即为

$$|t\rangle' = \left[1+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\hat{H}'_{\text{int}}(t_1)\right.$$

$$+\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}'_{\mathrm{int}}(t_1)\hat{H}'_{\mathrm{int}}(t_2)+\cdots\Big]|R_0,0\rangle$$

$$=\hat{U}'(t,t_0)\,|\,R_0,0\rangle. \tag{5.6.23}$$

以上做法即为通过幺正变换转到一个新的表象.在此新表象中,初态已变成 $|R_0,0\rangle$,相互作用哈密顿量已变成 $\hat{H}'_{\mathrm{int}}(t)$.在通过新表象求出 $|t'\rangle$ 后,再通过 $\hat{D}$ 的作用即可得出原来的 $|t\rangle$.

下面来求 $\hat{H}'_{\mathrm{int}}(t)$ 的具体形式.不难证明:在上述幺正变换下,$\hat{a}_{ks}$ 平移一个常数 $\alpha_{ks}$,$\hat{a}^{\dagger}_{ks}$ 平移一个常数 $\alpha^*_{ks}$,即

$$\hat{D}^{-1}\hat{a}_{ks}\hat{D}=\hat{D}^{-1}(\alpha_{ks})\hat{a}_{ks}\hat{D}(\alpha_{ks})=\hat{a}_{ks}+\alpha_{ks}, \tag{5.6.24a}$$

$$\hat{D}^{-1}\hat{a}^{\dagger}_{ks}\hat{D}=\hat{D}^{-1}(\alpha_{ks})\hat{a}^{\dagger}_{ks}\hat{D}(\alpha_{ks})=\hat{a}^{\dagger}_{ks}+\alpha^*_{ks}. \tag{5.6.24b}$$

我们只须证明(5.6.24a)式,因(5.6.24b)式为该式的厄米共轭.首先,$\hat{D}$ 为各个模平移算符 $\hat{D}(\alpha_{ks})$ 的外乘,而每个模的平移算符与其他模的 $\hat{a}$ 相对易,这样就得出其中的第一等式.下面再来证第二等式.为书写简便,略去脚标 $ks$.我们可利用 Baker-Hansdorff 公式将 $\hat{D}(\alpha)$ 和 $\hat{D}^{-1}(\alpha)$ 写成[参见(5.2.9)式]

$$\hat{D}(\alpha)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}}, \tag{5.6.25a}$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{a}^{\dagger}}\mathrm{e}^{\alpha^*\hat{a}}. \tag{5.6.25b}$$

于是有

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\,\hat{D}(\alpha)=\mathrm{e}^{-\alpha\hat{a}^{\dagger}}\hat{a}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}}. \tag{5.6.26}$$

而对于任意两个算符 $\hat{b}_1$ 和 $\hat{b}_2$,有下述公式(Baker-Campbell-Hausdorff 变换):

$$\mathrm{e}^{-\alpha\hat{b}_1}\hat{b}_2\mathrm{e}^{\alpha\hat{b}_1}=\hat{b}_2-\alpha[\hat{b}_1,\hat{b}_2]+\frac{1}{2!}\alpha^2[\hat{b}_1,[\hat{b}_1,\hat{b}_2]]+\cdots. \tag{5.6.27}$$

取其中 $\hat{b}_1=\hat{a}^{\dagger}$,$\hat{b}_2=\hat{a}$,即得出

$$\mathrm{e}^{-\alpha\hat{a}^{\dagger}}\hat{a}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}}=\hat{a}+\alpha. \tag{5.6.28}$$

此即(5.6.24a)式.取厄米共轭即得出(5.6.24b)式.将(5.6.24)中两式用到(5.6.21)式,其中 $\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)=-\frac{1}{c}\int\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x$.我们就可以求出 $\hat{H}'_{\mathrm{int}}(t)$,结果如下:

$$\hat{H}'_{\mathrm{int}}(t)=-\frac{1}{c}\int\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x-\frac{1}{c}\int\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x, \tag{5.6.29}$$

其中 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x},t)$ 为矢量 $C$ 函数

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}\left[\alpha_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+\alpha_{ks}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega t}\right].\qquad(5.6.30)$$

我们看到所引入的幺正变换 $\hat{D}^{-1}$ 把总系统初态中的量子相干光场变成了真空[见(5.6.18)式],而同时却在相互作用哈密顿量中多出了原子与给定的经典光场$\mathscr{A}$相作用的一项[即(5.6.29)式右方第一项].此项即半经典理论中的 $\hat{H}_{\text{int}}^{(\mathrm{sc})}(t)$.

如果在初态$|R_0,0\rangle$随后的演化中,(5.6.29)第一项不重要,那么$|t'\rangle$中原子自由度部分就等于半经典理论中求出的$|R(t)\rangle=\hat{U}^{(\mathrm{sc})}(t,t_0)R_0\rangle$,$\hat{U}^{(\mathrm{sc})}(t,t_0)$为半经典理论中的演化算符.态矢量中光场部分仍为真空,没有变化(换句话说,在略去(5.6.29)式右方第二项后,实际上可将光场自由度从系统总状态中撇开不管).在这种简单的半经典理论中,光场只作为给定的外场引起原子能级的跃迁.

当我们处理的是原子由于受到光场作用而跃迁到较高能级的问题(对应于吸收跃迁)时,在最低的微扰论近似中,(5.6.29)式右方第二项对 $S$ 矩阵元的贡献为零.于是全量子理论[即不略去(5.6.29)式右方第二项]的结果,就与半经典理论[即略去(5.6.29)式右方第二项]没有差别.这表明在初级微扰论中,对于原子由于吸收而跃迁到较高能级的问题,半经典理论总给出正确的结果,并不要求$|\alpha_{ks}|$大.只在高阶微扰计算中两者才有差别,这时只当$|\alpha_{ks}|$大时才能忽略(5.6.29)式第一项所引起的修正.

对于原子由于光场的作用而跃迁到较低能级的过程(对应于发光跃迁),(5.6.29)式右方第一项所贡献的 $S$ 矩阵元即为受激辐射部分,而右方第二项所贡献的则是自发辐射部分.半经典理论略去了自发辐射的贡献.

以上所讨论的是简单的半经典理论,它不涉及光场的变化.完整的半经典理论是把(5.6.17)式与经典电磁势$\mathscr{A}(\boldsymbol{x},t)$的方程联立起来求解,该方程中的电流就采用电流算符 $\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x},t)$的期望值.这样就把光场的动力学也包括了进来,人们可以研究光场的变化,激光的半经典理论就是如此建立的,它的主要缺点是,不能研究激光场的量子涨落.

当然,若光场不存在 $P$ 表示(如特征量子光场)则半经典理论将不适用.

最后我们指出,本小节的结果还有一个重要应用,即在用(量子)相干光场抽运(泵浦)激光器或激发原子产生共振荧光等过程中,原子和抽运相干光场的作用可通过在 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中引入"相应的经典光场"与原子的耦合项来描述.这样需要研究的课题就只是原子与激光模(或荧光模)间的量子相互作用.

# 第六章　原子与光场相互作用的过程 开放系统的主方程

在第四章中,我们计算了各种电磁作用过程的跃迁率,采用的方法是 $S$ 算符的微扰论.在本章中我们将研究一些基本的原子与光场相互作用的整个过程,以及在开放的情况下,系统所满足的主方程.

需要指出的是,在第四章计算跃迁率时,我们并不是像在经典物理学中求瞬时变率那样,先考察状态在 $\Delta t$ 时间中的变化,再对相应的改变量除以 $\Delta t$,并最后令 $\Delta t$ 趋于零.因为在量子理论中,这将导致能量不守恒.第四章处的做法是,考察在一个长时间( $-T\to T$)后的变化,再将相应的改变量除以 $2T$,以得出单位时间的变率.最后并令 $T\to\infty$.此外,在第四章中,我们还只计算(非零的)最低阶结果.在本章中,与上述做法不同,将研究的是一些原子与光场相互作用的基本过程随时间的演化.这些过程在量子光学中也具有重要的意义.另外,在量子光学中,腔内场(它具有离散的模式,因此也称为腔模场)具有重要的地位.因此在最后一节中,我们也顺便研究了单模腔内场在腔外热光驱动下的变化.所采用的仍都是作用图象,并为简单计略去上标($I$).

量子主方程是研究一个开放系统的演化的重要理论工具.所谓的开放系统是指它与其周围环境(包括真空态的电磁场,其他介质等)有相互作用的系统,它通常具有广阔的能量谱.在统计物理中也常称作库.在本章的后两节,我们将通过具体的例子对主方程进行介绍.对于腔场,从它的主方程还可能导出相应的福克尔-普朗克方程和随机微分方程.

## §6.1　二能级原子的自发辐射过程　马尔可夫近似

二能级原子的自发辐射是量子光学中最基本的过程之一.本节将在马尔科夫近似和旋波近似下研究原子和光场状态随时间的变化.并求出辐射场的谱线宽度.这种宽度即光学和电动力学中所称的自然宽度,并由此引进原子能级本身宽度的概念.

### 1. 二能级原子　旋波近似和马尔可夫近似

在不考虑双光子作用项的情况下,按照(3.1.49)式,二能级原子与光场的相互作用哈密顿量可以写成

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar \sum_{ks} [\hat{\alpha}_2^\dagger(t)\hat{\alpha}_1(t)\{g_{ks}\hat{a}_{ks}(t) + \bar{g}_{ks}\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\}$$
$$- \hat{\alpha}_1^\dagger(t)\hat{\alpha}_2(t)\{\bar{g}_{ks}^*\hat{a}_{ks}(t) + g_{ks}^*\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\}], \tag{6.1.1}$$

其中 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ 分别为能级 1(低能级)和 2(高能级)上电子的吸收算符,$\hat{\alpha}_{ks}$ 为波矢为 $\boldsymbol{k}$、偏振为 $s$ 的光子的吸收算符.

在(6.1.1)式中,有两项是明显并大幅度偏离能量守恒的,即原子从低能级跃迁到高能级同时放出一个光子的 $\hat{\alpha}_2^\dagger\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_{ks}^\dagger$ 项,和原子从高能级跃迁到低能级同时吸收一个光子的 $\hat{\alpha}_1^\dagger\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_{ks}$ 项.此两项称为反旋波项.剩下的两项称为旋波项.略去反旋波项后的哈密顿量

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar \sum_{ks} [g_{ks}\hat{\alpha}_2^\dagger(t)\hat{\alpha}_1(t)\hat{\alpha}_{ks}(t) - g_{ks}^*\hat{\alpha}_1^\dagger(t)\hat{\alpha}_2(t)\hat{\alpha}_{ks}(t)] \tag{6.1.2}$$

称为旋波近似下的哈密顿量.在耦合常数比有关的光场频率小得多的情况下,旋波近似是一个很好的近似,在量子光学中通常都采用它,以使得计算简化①.

旋波近似与微扰近似有相当大的差别.微扰近似是把演化算符按耦合常数展开,只取其中前若干项,它并不对 $\hat{H}_{\text{int}}$ 作任何近似.旋波近似则相反,它去掉了 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中上述明显能量不守恒的项,然后试图来严格求解方程.这样求出的结果将含耦合常数的各次幂,从而可导出微扰论所不能求得的结果[来看一个旁例:用微扰论来计算电子和质子的作用,无论到哪一级都得不出氢原子的束缚态,但采用库仑势(它是一种近似的势,通常称作单光子势)来求解方程可以相当精确地求出束缚态].

在量子光学中,对于二能级的原子,常引入"原子状态变迁算符"$\hat{\sigma}_\pm(t)$和反转数算符 $\hat{\sigma}_3(t)$,它们的定义如下:

$$\hat{\sigma}_+(t) = \hat{\alpha}_2^\dagger(t)\hat{\alpha}_1(t), \qquad \hat{\sigma}_-(t) = \hat{\alpha}_1^\dagger(t)\hat{\alpha}_2(t),$$
$$\hat{\sigma}_3(t) = \hat{N}_2(t) - \hat{N}_1(t). \tag{6.1.3}$$

这种近似称为旋波近似,在光场的频率比耦合常数 $g_{kj}$ 在绝对值大得多的情况下(这通常是成立的),它是一个好的近似.在原子状态的能量表象中,$\phi_1$ 和 $\phi_2$ 可分别表示成

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.4}$$

这样在相互作用图象中,就有

$$\hat{\sigma}_+(t) = \hat{\sigma}_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}, \qquad \hat{\sigma}_-(t) = \hat{\sigma}_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \tag{6.1.5}$$

---

① 但在某些特殊情况,计入反旋波项反倒有利于问题的正确求解.参见附录 F 第二部分"自由激子的超辐射".

其中 $\omega_0 = \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1)$. 相应于(6.1.4)式,$\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}_-$ 的表示为

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.6}$$

在此图象中,$\hat{\sigma}_3$ 实际上与 $t$ 无关. 即

$$\hat{\sigma}_3(t) = \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.1.7}$$

它们构成 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 的全部的三个分量.

若将原子能量的零点取在 $E_2$ 与 $E_1$ 的中点,则原子的哈密顿量可表示为

$$\hat{H}_{at} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3, \tag{6.1.8}$$

而(6.1.2)式可写成

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar\sum_{\boldsymbol{k}s}[g_{\boldsymbol{k}s}\hat{\sigma}_+(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}(t) - g_{\boldsymbol{k}s}^*\hat{\sigma}_-(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}^\dagger(t)]. \tag{6.1.9}$$

由于 $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ 与光场算符相耦合,故有时也称作是原子的极化算符①. 它们与 $\hat{\sigma}_3$ 之间满足下述对易关系:

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_3, \qquad [\sigma_3, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm. \tag{6.1.10}$$

下面我们来研究二能级原子自发辐射的过程. 令$|\phi_2, 0\rangle$表示原子处在上能级、电磁场为真空的状态,$|\phi_1, \boldsymbol{k}s\rangle$表示原子处在下能级并有一个光子(其波矢为 $\boldsymbol{k}$,偏振为 $s$)的状态. 这样,在旋波近似下任意时刻"原子 + 电磁场"这一体系的状态可表示为

$$|t\rangle = c_2(t)|\phi_2, 0\rangle + \sum_{\boldsymbol{k}s} c_{1,\boldsymbol{k}s}(t)|\phi_1, \boldsymbol{k}s\rangle. \tag{6.1.11}$$

如果没有旋波近似,则处于下能级原子可以再放出一个光子而跃迁到上能级,即体系可从态$|\phi_1, \boldsymbol{k}s\rangle$变到$|\phi_2, \boldsymbol{k}s, \boldsymbol{k}'s'\rangle$,后者又可变到$|\phi_1, \boldsymbol{k}s, \boldsymbol{k}'s', \boldsymbol{k}''s''\rangle$,…. 由于测不准关系,这些能量大幅度不守恒的态存在的时间很短,应当不重要. 但若为了理论严整将它们都考虑进来,求解将变得十分困难. 即使只考虑其中领头的一、两项以考察反旋波作用的影响,计算工作量亦将大大增加. 而采用了旋波近似即可使问题的求解大大简化.

在作用图象中,$c_2(t)$和 $c_{1,\boldsymbol{k}s}(t)$满足下列方程(如本章导言中所述上标$(I)$已略去):

---

① 更完全地说 $\boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{x})\hat{\sigma}_+$ 和 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\hat{\sigma}_-$ 代表原子极化密度算符,其中 $\boldsymbol{p}(x) = -e\phi_1^+(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\phi_2(\boldsymbol{x})$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{1,ks}(t) &= \langle\phi_1, \boldsymbol{k}s \mid \hat{H}_{\mathrm{int}}(t) \mid \phi_2, 0\rangle C_2(t), \\
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_2(t) &= \sum_{ks}\langle\phi_2, 0 \mid \hat{H}_{\mathrm{int}}(t) \mid \phi_1, \boldsymbol{k}s\rangle C_{1,ks}(t).
\end{aligned}
\tag{6.1.12}
$$

虽然如前文所述,这里光子的能量并不一定要等于 $E_2 - E_1 \equiv \hbar\omega_0$,但从下面求出的结果可以看出光子的能量亦只分布在 $\hbar\omega_0$ 的附近,用通常的语言来说,即原子所发光的谱线具有一个宽度.

利用(6.1.2)或(6.1.9)式,可将上述方程化为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_{1,ks}(t) &= -g_{ks}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}C_2(t), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_2(t) &= \sum_{ks}g_{ks}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}C_{1,ks}(t).
\end{aligned}
\tag{6.1.13}
$$

根据初始条件

$$
C_2(0) = 1, \qquad C_{1,kj(0)} = 0, \tag{6.1.14}
$$

从(6.1.13)第一式即得出

$$
C_{1,ks}(t) = -g_{ks}^{*}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t'}C_2(t')\mathrm{d}t'. \tag{6.1.15}
$$

将它代入(6.1.13)第二式后,就得出 $C_2(t)$所满足的一个微分一积分方程:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_2(t) = -\int_0^t U(t-t')C_2(t')\mathrm{d}t', \tag{6.1.16}
$$

其中

$$
U(t-t') = \sum_{ks} | g_{ks} |^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}. \tag{6.1.17}
$$

(6.1.16)式告诉我们,$C_2$ 在 $t$ 时刻的变化率不仅与它在现时的值有关,还与它在 $t$ 以前的全部历史有关.函数 $U(t-t')$称为关联函数,下面先对它进行初步的讨论.首先,当把光场的归一化体积取得很大时,对 $\boldsymbol{k}$ 的求和可转成积分[参见(3.3.13)式下],即

$$
\sum_{k} \to \int \frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3 k = \int \frac{V}{8\pi^3 c^3}\omega^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega_k, \tag{6.1.18}
$$

其中 $\omega = kc$.其次,按照§4.1,在略去电子自旋与磁场的作用项后①

$$
g_{ks} = \boldsymbol{e}_{ks}\cdot \boldsymbol{G}_k/\sqrt{V}, \tag{6.1.19a}
$$

其中

---

① 电子自旋与磁场的作用项虽然对(6.1.20)式中 $u(\omega)$的较高频部分有相当显著的贡献,但对 $C_2(t)$和 $C_{1,ks}(t)$的影响仍不大,除非 $Z$ 很大的情况.参见附录B.

$$\boldsymbol{G}_k = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi_2^\dagger \nabla\phi_1 d^3x. \qquad (6.1.19b)$$

于是

$$\sum_s |g_{ks}|^2 = \frac{1}{V}(|\boldsymbol{G}_k|^2 - |\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{G}_k|^2), \qquad (6.1.19c)$$

$\boldsymbol{n}_k$代表$\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量.将以上结果代入(6.1.17)式,即得

$$U(t-t') = \int_0^\infty u(\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')}d\omega, \qquad (6.1.20)$$

其中

$$u(\omega) = \frac{\omega^2}{8\pi^3c^3}\int(|\boldsymbol{G}_k|^2 - |\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{G}_k|^2)d\Omega_k, \quad \omega = kc \qquad (6.1.21)$$

称为关联函数谱①.当 $\omega \gg c/a$($a$ 标志原子的半径)时,$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$在原子范围内已作多次振荡,使 $\boldsymbol{G}_k$的值由于被积函数的正负相消而大大衰减.这样 $u(\omega)$在 $\omega\to\infty$时将趋于零.另外,不难看出 $u(\omega)$恒为正(或零).

关联函数 $U(\tau)$并可表示成

$$U(\tau) = f(\tau)e^{i\omega_0\tau}, \qquad (6.1.22a),$$

上式中的 $f(\tau)$为 $u(\omega)$的傅里叶变换,

$$f(\tau) = \int_0^\infty u(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega. \qquad (6.1.22b)$$

形式上,上述积分域可扩展成$-\infty$到$\infty$,这只需令负实轴上 $u(\omega)$等于零即可.

从(6.1.22b)式可以看出,当 $\tau=0$ 时,各个频率的 $u$ 在积分中是累加的(因 $u(\omega)\geqslant 0$).而当 $\tau\neq 0$ 时,由于相因子 $e^{-i\omega\tau}$作用而使$f(\tau)$的值下降.$\tau$ 愈大上述相因子随$\omega$ 的振动愈快,相消效应就愈严重.这样 $f(\tau)$只在某个范围 $0<\tau<\tau_c$ 才显著不为零.$\tau_c$ 称为关联时间,对于类氢原子,估计关联时间 $\tau_c$ 的量级为$\frac{1}{\omega_0}$.

在作用图象中,已从 $C_2(t)$分出了 $e^{-iE_2t/\hbar}$因子,因此 $C_2(t)$的变化率的量级为爱因斯坦 $A$ 系数$\gamma_A$,即衰减时间的量级为 $1/\gamma_A$.在$\frac{1}{\omega_0}\ll\frac{1}{\gamma_A}$的情况下,$C_2(t')$在(6.1.16)式的有效积分范围变化很小,在 $t$ 大于$\tau_c$ 后(如上所述,在整个衰减过程中,从 0 到 $\tau_c$ 是一个不显眼的小区间)$C_2(t')$可作为 $C_2(t)$提到积分号外面:

① 在 $\tau=0$ 到 $\tau_c\left(\tau_c\approx\frac{1}{\omega_0}\right)$范围之外,不仅$|f(\tau)|$的值降得很小,而且快速振荡因子 $e^{i\omega_0\tau}$(快速是相对于 $C_2$ 的变化而言)也起到压抑从 $\tau_c$ 到$t$ 的积分值的作用.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_2(t) = -C_2(t)\int_0^t U(t-t')\mathrm{d}t', \tag{6.1.23}$$

同时 $t'$ 的积分下限可以扩展到 $-\infty$，于是有

$$\int_0^t U(t-t')\mathrm{d}t' \approx \int_{-\infty}^t U(t-t')\mathrm{d}t' = \int_{-\infty}^t \mathrm{d}t'\int_0^\infty \mathrm{d}\omega u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega u(\omega)\left[\pi\delta(\omega-\omega_0) - \mathrm{i}p\frac{1}{\omega-\omega_0}\right], t > \tau_c, \tag{6.1.24}$$

在上式的最后一步推导中，我们利用了

$$\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\mathrm{d}t' = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) - \mathrm{i}p\frac{1}{\omega-\omega_0} \tag{6.1.25}$$

（参见§3.4）. 于是除了最初的极短时间（$t \lesssim \tau_c$），(6.1.23)式就化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_2(t) = -\left(\frac{1}{2}r + \mathrm{i}\delta\omega_0\right)C_2(t), \tag{6.1.26}$$

其中

$$\gamma = 2\pi u(\omega_0), \qquad \delta\omega_0 = -\mathscr{P}\int_0^\infty \frac{u(\omega)}{\omega-\omega_0}\mathrm{d}\omega. \tag{6.1.27}$$

上述近似实即为马尔可夫近似. 数学上它可表述为

$$U(t-t') = -(\gamma + 2\mathrm{i}\delta\omega_0)\delta(t-t'), \qquad t - t' \geqslant 0 \tag{6.1.28}$$

即每个时刻 $C_2$ 的变化率只与该时刻的 $C_2$ 值成正比，与过去的历史无关.

此方程的解可以立即求出. 加上初条件，结果即为

$$C_2(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma t - \mathrm{i}\delta\omega_0 t}. \tag{6.1.29}$$

由此可得原子处于上能级的概率 $P_2(t)$ 将随时间作指数衰减：

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{6.1.30}$$

其衰期（寿命）可定义为$\frac{1}{\gamma}$.

(6.1.29)式的右方除了因子 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma t}$ 以外，还有一个振荡因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\omega_0\tau}$. 这意味着上能级的能量值已不是原来的 $E_2$，因为 $E_2$ 所对应的振荡因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$ 在作用图象中已从 $c_2(t)$ 中分出来，而现在其中又出现了新的振荡因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\omega_0\tau}$，表明在考虑了原子与所辐射的电磁场的作用后，能级有一个附加的变化（能级移动）. 这一移动也

因此而称为辐射频移(或称兰姆频移①).

从(6.1.27)式,我们看到常数 $\gamma$ 是与发射实光子相联系的[频率等于 $\omega_0$ 即等于$\frac{1}{\hbar}(E_2-E_1)$的光子常称为实光子.这种发射又称为实跃迁,即光子实实在在地发射出去了].物理上这也是容易理解的,因为实跃迁才导致上能级布居数 $P_2$ 的衰减.至于辐射移动 $\delta\omega$ 则是由发射和回收各种频率的虚光子所贡献的[频率不等于$\frac{1}{\hbar}(E_2-E_1)$的光子统称为虚光子].原子所发出的虚光子由于不符合能量守恒的要求,随后将重新吸收,从而对 $P_2$ 的减少无贡献,但却使上能级原子在部分时间内变为"下能级原子附加一个虚光子".这样,它的能量自然地会有一个改动.但(6.1.27)式给出的 $\delta\omega_0$ 乘以 $\hbar$ 后并不就代表能级 2 的实际移动,因为:1. 自由电子也有类似的能量改动,而这一能量改动(在除以 $c^2$ 后)已归并到电子的质量中去(质量重正化),因此应该从 $\hbar\omega_0$ 中刨除.2. 二能级原子只是一个简化的模型.原子实际上有无穷多能级.能级 2 上的电子还可发射虚光子而跃迁到其他能级上去,包括比 $E_2$ 高的能级(通过反旋波作用).虚光子数亦可不止一个.3. 这里作了旋波近似.实际上精确计算兰姆移动的值是一件比较复杂的事,已超出本书内容的范围.

**2. 关联谱函数和关联函数**

我们来考察由(6.1.21)式所表达的谱函数.首先看"电偶极子"原子模型的情况.所谓偶电极子模型具体地说,就是相比于所有要考虑的光波波长,原子半径都小得可以忽略,从而原子可看成为电偶极子.于是(6.1.96)式中的 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 可取为 1.从第四章(4.1.11)式即得 $\boldsymbol{G}_k$ 的表达式为

$$\boldsymbol{G}_k=-\sqrt{\frac{2\pi\omega_0^2}{\hbar\omega}}\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21},\tag{6.1.31}$$

其中 $\boldsymbol{d}=-e\boldsymbol{x}$ 代表电子的电偶极矩,$\boldsymbol{G}_k$ 对 $\boldsymbol{k}$ 的依赖只表现在$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$中.将(6.1.31)式代入(6.1.21)式即可求出

① 兰姆与卢瑟福于 1947 年测出了氢原子 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态之间有一微小能量差.但在量子力学理论中两者能量是简并的.不仅用薛定谔方程得出的结果是如此,就是用相对论的狄拉克方程来计算也是如此.当时实验测出的能量差为 $1\times10^3$ 兆周/秒(以普朗克常数为单位),现在更精确的值为 1057.8 兆周/秒.只有用量子电动力学的辐射频移才能解释此能量差.采用二级微扰论计算出的值为 1052 兆周/秒.更细致的理论计算为 1057.9 非周/秒.理论与实验值符合很好.这是量子电动力学理论的又一个成功之处.附带要指出的是,Pastemark 早在 1938 年就测出了同样的结果,但未受到注意.

$$u(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4\pi^2 \hbar c^3}\omega \int \mathrm{d}\Omega_k (|\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2 - |\boldsymbol{n}_k \cdot \langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2) = \frac{2\omega_0^2 |\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2}{3\pi \hbar c^3}\omega. \tag{6.1.32}$$

再将上式代入(6.1.27)式,就得出点模型中的 $\gamma$ 值:

$$\gamma = \frac{4\omega_0^3}{3\hbar c^3} |\langle \boldsymbol{d}\rangle_{21}|^2 \equiv \gamma_A, \tag{6.1.33}$$

正好等于(4.1.37)式所给出的爱因斯坦 $A$ 系数,也就是电偶极子近似下的自发辐射跃迁率.这样(6.1.30)式也就是说 $P_2(t)$的衰减率即为爱因斯坦 $A$ 系数.

点模型的谱函数(6.1.32)也就可以写成

$$u(\omega) = \frac{\gamma_A}{2\pi\omega_0}\omega, \tag{6.1.34}$$

它随着 $\omega$ 直线上升.

若我们考虑原子的有限大小,即不略去 $\boldsymbol{G}_k$ 中的 $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$,则当 $\omega$ 大到一定地步使相应的波长与原子直径相当或更小时,由于 $\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ 和 $\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ 在原子范围内正负交替,使 $\boldsymbol{G}_k$ 表达式中的积分值愈来愈缩减,从而使 $u(\omega)$在 $\omega$ 趋于无穷时趋于零.对于最简单例子:类氢原子从 2P 到 1S 的自发辐射(在不计及自旋效应的情况下)①得出的(考虑了原子有限大小的)非相对论谱函数为(参见附录 B)

$$u(\omega) = \frac{\gamma_A}{2\pi\omega_0} \frac{\omega}{\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)^4} = \frac{\gamma_A}{2\pi\omega_0} \frac{\omega}{\left(1 + \frac{1}{16}z^2\alpha^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^4}, \tag{6.1.35}$$

其中$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$,$a_1$ 和 $a_2$ 分别为 1S 和 2P 态的原子半径.

将(6.3.35)与(6.1.34)式相比,即可得出在此例中高频缩减因子即为$\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)^{-4} = (1 + k^2a^2)^{-4}$.当 $ka \gg 1$ 时,它以$(ka)^{-8}$趋于零.顺便指出若在(6.1.35)式基础上作马尔可夫近似,所得出的 $\gamma$ 按(6.1.27)式为

$$\gamma = \frac{\gamma_A}{\left(1 + \frac{\omega_0^2 a^2}{c^2}\right)^4}. \tag{6.1.36}$$

上式中的分母代表原子有限体积引起的修正.

非马尔可夫的关联函数,按(6.1.22a)式,为两个因子的乘积,其中 $f(\tau)$为 $u(\omega)$的傅里叶变换,将 $u(\omega)$用上式代入并进行数值计算,可得出$|f(\tau)|$具有峰

① 指自旋磁矩与光场中磁场的作用

状形态,峰顶在原点①,如前所述其宽度量级为 $1/\omega_0$.

回过头来看(6.1.16)右方的积分,按(6.1.22)式它可表示为

$$\int_0^t U(\tau)C_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}C_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.1.37}$$

我们可把积分范围分作峰区($\lesssim 1/\omega_0$)和峰区以外(直到 $t$)两段. $|C_2(t)|$的衰期可用 $1/\gamma_A$ 来标志(即使有非马尔可夫修正,差别也不超过百分之几十),在 $1/\omega_0$ 与 $1/\gamma_A$ 的比值小得很多的情况,峰区范围的积分中的 $C_2(t-\tau)$可近似取为 $C_2(t)$提出到积分号之外. 剩下峰区外的积分,虽然积分范围可能较大而且 $C_2(t-\tau)$的绝对值随着 $\tau$ 的增加而增加,但一方面受到$|f(\tau)|$下落的抑制,一方面又受到振荡因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}$ 所引起的正负相消的影响,在 $\gamma_A/\omega_0 \ll 1$ 情况下,终于可以忽去,导致马尔可夫的结果. 在类氢原子的情况,$\gamma_A/\omega_0$ 正比于 $Z^2$,故只在 $Z$ 很大的情况,才需考虑非马尔可夫的修正. 值得指出的是,这时应当用相对论的狄拉克方程来求解原子的波函数. 我们的研究表明当 $Z=92$ 时,直到 $t$ 为 $5/\gamma_A$,非马尔可夫修正量级仍只有 $10^{-2}$,并可吸收到衰减指数中(参见附录 B).

### 3. 光子的谱分布　原子能级宽度

我们先来计算 $C_{1,\boldsymbol{k}s}(t)$. 在马尔可夫近似成立的情况下,将(6.1.29)式代入(6.1.15)式,即可求出

$$C_{1,\boldsymbol{k}s}(t) = -g_{\boldsymbol{k}s}^*\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t'-\frac{1}{2}\gamma t'}\mathrm{d}t' = \mathrm{i}g_{\boldsymbol{k}s}^*\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t-\frac{1}{2}\gamma t}-1}{(\omega-\omega_0)+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\gamma}. \tag{6.1.38}$$

在上式中,$\delta\omega_0$ 已吸收到 $\omega_0$ 中去,即 $\omega_0$ 代表考虑了辐射频移后的实际值.

从(6.1.38)式得

$$|C_{1,\boldsymbol{k}s}(t)|^2 = \frac{|g_{\boldsymbol{k}s}|^2}{(\omega-\omega_0)^2+\dfrac{1}{4}\gamma^2}\left[1+\mathrm{e}^{-\gamma t}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\omega-\omega_0)t\right], \tag{6.1.39}$$

它随时间的变化如图 6.1.1 所示.

以上结果表明,对于确定的模$(\boldsymbol{k},s)$,状态中有一个光子的概率并非就是单调增加的②. 它一般是以振荡的形式趋于其最终值

---

① 由于 $u(\omega)$为正值[见(6.1.21)式]. 故当 $\tau=0$ 时,$f(0)$即为 $u(\omega)$之和,而 $\tau>0$ 时,不同 $\omega$ 成分的相位互相错开[见(6.1.22b)式]. 由于彼此相消而使 $f(\tau)$下降.

② 若对所有的模求和,则总光子数将等于 $1-\mathrm{e}^{-\gamma t}$,是单调增加的.

$$|C_{1,ks}(\infty)|^2 = \frac{|g_{ks}|^2}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma^2}. \tag{6.1.40}$$

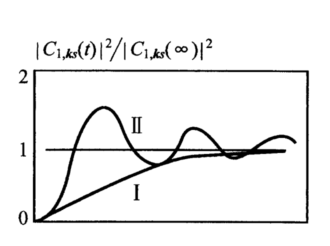



图 6.1.1　光子概率的比值随时间 $t$ 的变化
Ⅰ: $\omega=\omega_0$ 情况　Ⅱ: $\omega\neq\omega_0$ 情况

将上式乘上 $d^3k$ 范围内"$\boldsymbol{k}$ 取值的数目$\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k$"[由平面电磁波满足周期性条件而得出，见(1.3.1)和(3.3.13)式]，然后对 $d\Omega_k$ 积分.并对 $s$ 求和，即求出在 $\omega$ 到$\omega+d\omega$ 范围内光子的概率为

$$P(\omega)d\omega = \frac{u(\omega)}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma^2}d\omega, \tag{6.1.41}$$

它表明光子的概率分布为通常的洛伦兹谱形因子$\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma^2}$乘上关联函数谱 $u(\omega)$.只在马尔可夫近似中，并对原子取点模型以及将 $u(\omega)$近似成 $u(\omega_0)$才化出常用的形式(按照(6.1.34)式)

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma_A}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma_A^2}. \tag{6.1.42}$$

从本节的讨论我们还看到，在考虑电子与电磁场的作用后，量子力学中求出的原子激发态一般不再是定态，而是一个衰变态，也就为亚稳态.其波函数除了以 $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$($E$ 中已包括了能级的辐射频移)振荡外，还有一个衰减因子 $e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$.两者合起来可写成 $e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E-\frac{i}{2}\hbar\gamma\right)t}$.因此我们也可以说衰变态具有一个复能量$(E-\frac{i}{2}\hbar\gamma)$.其实部描写其态矢量(在薛定谔表象中)随时间的周期性变化，而其虚部则描写其寿命(或衰期)$\tau=\frac{1}{\gamma}$.如果把 $e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E-\frac{i}{2}\hbar\gamma\right)t}$作傅里叶展开，则可以看出其能级有一 宽度 $\hbar\gamma$.因此我们也可以说衰变态具有一个宽度为有限值(非零)的能级.能级宽度也就是状态能量的不确定度 $\delta E$，而其寿命 $\tau$ 则代表该态存在的时间 $\delta t$.以上结果表明

$$\delta E\delta t = \hbar. \tag{6.1.43}$$

这也是量子理论测不准关系的一种表现.

在§4.5 关于光在原子上散射的研究中，曾经提到：从(4.5.22)式看来，当光子能量 $\hbar\omega$ 正好等于某个原子中间态能量($E_n$)与初态能量($E_1$)差的绝对值时，$M_{11}$将发散.在考虑了原子能级宽度以后，这一问题即可解决.因为初态中的时间

因子已变成 $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_1 t-\frac{1}{2}\hbar\gamma_1 t}$，而中间态 $n$ 的时间因子已变成 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t-\frac{1}{2}\hbar\gamma_n t}$，这样该项对 $|M_{11}|^2$ 的贡献就等于

$$|(M_{11})_n|^2 = \mathrm{e}^4\omega^2 \frac{|(\boldsymbol{e}_{s2}\cdot\boldsymbol{x})_{1n}(\boldsymbol{e}_{s1}\cdot\boldsymbol{x})_{n1}|^2}{(E_1+\hbar\omega-E_n)^2+\frac{1}{4}\hbar^2(\gamma_1+\gamma_n)^2}, \quad (6.1.44)$$

从而共振时分母并不为零.

下面我们就一个简单情形对共振散射项的截面进行估算. 设初态为原子基态 $(\gamma_1=0)$，中间态 $n$ 为原子第一激发态且不考虑简并. 这时共振散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_2^\gamma} = \frac{\omega^2}{c^4}|(M_{11})_n|^2 = \frac{4e^4\omega^4}{\hbar^2c^4\gamma_n^2}|(\boldsymbol{e}_{s2}\cdot\boldsymbol{x})_{1n}(\boldsymbol{e}_{s1}\cdot\boldsymbol{x})_{n1}|^2. \quad (6.1.45)$$

如果不区分散射后光子的偏振情况，则应对 $\boldsymbol{e}_{s2}$ 求和，结果为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_2^\gamma} = \frac{4e^2\omega^4}{\hbar^2c^4\gamma_n^2}|(\boldsymbol{e}_{s1}\cdot\boldsymbol{x})_{n1}|^2(|\boldsymbol{x}|^2-|(\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{x})_{1n}|^2).$$

对 $\Omega_2$ 积分后得出共振总截面为

$$\sigma_{\mathrm{res}} = \frac{32\pi e^4\omega^4}{3\hbar^2c^4\gamma_n^2}|(\boldsymbol{e}_{s2}\cdot\boldsymbol{x})_{n1}|^2|\langle\boldsymbol{x}\rangle_{n1}|^2. \quad (6.1.46)$$

再设原子在空间的取向是随机的，进一步对 $\boldsymbol{x}$ 的取向求平均，就得出

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{res}} = \frac{32\pi e^4\omega^4}{9\hbar^2c^4\gamma_n^2}|\langle\boldsymbol{x}\rangle_{n1}|^2. \quad (6.1.47)$$

当初态为基态而中间态为第一激发态时，$\gamma_n$ 完全由 $|n\rangle\to|1\rangle$ 的跃迁决定，其表达式即为[参见(6.1.33)式]

$$\gamma_n = \frac{4\omega_0^3}{3\hbar c^3}|\langle\boldsymbol{x}\rangle_{n1}|^2, \quad (6.1.48)$$

于是得出

$$\bar{\sigma} = \frac{2\pi c^2}{\omega_0^2} = 2\pi\lambda\!\!\!^-{}_0^2, \quad (6.1.49)$$

$\lambda\!\!\!^-$ 中 $\lambda\!\!\!^-_0 \equiv \frac{\lambda_0}{2\pi}$，$\bar{\sigma}$ 的值要比汤姆孙散射截面大许多量级：上式中的 $\pi\lambda\!\!\!^-{}^2$ 是以 $\lambda\!\!\!^-_0$ 为半径的圆截面，而汤姆孙 $\bar{\sigma}_T$ 的量级则是以 $\pi\gamma_c^2$，即以“电子经典半径”作半径的圆截面.

## §6.2 单模光与原子的作用 拉比振荡和缀饰原子

在本节中我们将研究单模光与一个二能级原子间的相互作用，并且假定两者

共振或近共振. 首先考虑单模光为能量的本征态的情况. 在忽去原子到其他光模的自发辐射后, 将得出: 初始时处于下能级的原子可以完全地被激发到上能级, 然后又降回到下能级, 从而在上下能级之间来回振荡. 这就是通常所谓的拉比振荡. 在此基础上我们将引入缀饰原子态的概念. 其次考虑的是, 强相干光所引起的拉比振荡. 相干光由于其能量(或光子数)并不取确定值而有一个分布, 将会导致一些新现象, 即布居数差的坍缩与复起.

在微腔中(其尺度与发光的波长同量级), 由于腔模的间隔较大, 可能做到只有一个模与原子频率相近, 而原子与腔模的耦合又较强①. 这时容易出现拉比振荡和缀饰原子态.

**1. 拉比振荡**

在这一小节中, 我们考虑与原子作用的单模光场为光子数本征态, 亦即能量为确定值的情况. 通常, 这时光场是局限在某个腔内, 但也可能是有限的行波波列. 设光场频率为 $\omega$, 它与原子的频率 $\omega_0 = \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1)$ 相等或接近. 因此我们只考虑原子在能级 1 与 2 之间的跃迁. 光场与原子的作用仍取旋波近似.

设初始时原子处于下能级, 于是系统(原子与单模光场)的初态可表示为 $|\phi_1, n_0\rangle$. $n_0$ 为入射光的光子数(其值大于 1). 在旋波近似下, 此态只能跃迁到 $|\phi_2, n_0 - 1\rangle$, 若自发辐射到其他光模可忽略不计, 则它又只能跃迁回到 $|\phi_1, n_0\rangle$. 从而系统的状态在任何时刻就是这两个状态的叠加, 即

$$|t\rangle = A(t)|\phi_2, n_0 - 1\rangle + B(t)|\phi_1, n_0\rangle. \tag{6.2.1}$$

相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{int}} = \mathrm{i}\hbar(g_{21}\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger - g_{21}^*\hat{\sigma}_+\hat{a}).$$

这种简化的模型在量子光学文献中常称为 Jaynes-Cumming(简称 J-C)模型. 在作用图象中, (6.2.1)式右方两个系数的变化方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\phi_2, n_0 - 1|\hat{H}_{\text{int}}(t)|\phi_1, n_0\rangle = -\Omega^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}B(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t) &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\phi_1, n_0|\hat{H}_{\text{int}}(t)|\phi_2, n_0 - 1\rangle = \Omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}A(t),\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

① 对于腔中的行波模和驻波模, 电偶极耦合常数分别为 $\left[-\sqrt{\frac{2\pi}{V\hbar\omega}}\omega_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\boldsymbol{e}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}\right]$ 和 $\left[-\sqrt{\frac{4\pi}{V\hbar\omega}}\omega_0\sin\theta_0\boldsymbol{e}\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle_{21}\right]$, 其中 $V$ 为微腔的体积(甚至是模分布区的体积, 如回音廊模只分布在圆盘腔周边附近的区域中). 由此可见腔愈小, 耦合愈强.

其中

$$\Omega = \sqrt{n_0} g_{21}. \tag{6.2.3}$$

将(6.2.2)第二式写成 $A(t)=\frac{1}{\Omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)$,再将此式两侧对 $t$ 作一次微商,然后代入(6.2.2)第一式以消去$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$,就得出

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}B(t) - \mathrm{i}(\omega-\omega_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t) + |\Omega|^2 B(t) = 0.$$

由此即得 $B(t)$的解为

$$B(t) = B_1 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t+\mathrm{i}\omega_R t} + B_2 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t-\mathrm{i}\omega_R t}, \tag{6.2.4}$$

其中

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{4}(\omega-\omega_0)^2 + |\Omega|^2}, \tag{6.2.5}$$

$B_1$ 和 $B_2$ 为待定常数.

将(6.2.4)式代入(6.2.2)第二式,又可求出 $A(t)$的表达式:

$$A(t) = \frac{\mathrm{i}}{\Omega}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega-\omega_0)t}\left[B_1\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}+\omega_R\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_R t} + B_2\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}-\omega_R\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_R t}\right]. \tag{6.2.6}$$

根据初条件

$$A(0) = 0, \qquad B(0) = 1,$$

即可把解中的两个常数 $B_1$ 和 $B_2$ 确定,结果为

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega-\omega_0}{2\omega_R}\right), \quad B_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega-\omega_0}{2\omega_R}\right). \tag{6.2.7}$$

将上式代回(6.2.4)和(6.2.6)式,得出

$$\begin{aligned} B(t) &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega-\omega_0)t}\left[\cos\omega_R t - \frac{\mathrm{i}}{2\omega_R}(\omega-\omega_0)\sin\omega_R t\right], \\ A(t) &= -\frac{|\Omega|^2}{\Omega\omega_R}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega-\omega_0)t}\sin\omega_R t. \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

从(6.2.8)式即得原子处在两能级的概率分别为

$$\begin{aligned} |B(t)|^2 &= 1 - \frac{|\Omega|^2}{\omega_R^2}\sin^2\omega_R t, \\ |A(t)|^2 &= \frac{|\Omega|^2}{\omega_R^2}\sin^2\omega_R t. \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

此式表明,原子在上能级的概率$|A(t)|^2$将周期性地变化,它从零先升到最大值$|\Omega|^2/\omega_R^2$,然后又开始下降,达到零后再上升.在共振情况下,由(6.2.5)式最大值可达到1,即实现全反转.

附注:以上结果与光学中常用的速率方程所得出的结果不同.该方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2 = AN_2 + BW(\omega_0)(N_2 - N_1).$$

其中$N_1$和$N_2$为下能级和上能级的原子布居数,此式中的$A$和$B$为爱因斯坦两个系数,$W(\omega)$为激励光场单位体积内能量的谱密度.此方程又称为维格纳-韦斯科普夫方程.利用$N_1+N_2=N$,上方程不难解出.$N_2(t)$的稳恒值为$NBW(\omega_0)/[A+2BW(\omega_0)]$.如果初始时$N_2=0$,对任何时刻的$N_2(t)$都将小于$N/2$,即不可能实现反转.

要指出的是,上述速率方程适用于激励光为“宽谱混合态”大容量光场的情况①.在此条件下,该方程可从原子的主方程导出.对于本节所讨论的情况它不适用[关于速率方程的推导见§6.4(6.4.31)式].

$\omega_R$称为拉比频率,它的平方由两项组成,一是偏谐项$\frac{1}{4}(\omega-\omega_0)^2$,另一项是$|\Omega|^2$.当$\omega=\omega_0$即共振时,$\omega_R$就等于$|\Omega|$从而与$\sqrt{\frac{n_0}{V}}$成正比,初始光子数密度愈大,频率$|\Omega|$就愈高(因$V$代表光场归一化体积或腔体积),另外$|\Omega|$还与电偶极矩在偏振方向的投影成正比[参见(6.2.3)式与(4.4.14)式].

在共振情况,上下能级布居数的差为

$$|A(t)|^2 - |B(t)|^2 = 1 - 2\sin^2(|\Omega|t) = \cos(2|\Omega|t), \tag{6.2.10}$$

即在+1与-1之间简谐变化.

对于原子初始时处在上能级的情况可以类似地处理.差别主要是$\Omega$的值等于$\sqrt{n_0+1}g_{21}$,即使初始光子数为零,仍然可能出现拉比振荡.换句话说原子自发发射出的光子还可以被吸收回来.这种情况常称为真空拉比振荡.

如果光场为行波脉冲(亦具有确定的光子数),原子初始时处于下能级,而且脉冲光与原子共振,脉冲持续时间为

$$\tau = \frac{\pi}{2|\Omega|},$$

则按(6.2.10)式当脉冲过后即可实现原子态的完全反转.这样的脉冲被称为$\pi$脉冲.另外,若脉冲持续时间为

---

① 宽谱混合态指光场具有比原子谱线宽度大得多的频率分布,而且在各个模的光子数表象中$\hat{\rho}$只有对角项的情况,大容量指其在作用中状态基本保持不变.另外,在某些较复杂的光学过程(如激光)中,光的谱宽并不由发光原子布居数衰率和原子退相位率$\gamma_p$(见§6.4第5小节)决定,见§8.6.这时只要$\gamma_p$足够大,也会导出速率方程.

$$\tau = \frac{\pi}{|\Omega|},$$

即所谓的 $2\pi$ 脉冲,那么当它通过原子后,按(6.2.10)式原子仍回到下能级,即不从光波中吸收能量.实际上在原子与 $2\pi$ 脉冲作用的前半阶段,它是从入射脉冲中吸收能量的,但在后半阶段又把能量还给了光脉冲.

原子的拉比振荡已在实验上被观测到,甚至是在 $n_0$ 很小的情况.1987 年德国 Max-Planck 量子光学研究所观测到 2.5K 热辐射所引起的处于激发态的 Rydberg 原子的拉比振荡(之所以要采用 Rydberg 原子,是因为它的电偶极矩较大).热辐射不是光子数本征态,但在 2.5°K 时,共振频率处的平均光子数约为 2.

## 2. 缀饰原子

从以上讨论我们看到:当考虑了原子与电磁场的作用时,$|\phi_2, n_0\rangle$ 和 $|\phi_1, n_0+1\rangle$ 都不是定态.那么定态是怎样的? 本小节即来讨论这个问题.仍取作用图象.由于 $|\phi_2, n_0\rangle$ 和 $|\phi_1, n_0+1\rangle$ 在旋波作用情况下不与其他态相关联,故我们只需考虑这两者的迭加,如(6.2.1)式所示.对于能量为 $\mathscr{E}$ 的定态,应满足方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}|t\rangle) = \mathscr{E}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}|t\rangle), \tag{6.2.11}$$

因为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}|t\rangle$ 为相应的薛定谔图象中的态矢量.从(6.2.11)式得出作用图象中的定态满足下列方程:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = (\mathscr{E} - \hat{H}_0)|t\rangle. \tag{6.2.12}$$

再令

$$\delta\mathscr{E}_A = \mathscr{E} - (E_2 + n_0\hbar\omega), \qquad \delta\mathscr{E}_B = \mathscr{E} - (E_1 + (n_0+1)\hbar\omega), \tag{6.2.13}$$

不难求出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\mathscr{E}_A A(t), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\mathscr{E}_B B(t). \tag{6.2.14}$$

将它代入(6.2.2)式即得

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\mathscr{E}_A A(t) &= -\Omega^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}B(t), \\ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\mathscr{E}_B B(t) &= \Omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}A(t). \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

上式具有非零解的条件为

$$\delta\mathscr{E}_A\delta\mathscr{E}_B = \hbar^2|\Omega|^2, \tag{6.2.16}$$

而由(6.2.13)式

$$\delta\mathscr{E}_A - \delta\mathscr{E}_B = \hbar(\omega - \omega_0). \tag{6.2.17}$$

将上式与(6.2.16)式联立就可求出

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{E}_A &= \pm\ \hbar\omega_R + \frac{1}{2}\hbar(\omega - \omega_0),\\ \delta\mathscr{E}_B &= \pm\ \hbar\omega_R - \frac{1}{2}\hbar(\omega - \omega_0).\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

将(6.2.18)式代回(6.2.13)式即求出 $\mathscr{E}$ 的两组解为

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) + \left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \pm \hbar\omega_R \equiv \mathscr{E}_0 \pm \hbar\omega_R, \tag{6.2.19}$$

其中 $\mathscr{E}_0$ 为不考虑原子和光场相互作用时两个态“$|\phi_2, n_0\rangle$和$|\phi_1, n_0+1\rangle$”能量的平均值，即$\frac{1}{2}(E_1+E_2)+\left(n_0+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. $\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$ 的值如图 6.2.1 所示.

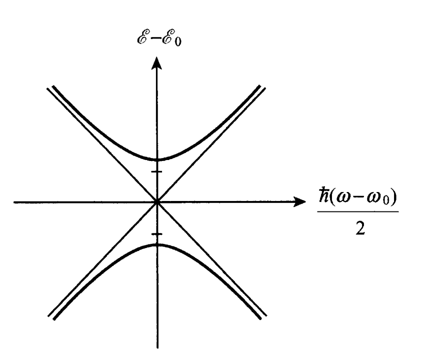



图 6.2.1　$\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$ 的值(粗线)随 $\omega-\omega_0$ 的变化图

有了 $\delta\mathscr{E}_A$(或 $\delta\mathscr{E}_B$)的值[见(6.2.18)式]，代入(6.2.15)式又可把 $A(t)$和 $B(t)$定出，再由(6.2.1)式即可得到相应的本征态. 这两个本征态即我们要求的定态. 它不是单纯的原子状态，而是带有相应的光子. 故称为缀饰原子态.

下面只列出 $\omega=\omega_0$ 时的两个缀饰态. 它们为$|\phi_2, n_0\rangle$和$|\phi_1, n_0+1\rangle$两态等幅值(但不同相位)的叠加：

$$|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\phi_2, n_0\rangle \pm \frac{\mathrm{i}|\Omega|}{\Omega^*}|\phi_1, n_0+1\rangle\right]\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}|\Omega|t}. \tag{6.2.20}$$

### 3. 阻尼的计入

在前面的计算中，我们没有考虑原子从能级 2 或能级 1 到其他较低能级的自发辐射(或因碰撞等其他原因所导致的无辐射跃迁)，以及光子由腔内的逸出. 这些因素都导致$|\phi_2, n_0\rangle$和$|\phi_1, n_0+1\rangle$变到其他的态. 在本小节中，我们将通过简单地引入阻尼项来考虑. 这时方程(6.2.2)就变成

$$\begin{aligned}\dot{A}(t) &= -\frac{1}{2}\gamma_a A(t) - \Omega^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}B(t),\\ \dot{B}(t) &= -\frac{1}{2}\gamma_b B(t) + \Omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}A(t).\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

最简单的求解方法是寻求

$$B(t) = Be^{-i\omega_b t} \tag{6.2.22}$$

形式的特解.将上式代入(6.2.21)第二式,即得

$$A(t) = -\frac{i}{\Omega}\left(\omega_b + \frac{1}{2}i\gamma_b\right)Be^{-i(\omega-\omega_0+\omega_b)t}, \tag{6.2.23}$$

再将上述两式代入(6.2.21)第一式,即得出非零解的条件为

$$\left(\omega_b + \frac{1}{2}i\gamma_b\right)\left(\omega_b + \omega - \omega_0 + \frac{1}{2}i\gamma_a\right) - |\Omega|^2 = 0. \tag{6.2.24}$$

由此解出 $\omega_b$ 可取两个值

$$\omega_b = -\frac{1}{2}(\omega - \omega_0 + i\Gamma_+) \pm \omega_R', \tag{6.2.25}$$

其中

$$\omega_R' = \sqrt{\frac{1}{4}(\omega - \omega_0 + i\Gamma_-)^2 + |\Omega|^2},$$

$$\Gamma_+ = \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b), \quad \Gamma_- = \frac{1}{2}(\gamma_a - \gamma_b). \tag{6.2.26}$$

注意 $\omega'_R$ 与(6.2.5)式定义的拉比频率 $\omega_R$ 相比,在圆括号内多了一项 $i\Gamma_-$,因而已成为复数.

$B(t)$的一般解即为上述两个特解[分别取(6.2.25)式中两个 $\omega_b$ 值]的线性叠加:

$$B(t) = B_1 e^{\frac{i}{2}(\omega-\omega_0+i\Gamma_+)t + i\omega'_R t} + B_2 e^{\frac{i}{2}(\omega-\omega_0+i\Gamma_+)t - i\omega'_R t}. \tag{6.2.27}$$

相应的 $A(t)$为

$$A(t) = \frac{i}{2\Omega}[B_1(\omega - \omega_0 + i\Gamma_- + 2\omega'_R)e^{i\omega'_R t}$$

$$+ B_2(\omega - \omega_0 + i\Gamma_- - 2\omega'_R)e^{-i\omega'_R t}]e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0-i\Gamma_+)t}. \tag{6.2.28}$$

从初条件 $A(0)=1, B(0)=0$ 可定出

$$B_1 = -B_2 = -\frac{i\Omega}{2\omega'_R}. \tag{6.2.29}$$

在 $\omega=\omega_0$ 的情况下,$A(t)$和 $B(t)$的表达式可以化简.这时,

$$\omega'_{R0} \equiv \sqrt{|\Omega|^2 - \frac{1}{4}\Gamma_-^2} \tag{6.2.30}$$

即 $\omega'_R$ 在 $\omega = \omega_0$ 时的值,或者为实数$\left(当|\Omega|^2 > \frac{1}{4}\Gamma_-^2 时\right)$,或者为纯虚数

$\left(\text{当}|\Omega|^2<\frac{1}{4}\Gamma_-^2\text{时}\right)$. 在前一情况，

$$A(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Gamma_-^2}{4\omega_{R0}'}}}\cos(\omega_{R0}'t+\theta_0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\Gamma_+t},\quad \tan\theta_0=\frac{\Gamma_-}{2\omega_{R0}'},$$

$$B(t)=\frac{\Omega}{\omega_{R0}'}\sin\omega_{R0}'t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\Gamma_+t}. \tag{6.2.31}$$

两者皆为衰减的振荡，上下能级布居数之差等于

$$|A(t)|^2-|B(t)|^2=\left[1/\sqrt{1+\Gamma_-^2/4\omega_{R0}'^2}\right]\cos(2\omega_{R0}'t+\theta_0)\mathrm{e}^{-\Gamma_+t}. \tag{6.2.32}$$

在后一情况，$B(t)$和$A(t)$都不再振荡，因(6.2.31)式中的$\omega'_{R0}$已变成纯虚数. 前者常称为强耦合情况，后者称为弱耦合情况. 这里的强与弱都是相对于阻尼差$\Gamma_-$而言.

**4. 相干光场引起的拉比振荡、坍缩和复起**

在经典光学理论中，相干光场引起的拉比振荡具有单一的振荡频率. 若设光场为$\boldsymbol{E}_0\cos\omega t$，则在共振情况下，拉比振荡频率即为$\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{E}_0\cdot\langle\boldsymbol{d}\rangle$. 在量子理论中，情况则不同，具有单一拉比频率的入射光场为光子数本征态. 而相干光是不同光子数态的叠加，因此并不具有单一的拉比频率. 这使得相干光场所引起的拉比振荡出现新的特点，即所谓的“坍缩和复起”的现象①. 下面将对此作简单的讨论. 设初始时原子处在下能级，令$f_n$为相干态$|\alpha\rangle$中含数态$|n\rangle$的概率幅：

$$f_n=\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}, \tag{6.2.33}$$

则系统的初态即为

$$|t=0\rangle=\sum_n f_n|\phi_1,n\rangle. \tag{6.2.34}$$

在旋波近似下，式中的$|\phi_1,n\rangle$只与$|\phi_2,n-1\rangle$相耦合，从而$t$时刻系统的态为

$$|t\rangle=\sum_n A_n(t)|\phi_2,n-1\rangle+\sum_n B_n(t)|\phi_1,n\rangle, \tag{6.2.35}$$

其中系数$A_n(t)$和$B_n(t)$满足下述方程(我们只考虑共振情况)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_n(t)=\Omega_nB_n(t),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_n(t)=-\Omega_n^*A_n(t),$$
$$\Omega_n=\sqrt{n}g, \tag{6.2.36}$$

① 参见 Cumings, Phys. Rev. **140** A, 1051(1965), Eberly 等 Phys. Rev. Lett. **44**, 1323(1980).

$g$ 即前面的 $g_{21}$.(6.2.36)式是一组互不关联(指不同 $n$ 的系数间互不关联)的二元联立方程.于是各组系数 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 都以自己的拉比频率振荡.这样就有

$$A_n(t) = f_n \sin|\Omega_n|t, \quad B_n(t) = f_n \cos|\Omega_n|t, \tag{6.2.37}$$

而原子处在上,下能级的概率就等于

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \sum_n |A_n(t)|^2 = \sum_n |f_n|^2 \sin^2|\Omega_n|t, \\ P_1(t) &= \sum_n |B_n(t)|^2 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2|\Omega_n|t. \end{aligned} \tag{6.2.38}$$

两者的差等于

$$\begin{aligned} P_1(t) - P_2(t) &= \sum_n |f_n|^2 (\cos^2|\Omega_n|t - \sin^2|\Omega_n|t) \\ &= \sum_n |f_n|^2 \cos 2|\Omega_n|t. \end{aligned} \tag{6.2.39}$$

这一级数的和并不具有简单的解析表达式,但在 $|\alpha|^2$ 大时,可对求和作近似处理.

根据泊松分布 $|f_n|^2$ 的特点,当 $|\alpha|^2$ 大时,对(6.2.39)式右方的贡献主要来自 $n$ 在 $|\alpha|^2$ 附近区间内的项,该区间的宽度 $\sim|\alpha|$.于是我们可将 $2|\Omega_n|t = 2\sqrt{n}|g|t$ 中的 $\sqrt{n}$ 在 $n=|\alpha|^2$ 处展开,并只保留前三项

$$2|\Omega_n|t \approx 2|g\alpha|t + \frac{|g|t}{|\alpha|}(n-|\alpha|^2) - \frac{|g|t}{4|\alpha|^3}(n-|\alpha|^2)^2. \tag{6.2.40}$$

上式右方的第一项即相干光经典拉比振荡理论中的单一频率项.由于重要的 $n$ 分布在 $|n-|\alpha|^2| \lesssim |\alpha|$ 的范围,故在振荡早期即

$$|\alpha| > 1, \quad \left|\frac{g}{\alpha}\right| t \ll 1 \tag{6.2.41}$$

时①,(6.2.40)式中的第三项可以忽去.这样(6.2.39)式就化为

$$P_1(t) - P_2(t) = \sum_n |f_n|^2 \cos\left[2|g_\alpha|t + \left|\frac{g}{\alpha}\right| t(n-|\alpha|^2)\right]. \tag{6.2.42}$$

另外,在 $|\alpha|^2$ 很大时,泊松分布 $|f_n|^2$ 可用高斯分布代替.再将对 $n$ 的求和转化为积分,这样 $P_1(t)-P_2(t)$ 就可表成

$$P_1(t) - P_2(t) = \int \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\alpha|} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2|\alpha|^2}} \cos\left[2|g\alpha|t + \left|\frac{g}{\alpha}\right| tx\right].$$

---

① 由于 $2(\Omega_n)t$ 为角度,故(6.2.40)式第三项能否忽去,不仅要求它比前两项小得多,还需要求它比 $\pi$ 小得多.

在上式中的余弦函数按照公式 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$ 换成指数函数后，即可利用高斯型函数的积分公式得出

$$P_1(t)-P_2(t)=\frac{1}{2}\left[e^{i2|g\alpha|t-\frac{1}{2}|g|^2t^2}+e^{-i2|g\alpha|t-\frac{1}{2}|g|^2t^2}\right]=\cos(2|g\alpha|t)e^{-|g|^2t^2/2}. \tag{6.2.43}$$

此式表明，在早期($|g|^2t^2\ll1$)，布居数的差 $P_1(t)-P_2(t)$ 以频率 $2|g\alpha|$ 振荡，与经典理论相同. 但当 $t$ 达到 $\frac{1}{|g|}$ 以后即出现明显的衰减. 出现这一情况的道理也很简单：(6.2.40)式的第二项与 $n$ 有关，从而会使不同 $n$ 的相位角 $2|\Omega_n|t$ 互相错开. 当 $t$ 达到 $\frac{1}{|g|}$ 时，对于重要的 $n$，第二项的绝对值可达到 1 的量级(在 $n-|\alpha|^2=\pm|\alpha|$ 时，正好为 $\pm1$). 相位角相错开的结果即导致 $P_1$ 与 $P_2$ 下降[见(6.2.39)式].

令人感兴趣的是，到了很长时间以后，这已经衰减下去的振荡又会复起. 为此我们来看当 $|g|t$ 增大到约 $2\pi|\alpha|$ 时的情况(注意(6.2.41)式现已不成立). 这时(6.2.40)式第二项的值约为 $(n-|\alpha|^2)2\pi$. 从而不同 $n$ 的项之间相位差 $\approx2\pi\Delta n$ 即 $2\pi$ 的整数倍. 于是 $\cos2|\Omega_n|t$ 又彼此相一致，使振荡复起(注：第三项这时 $\approx-\frac{\frac{\pi}{2}(n-|\alpha|^2)^2}{|\alpha|^2}$，在主要求和范围其值在 0 到 $-\frac{\pi}{2}$ 之间. 虽然已不能忽略，但不至于阻止振荡的复起. Eberly 等严格的计算证实了这一结论).

上面所描述的现象就是布居数差值振荡的坍缩与复起，并已在实验上被观察到. 值得指出的是上述振荡的衰落并不伴随着能量的损耗(与通常的振动不同)，因为在不考虑原子与场相互作用时，$|\phi_1,n\rangle$ 与 $|\phi_2,n-1\rangle$ 能量相同，相互作用导致它们相互转换(即布居数差的振荡)，因而这种振荡的衰落并不伴随着能量的损耗. 是以复起是可能的.

由于上述坍缩与复起是量子理论所特有的，它体现了与经典理论的差异，故又称作量子坍缩与复起.

## §6.3　强相干光激励下的共振荧光

共振荧光是指原子从与其共振的入射光中吸取能量再自发辐射到其他方向的过程，因而也可称作共振散射. 在§6.1 中所给出的共振散射公式适用于单个入射光子的情况(可推广到弱入射光)，而从上节的讨论我们知道，在共振的强光作用下，原子将在两个能级间发生拉比振荡. 当拉比频率 $|\Omega|$ 比自发辐射率大得多时，

在自发辐射的半衰期内，原子已在两个能级之间振荡了多次，从而§6.1的公式不再适用.用另外的话说，这时发光的已不是原来的原子而是上节中所说的缀饰原子.相应地，谱线将发生分裂.我们也可以说，弱光的散射是一个线性过程，在强光情况则出现了非线性的效应.

在通常的共振荧光的理论中，需要用的准备知识比较多，有些我们在以后的章节中才会讲到.这里将采用 Haken 书中的一种简单处理(见 Haken, Light 第一卷，256页)，虽然它有欠缺和不准确的地方，但仍能显示此过程最重要的一些特征.在本节的最后，我们将对通常用的处理办法作简单的介绍.

另外，对于入射的相干光场，有一种替代的处理方式，我们在§5.6第3小节中已作过介绍，为学习方便计，现在用第一小节再对它进行一些说明.

## 1. 对入射单模相干光场的替代处理方式

设入射的($\boldsymbol{k}_0, s_0$)单模相干光场与原子共振，其状态矢量记作$|\alpha\rangle_0$(脚标0代表($\boldsymbol{k}_0 s_0$)模)，原子初始时处在上能级.这样系统的初态即为$|\phi_2\rangle|\alpha\rangle_0$.相互作用哈密顿量在旋波近似下如(6.1.9)式所表示.一种替代的处理办法是把原子与入射的相干光场间的作用放到$\hat{H}_{\text{int}}$中，使系统的态矢量中只包括原子和散射光子的状态.在这种替代的处理方式中，原来的初态$|\phi_2\rangle|\alpha\rangle_0$就化为$|\phi_2\rangle|0\rangle$，其中$|0\rangle$代表光场的真空态，而相互作用哈密顿量则化成

$$\hat{H}'_{\text{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar\sum_{ks}[g_{ks}\hat{\sigma}_+(t)\hat{a}_{ks}(t) - g_{ks}^*\hat{\sigma}_-(t)\hat{a}_{ks}^\dagger(t)] + \mathrm{i}\hbar[g_0\alpha\hat{\sigma}_+(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + g_0^*\alpha^*\hat{\sigma}_-(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]. \tag{6.3.1}$$

上式中的第二项就代表原子与入射的相干光场间的作用.在入射光场与原子共振的情况下($\omega_A=\omega_0$)，该项即化为$\mathrm{i}\hbar(g_0\alpha\hat{\sigma}_+ + g_0^*\alpha^*\hat{\sigma}_-)$，与$t$无关.

这两种表叙方式我们已在§5.6.2介绍过，它们之间为幺正变换的关系.变换算符为

$$\hat{D} = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}_0^\dagger - \alpha^*\hat{a}_0}, \tag{6.3.2}$$

即§5.6中(5.6.27)式所给出的平移算符，其中$\hat{a}_0^\dagger$与$\hat{a}_0$为($\boldsymbol{k}_0, s_0$)模的光子算符，关于从(6.1.9)式通过平移变换变到(6.3.1)式，已包括在§5.6第2小节式的推导中，结果即为

$$\hat{D}^\dagger\hat{H}_{\text{int}}(t)\hat{D} = \hat{H}'_{\text{int}}(t). \tag{6.3.3}$$

$\hat{D}^\dagger$即$\hat{D}^{-1}$，因而上式也就是(5.6.21)式.$\hat{H}_{\text{int}}(t)$和$\hat{H}'_{\text{int}}(t)$分别代表原来的和替代方式中的相互作用.

如果我们采用替代的方式即用$\hat{H}'_{\text{int}}$计算出任何时刻的状态$|t\rangle'$，再通过反变

换即可得出原方式中的态 $|t\rangle$：

$$|t\rangle = \hat{D}|t\rangle'. \tag{6.3.4}$$

需要指出的是，(6.3.1)式本身并没有作半经典近似，半经典近似是指略去其中右方第一项的情况(参见 §5.6). 但要注意，在求出 $|t\rangle'$ 以后需要再按(6.3.4)式作变换才能得到原来的 $|t\rangle$. 我们看到，对于 $|t\rangle'$ 中“未发射荧光光子”的项以及发射到“非入射模”的项，只须加上入射模原来的 $|\alpha_0\rangle$ 即得出 $|t\rangle$ 中的结果，但对 $|t'\rangle$ 中发射光子到入射模的项，结果就比较复杂，但通常人们只对发射到“非入射模”的荧光有兴趣，所以这一复杂结果也就无关紧要了.

## 2. 单光子近似方程组和拉普拉斯变换群

我们采用(6.3.1)式所表示的 $\hat{H}'_{\text{int}}$ 来处理并将略去其上的撇号. 该式中第一项代表原子通过发射或吸收一个光子而在上下能级间跃迁. 而第二项则是通过与经典场($C$ 数)的作用而在上下能级间跃迁. 相应的跃迁链图如图 6.3.1 所示.

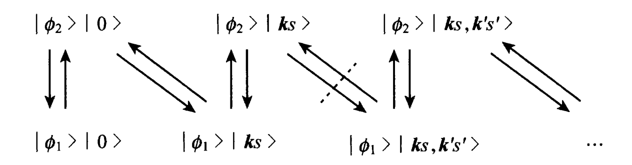



图 6.3.1　系统的跃迁链和单光近似下的截断

其中竖线是通过经典场的跃迁，它可以导致“光子数保持不变”的拉比振荡. 斜线则是通过发射或吸收一个光子所引起的原子能级间跃迁，它导致光子数改变的拉比振荡. 由于这两种作用的同时存在，使得跃迁链是无穷的. 所谓单光子近似就是只保留含一个散射光子的项，因而就是在图中虚线处将链截断①. 在此近似下，$|t\rangle$ 可以写成

$$|t\rangle = c_1(t)|\phi_1\rangle|0\rangle + c_2|\phi_2\rangle|0\rangle + \sum_{ks} c_{1,ks}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}|\phi_1\rangle|\boldsymbol{k}s\rangle$$

$$+ \sum_{ks} c_{2,ks}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}|\phi_2\rangle|\boldsymbol{k}s\rangle, \tag{6.3.5}$$

$\omega_0$ 为原子和入射相干光的频率. 我们在上式中从 $c_{1,ks}(t)$ 和 $c_{2,ks}(t)$ 中分出一个因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}$，是为了消去 $\hat{\sigma}_+(t)\hat{a}_{ks}(t)$ 和 $\hat{\sigma}_-(t)\hat{a}^\dagger_{ks}(t)$ 作用到 $|t\rangle$ 上所产生的相因子，使 $c_1(t)$、$c_2(t)$、$c_{1,ks}(t)$ 和 $c_{2,ks}(t)$ 满足的是常系数的一阶微分方程组(见下式).

① 对于这一近似，Haken 提出的理由是：由于辐射率小，含多个光子的态可以略去.

将(6.3.5)和(6.3.1)式代入运动方程$\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)|t\rangle$[如上所述,此处$\hat{H}_{\mathrm{int}}$即(6.3.1)式中的$\hat{H}'_{\mathrm{int}}$],即可得出系数$c_{1,2}(t)$和$c_{1,2;ks}(t)$满足的方程:

$$
\begin{aligned}
\dot{c}_1(t) &= -g_0^*\alpha^* c_2(t), \\
\dot{c}_2(t) &= -g_0\alpha c_1(t) + \sum_{ks} g_{ks} c_{1,ks}(t), \\
\dot{c}_{1,ks}(t) &= -\mathrm{i}(\omega-\omega_0)c_{1,ks}(t) - g_{ks}^* c_2(t) - g_0^*\alpha^* c_{2,ks}(t), \\
\dot{c}_{2,ks}(t) &- \mathrm{i}(\omega-\omega_0)c_{2,ks}(t) + g_0\alpha c_{1,ks}(t).
\end{aligned}
\tag{6.3.6}
$$

这是常系数的一阶线性微分方程组.可以方便地采用傅里叶变换或拉普拉斯变换来求解.后者对$c(t)$等在$t\to\infty$时的行为要求比较松,只要能找到两个正常数$M$和$f_0$,使得在$0<t<\infty$区间

$$|c(t)| \leqslant M\mathrm{e}^{f_0 t} \tag{6.3.7}$$

成立即可.另外,对于求解初值问题,它还特别方便.

设$c(t)$的拉普拉斯变换为$C(f)$,后者由下式定义:

$$C(f) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ft}c(t)\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}f > f_0 \tag{6.3.8}$$

其中$f$为一复数,它的实部应取得比$f_0$大,以使上式中的积分收敛.这样得出的$C(f)$在$\mathrm{Re}f>f_0$的区域中正规解析(无奇点).拉普拉斯的逆变换为

$$c(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} C(f)\mathrm{e}^{ft}\mathrm{d}f, \tag{6.3.9}$$

其中$b$取为一个实数并大于$f_0$.如把$c(t)$和$C(f)$上述对应关系记作

$$c(t)\leftrightarrow C(f), \tag{6.3.10}$$

则通过分部积分不难证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t)\leftrightarrow -c(0) + fC(f), \tag{6.3.11}$$

即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t)$的拉普拉斯变换为$-c(0)+fC(f)$.这样就把初值也包括进来了.一个对我们来说重要的特例是

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\leftrightarrow \frac{1}{f-\alpha}, \quad \mathrm{Re}f > \mathrm{Re}\alpha. \tag{6.3.12}$$

当$\alpha=0$时上式即化为$1\leftrightarrow\frac{1}{f}$.

下面即对(6.3.6)式作拉普拉斯变换,并利用初条件$c_2(0)=1$,$c_1(0)=c_{1,ks}(0)=c_{2,ks}(0)=0$.所得出变换后的方程为

$$
\begin{aligned}
fC_1(f) &= -g_0^*\alpha^*C_2(f),\\
fC_2(f) &= 1 + g_0\alpha C_1(f) + \sum_{ks} g_{ks}C_{1,ks}(f),\\
fC_{1,ks}f(f) &= -\mathrm{i}(\omega-\omega_0)C_{1,ks}(f) - g_{ks}^*C_2(f) - g_0^*\alpha^*C_{2,ks}(f),\\
fC_{2,ks}(f) &= -\mathrm{i}(\omega-\omega_0)C_{2,ks}(f) + g_0\alpha C_{1,ks}(f).
\end{aligned}
\tag{6.3.13}
$$

这是一组代数方程,其解不难求出.其结果为

$$
\begin{aligned}
C_1(f) &= -\frac{g_0^*\alpha^*}{f[f+\Gamma(f)]+|g_0\alpha|^2},\\
C_2(f) &= \frac{f}{f[f+\Gamma(f)]+|g_0\alpha|^2},\\
C_{1,ks}(f) &= \frac{\mathrm{i}g_{ks}(\omega-\omega_0-\mathrm{i}f)f}{[(\omega-\omega_0-\mathrm{i}f)^2-|g_0\alpha|^2][f^2+f\Gamma(f)\,|g_0\alpha|^2]},\\
C_{2,ks}(f) &= \frac{g_{ks}^*g_0\alpha f}{[(\omega-\omega_0-\mathrm{i}f)^2-|g_0\alpha|^2][f^2+f\Gamma(f)\,|g_0\alpha|^2]},
\end{aligned}
\tag{6.3.14}
$$

其中

$$
\Gamma(f) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{ks}|g_{ks}|^2\left(\frac{1}{\omega-\omega_0-|g_0\alpha|-\mathrm{i}f}+\frac{1}{\omega-\omega_0+|g_0\alpha|-\mathrm{i}f}\right).
\tag{6.3.15}
$$

在我们所讨论的情况,(6.3.9)式中的 $b$ 可取为一个正无穷小量 $\varepsilon$. 这样反演的积分路径就是 $\varepsilon-\mathrm{i}\infty\to\varepsilon+\mathrm{i}\infty$. 在进一步的处理中,$\Gamma(f)$可近似为一个与 $f$ 无关的常数(这里不再作仔细的讨论). 在$|g_0\alpha|\ll\omega_0$ 的情况下,

$$
\Gamma\approx\frac{1}{2}\gamma_A+\mathrm{i}\delta\omega,
\tag{6.3.16}
$$

其中 $\gamma_A$ 即爱因斯坦$A$ 系数,$\delta\omega$ 如§6.1 所述为能级的辐射移动. 当 $\Gamma$ 近似取为常数后,$C_1(f)$,$C_2(f)$,$C_{1,ks}(f)$和 $C_{2,ks}(f)$的奇异性只有极点. 不难求出各极点的位置,其中两个为方程

$$
f^2+\Gamma f+|g_0\alpha|^2=0
\tag{6.3.17}
$$

的根,它们是

$$
f_1=-\frac{1}{2}\Gamma+\sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2-|g_0\alpha|^2},\qquad f_2=-\frac{1}{2}\Gamma-\sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2-|g_0\alpha|^2}.
\tag{6.3.18}
$$

另两个为$(\omega-\omega_0-\mathrm{i}f)^2-|g_0\alpha|^2=0$的根，即

$$f_3=-\mathrm{i}(\omega-\omega_0+|g_0\alpha|),\qquad f_4=-\mathrm{i}(\omega-\omega_0-|g_0\alpha|). \tag{6.3.19}$$

不难看出$f_1$和$f_2$的实部都小于零，因此它们位于左半“复平面”内，而$f_3$和$f_4$位于虚轴上.这样$C_1(f)$，$C_2(f)$，$C_{1,ks}(f)$和$C_{2,ks}(f)$在$\mathrm{Re}f>0$的区域没有奇点.从而反演公式(6.3.12)中的$b$可以取为正无穷小$\varepsilon$.

通过分项公式，$C_1(f)$，$C_2(f)$，$C_{1,ks}(f)$和$C_{2,ks}(f)$可以表示为

$$\begin{aligned}C_1(f)&=\frac{r_{11}}{f-f_1}+\frac{r_{12}}{f-f_2},\\C_2(f)&=\frac{r_{21}}{f-f_1}+\frac{r_{22}}{f-f_2},\\C_{1,ks}(f)&=\frac{r_{31}}{f-f_1}+\frac{r_{32}}{f-f_2}+\frac{r_{33}}{f-f_3}+\frac{r_{34}}{f-f_4},\\C_{2,ks}(f)&=\frac{r_{41}}{f-f_1}+\frac{r_{42}}{f-f_2}+\frac{r_{43}}{f-f_3}+\frac{r_{44}}{f-f_4}.\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

上式中的各项系数可通过先通分再与(6.3.14)式比较而确定.这里不仔细列出.利用(6.3.12)式，立即可以得出

$$\begin{aligned}c_1(t)&=r_{11}\mathrm{e}^{f_1t}+r_{12}\mathrm{e}^{f_2t},\\c_2(t)&=r_{21}\mathrm{e}^{f_1t}+r_{22}\mathrm{e}^{f_2t},\\c_{1,ks}(t)&=r_{31}\mathrm{e}^{f_1t}+r_{32}\mathrm{e}^{f_2t}+r_{33}\mathrm{e}^{f_3t}+r_{34}\mathrm{e}^{f_4t},\\c_{2,ks}(t)&=r_{41}\mathrm{e}^{f_1t}+r_{42}\mathrm{e}^{f_2t}+r_{43}\mathrm{e}^{f_3t}+r_{44}\mathrm{e}^{f_4t}.\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

代入(6.3.5)式中即得出$|t\rangle$.

由于$\mathrm{Re}f_1$和$\mathrm{Re}f_2$都小于零.故(6.3.21)式中$\mathrm{e}^{f_1t}$和$\mathrm{e}^{f_2t}$的项都代表瞬态解.当我们求稳恒解时，这两项都将略去.这样，$|t\rangle$的稳恒解中都只剩下(6.3.5)式中后两项，其系数$c_{1,ks}(t)$和$c_{2,ks}(t)$内的$\mathrm{e}^{f_1t}$和$\mathrm{e}^{f_2t}$项也将略去.于是有

$$\begin{aligned}|c_{1,ks}(t)|^2&=|r_{33}|^2+|r_{34}|^2+2\mathrm{Re}(r_{33}r_{34}^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}|g_0\alpha|t}),\\|c_{2,ks}(t)|^2&=|r_{43}|^2+|r_{44}|^2+2\mathrm{Re}(r_{43}r_{44}^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}|g_0\alpha|t}).\end{aligned} \tag{6.3.22}$$

上两式中最后一项为周期性的交变项，若对时间平均，则该项为零.这样光子在各个$\boldsymbol{k}s$模的分布为①

$$P_{ks}=|r_{33}|^2+|r_{34}|^2+|r_{43}|^2+|r_{44}|^2. \tag{6.3.23}$$

---

① 当我们求散射到$\boldsymbol{k}s$模($\boldsymbol{k}s\neq\boldsymbol{k}_0s_0$)的光子分布时，实际上作不作变换(6.3.4)并不影响结果.

其中 $r_{ij}$ 在作分项分式时即已定出.代入后得出

$$P_{ks}=\frac{|g_{ks}|^2}{8\left|\frac{1}{16}\gamma_A^2-|g_0\alpha|^2\right|}\left[\left|\frac{u_1}{\omega-\omega_0-|g_0\alpha|-\mathrm{i}u_1}-\frac{u_2}{\omega-\omega_0-|g_0\alpha|-\mathrm{i}u_2}\right|^2\right.$$

$$\left.+\left|\frac{u_1}{\omega-\omega_0+|g_0\alpha|-\mathrm{i}u_1}-\frac{u_2}{\omega-\omega_0+|g_0\alpha|-\mathrm{i}u_2}\right|^2\right],\tag{6.3.24}$$

其中

$$u_1=-\frac{1}{4}\gamma_A+\sqrt{\frac{1}{16}\gamma_A^2-|g_0\alpha|^2},\quad u_2=-\frac{1}{4}\gamma_A-\sqrt{\frac{1}{16}\gamma_A^2-|g_0\alpha|^2}.\tag{6.3.25}$$

**3. 结果讨论**

我们来看弱光和强光两个极端情况:

(1)
$$|g_0\alpha|\ll\frac{1}{4}\gamma_A,\tag{6.3.26}$$

此即入射光很弱、相应的拉比频率比自发辐射跃迁率小得多的情况.可以期望这时的光子分布与自发辐射的光子分布相似.由(6.3.25)式,在此情况下

$$u_1\approx 0,\quad u_2\approx-\frac{1}{2}\gamma_A,$$

而 $\omega_0\pm|g_0\alpha|$ 也可以近似为 $\omega_0$,这不仅因为频率移动 $\pm|g_0\alpha|$ 不仅比 $\omega_0$ 要少得多,还比谱宽 $\frac{1}{2}\gamma_A$ 小得多(见下式),因此将掩盖在谱宽之内.将以上结果代入(6.3.24)式后即得

$$P_{ks}=\frac{|g_{ks}|^2}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma_A^2},\tag{6.3.27}$$

的确与自发辐射的分布相同,也与经典的洛伦兹振子的理论结果一致.

(2)
$$|g_0\alpha|\gg\frac{1}{4}\gamma_A\tag{6.3.28}$$

这表示强光情况,在自发辐射的半衰期内,原子已在上、下能级之间振荡了多次.这时

$$u_1\approx-\frac{1}{4}\gamma_A+\mathrm{i}|g_0\alpha|,\qquad u_2\approx-\frac{1}{4}\gamma_A-\mathrm{i}|g_0\alpha|.$$

于是

$$\left|\frac{u_1}{\omega-\omega_0-|g_0\alpha|-\mathrm{i}u_1}-\frac{u_2}{\omega-\omega_0-|g_0\alpha|-\mathrm{i}u_2}\right|^2$$

$$= \left| \frac{u_1}{\omega - \omega_0 + \mathrm{i}\gamma_A/4} - \frac{u_2}{\omega - \omega_0 - 2 | g_0 \alpha | - 2 | g_0 \alpha | + \mathrm{i}\gamma_A/4} \right|^2,$$

$$\approx \frac{| g_0 \alpha |^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{16}\gamma_A^2} + \frac{| g_0 \alpha |^2}{(\omega - \omega_0 - 2 | g\alpha |^2) + \frac{1}{16}\gamma_A^2}.$$

在最后一个等式中,我们略去了交叉项,因为它相对于上式中的两个峰为一个扁平的分布.同样可求出

$$\left| \frac{u_1}{\omega - \omega_0 + | g_0 \alpha | - \mathrm{i}u_1} - \frac{u_2}{\omega - \omega_0 + | g_0 \alpha | - \mathrm{i}u_2} \right|^2$$

$$\approx \frac{| g_0 \alpha |^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{16}\gamma_A^2} + \frac{| g_0 \alpha |^2}{(\omega - \omega_0 + 2 | g_0 \alpha |)^2 + \frac{1}{16}\gamma_A^2}.$$

将上述两式代入(6.3.24)式即得出

$$P_{ks} \approx \frac{1}{8} | g_{ks} |^2 \left[ \frac{1}{(\omega - \omega_0 + 2 | g_0 \alpha |)^2 + \frac{1}{16}\gamma_A^2} + \frac{2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{16}\gamma_A^2} + \frac{1}{(\omega - \omega_0 - 2 | g_0 \alpha |)^2 + \frac{1}{16}\gamma_A^2} \right]. \tag{6.3.29}$$

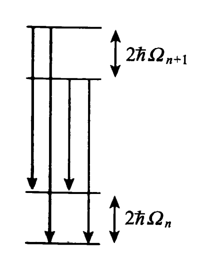


图 6.3.2　缀饰原子的能级跃迁

我们看到,在强入射光$\left(|g_0\alpha| \gg \frac{1}{4}\gamma_A\right)$情况,$P_{ks}$频谱中将出现三个峰:一个中峰位于$\omega_0$处,两个侧峰距主峰$2|g_0\alpha|$,其高度为主峰的一半.

从物理上看,出现三个峰的原因是:在强光情况,原子在自发辐射发生以前已形成了缀饰原子.因此这时的自发辐射实际上是缀饰原子的自发辐射.由于入射的相干光场中,光子数$n$不是确定值而有一个分布.对于每个$n$值,缀饰原子有二个能级,其差值在共振情况为$2\hbar\Omega_n$.相邻的两个$n$的四个能级如图6.3.2所示.这样,缀饰原子的自发辐射就有四种跃迁(见图),形成三个峰(中峰实由两个靠近的峰合并而成).再由于$n$的取值主要在$|\alpha|^2$附近,故三个峰的间距为$2|g_0\alpha|$.

附带指出,由于三峰的出现可看成是原子在光作用下能级变动的结果,故又被称作是动力学的(或交变场的)斯塔克效应.

最后我们简单地说明一下上述简单处理(单光子近似)的问题.首先,在相干光场驱动的情况下,原子发射的光场内含有相干散射的成分,即$\langle \boldsymbol{E} \rangle$不为零的部分,而以上计算的荧光是指其中自发辐射的部分(非相干光场).相干散射部分在单光

子近似中没有包括进来(因为对单光子态,$\langle E\rangle=0$).其次,就以荧光部分而言,上述三个峰的位置是正确的.但三个峰的宽度和高度有误差.下一小节我们将简要介绍通常的理论处理,它能给出比较准确和全面的结果.

**4. 通常处理方式简介**

通常处理中采用经典相干场描述,即将 $\hat{H}_{\text{int}}$ 取作(6.3.1)式的形式.第一步,类似于§6.1的作法,在马尔可夫近似下先消去光场的自由度而得出原子密度算符(它描写原子的状态)所满足的方程(通常称为原子密度算符的主方程,我们将在下一节中推导它).第二步,从上述主方程可以求出原子算符的期望值:$\langle\hat{\sigma}_+(t)\rangle$、$\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle$ 和 $\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle$ 以及它们间的相关函数 $\langle\hat{\sigma}_l(t)\hat{\sigma}_m(t')\rangle$,$l$ 和 $m$ 取 ±、3,其中的算符为海森伯图象中的算符.对我们最重要的是 $\langle\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t')\rangle$.在求相关函数时要用到量子回归定理.第三步是将光场算符与原子算符联系起来,在§6.1第1小节中已经指出 $\hat{\sigma}_\pm$ 正比于原子的极化算符,而原子所辐射的电磁场算符与原子的极化算符之间可通过推迟解相联系,即

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\omega_0^2}{c^2 r}(\langle\boldsymbol{d}\rangle_{12}\times\boldsymbol{n}_r)\times\boldsymbol{n}_r\hat{\sigma}_-\left(t-\frac{r}{c}\right).\tag{6.3.30}$$

于是,电磁场算符的相关函数 $\langle\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\rangle$ 将与 $\langle\hat{\sigma}_+\left(t-\frac{r}{c}\right)\sigma_-\left(t-\frac{r}{c}\right)\rangle$ 成正比.第四步即最后一步是将稳恒时的辐射频谱用相应的电磁场相关函数的傅里叶变换表示出来.这两者间的关系我们将在第八章§8.5讲功率谱时给出.

下面我们给出一些主要结果.首先是 $\langle\hat{\sigma}_+(t)\rangle$、$\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle$ 及 $\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle$ 所满足的方程.它们是(设入射相干光与原子共振,拉比频率用 $\Omega$ 表示,$\Omega=|g_0\alpha|$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_+(t)\rangle&=-\left(\frac{1}{2}\gamma_A-\mathrm{i}\omega_0\right)\langle\hat{\sigma}_+(t)\rangle+\mathrm{i}\Omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\langle\sigma_3(t)\rangle,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle&=-\left(\frac{1}{2}\gamma_A+\mathrm{i}\omega_0\right)\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle+\mathrm{i}\Omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle&=-\gamma_A(\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle+1)+2\mathrm{i}\Omega(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\langle\hat{\sigma}_+(t)\rangle-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle).
\end{aligned}\tag{6.3.31}$$

这一方程组通常称为光学布洛赫方程组.其稳恒解为

$$\langle\hat{\sigma}_+\rangle_s=\langle\hat{\sigma}_-\rangle_s^*=-2\mathrm{i}\Omega\frac{\gamma_A}{\gamma_A^2+8\Omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t},\tag{6.3.32a}$$

$$\langle\hat{\sigma}_3\rangle_s=-\frac{\gamma_A^2}{\gamma_A^2+8\Omega^2}.\tag{6.3.32b}$$

在原子辐射的总强度 $I_{\text{tot}}$ 中有一部分是相干散射的强度 $I_{\text{coh}}$. 稳恒时两者比值为

$$\frac{I_{\text{coh}}}{I_{\text{tot}}}=\frac{\langle\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}\rangle_s\cdot\langle\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}\rangle_s}{\langle\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}\rangle_s}=\frac{\langle\hat{\sigma}_+\rangle_s\langle\hat{\sigma}_-\rangle_s}{\langle\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rangle_s}=\frac{\langle\hat{\sigma}_+\rangle_s\langle\hat{\sigma}_-\rangle_s}{\frac{1}{2}(1+\langle\hat{\sigma}_3\rangle_s)}=\frac{\gamma_A^2}{(\gamma_A^2+8\Omega^2)}. \tag{6.3.33}$$

在弱光情况此比值近似为 1, 而在强光情况 $(8\Omega^2\gg\gamma_A^2)$ 它是一个小值 $\frac{\gamma_A^2}{8\Omega^2}$.

如前所述, 散射光谱分布 $I(\omega)$ 可通过相关函数 $\langle\sigma_+(t)\sigma_-(t+\tau)\rangle$ 的傅里叶变换求出, 在强光极限下

$$I(\omega)\propto\frac{\pi\gamma_A^2}{2\Omega^2}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{3}{4}\frac{\gamma_A}{(\omega-\omega_0+2\Omega)^2+\left(\frac{3}{4}\gamma_A\right)^2}+\frac{\gamma_A}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4}\gamma_A^2}+\frac{3}{4}\frac{\gamma_A}{(\omega-\omega_0-2\Omega)^2+\left(\frac{3}{4}\gamma_A\right)^2}, \tag{6.3.34}$$

上式右方第一项为相干散射的贡献. 后三项为非相干散射的贡献. 我们看到, 三个峰的宽度以及相对高度都与(6.3.29)式有差别.

## §6.4　二能级原子与热光场的作用　原子运动的主方程

在现实中, 原子总是处在某个温度为 $T$ 的环境中, 因此它将受到热光场的作用. 热光场既能激发原子到较高能级, 也能通过诱导辐射(受激辐射)使原子跃迁到较低能级. 热光是一种大量模式构成的混杂光场, 因此它也会给原子的运动带来一定的无规性. 这些内容都将反映在原子运动的方程之中.

原子运动的主方程是消去热光场后原子的密度算符所满足的方程. 密度算符是一个系统状态的一般表示(参见 §5.4), 它既可描写统计混合态, 也可把纯态作为特例包括在内. 因而在量子光学中, 常采用密度算符来描写系统的状态.

### 1. 二能级原子主方程的推导

二能级原子的密度算符写成矩阵形式共有四个元, $\rho_{ij}=\langle i|\hat{\rho}|j\rangle$, $i,j=1,2$. 如 §6.1 所述, 通常用 $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ 和 $\hat{\sigma}_3$ 来作为二能级子的力学量算符集合, 其中 $\hat{\sigma}_3$ 称为布居数差算符, 它在状态中的期望值为

$$\langle\hat{\sigma}_3\rangle=\text{tr}(\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_3)=\langle 2|\hat{\rho}|2\rangle-\langle 1|\hat{\rho}|1\rangle=\rho_{22}-\rho_{11}, \tag{6.4.1}$$

而 $\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}_-$ 则与电偶极矩算符 $\hat{\boldsymbol{d}}=-e\hat{\boldsymbol{x}}$ 相联系: 在二能级的子空间中, $\hat{\boldsymbol{d}}$ 可表示

为①

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \sum_{i,j=1}^{2} \langle i \mid \hat{\boldsymbol{d}} \mid j \rangle \mid i \rangle \langle j \mid, \tag{6.4.2}$$

从而又可写成

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \langle \hat{\boldsymbol{d}} \rangle_{12} \hat{\sigma}_- + \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \hat{\sigma}_+ . \tag{6.4.3}$$

由于$\langle \hat{\sigma}_- \rangle = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_-) = \rho_{12}$，$\langle \hat{\sigma}_+ \rangle = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_+) = \rho_{21}$，故即得出

$$\langle \boldsymbol{d} \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{d}} \rangle_{12} \rho_{12} + \langle \boldsymbol{d} \rangle_{21} \rho_{21} . \tag{6.4.4}$$

设原子和热光场总体的密度算符为 $\hat{\rho}_T$，则在作用图象中 $\hat{\rho}_T$ 满足的方程由(5.4.13)式表示，即(如本章导言所述，上标$(I)$已略去不写)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_T(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t), \hat{\rho}_T(t)], \tag{6.4.5}$$

其中 $\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)$在旋波近似下可写成

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar[\hat{\sigma}_+(t)\hat{\Gamma}(t) - \hat{\sigma}_-(t)\hat{\Gamma}^+(t)], \tag{6.4.6}$$

$$\hat{\Gamma}(t) \equiv \sum_{\boldsymbol{k}s} g_{\boldsymbol{k}s} \hat{a}_{\boldsymbol{k}s}(t) = \sum_{\boldsymbol{k}s} g_{\boldsymbol{k}s} \hat{a}_{\boldsymbol{k}s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

$$\hat{\sigma}_+(t) = \hat{\sigma}_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}.$$

将(6.4.5)式对时间作积分，得

$$\hat{\rho}_T(t) = \hat{\rho}_T(0) + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t [\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'), \hat{\rho}_T(t')]\mathrm{d}t'. \tag{6.4.7}$$

再将上式代回(6.4.5)式，结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_T(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t), \hat{\rho}_T(0)] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t [\hat{H}_{\mathrm{int}}(t), [\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'), \hat{\rho}_T(t')]]\mathrm{d}t'. \tag{6.4.8}$$

此方程为一个微分积分方程，它与(6.4.5)式等价.

我们可设在作用开始时刻($t=0$)，原子与热光的状态之间没有关联即

$$\hat{\rho}_T(0) = \hat{\rho}(0)\hat{R}, \tag{6.4.9}$$

其中 $\hat{\rho}(0)$代表 $t=0$ 时刻原子的密度算符，$\hat{R}$代表热光场的密度算符. 将方程(6.4.8)对光场自由度 $r$ 求迹，其左方即为(参见(5.4.21)式)

---

① (6.4.2)式右方可以改写成$\sum_{ij} \mid i \rangle \langle i \mid \hat{\boldsymbol{d}} \mid j \rangle \langle j \mid$，再利用$\sum_i \mid i \rangle \langle i \mid = 1$，$\sum_j \mid j \rangle \langle j \mid = 1$即可得出(6.4.2) 式左方.

$$\mathrm{tr}_r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_T(t)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t),$$

(6.4.8)式右方第一项在对光场求迹后为零,因 $\hat{R}$在光子数表象中只具有对角项,而 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$将吸收或放出一个光子.这样就得出

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t\mathrm{tr}_r[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t),[\hat{H}_{\mathrm{int}}(t'),\hat{\rho}_T(t')]\mathrm{d}t'. \qquad (6.4.10)$$

热光场是一个容量大的体系,属于统计物理中的库.它在受扰动后能很快地恢复原状.因此可以假定上式右方的 $\hat{\rho}_T(t')$可近似取成 $\hat{\rho}(t')R$.这样得出的结果称作玻恩近似下的主方程(注意:是说对方程作了玻恩近似,不是对解作了玻恩近似,这是很不相同的.例如库仑势是单光子交换势也可以说是对势作了玻恩近似,但从库仑势求解出的原子波函数却是相当精确的).在将(6.4.10)式中的 $\hat{\rho}_T(t')$用 $\hat{\rho}(t')R$、$\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)$用(6.4.6)式代入后,利用 $\hat{\sigma}_+$,$\hat{\sigma}_-$与 $\hat{\Gamma}$,$\hat{\Gamma}^\dagger$ 对易以及在求迹号下算符乘积次序的可轮换等性质,即可将(6.4.10)式化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}(t)}{\mathrm{d}t}=-\int_0^t\{&(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t')-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t')\sigma_+)\langle\hat{\Sigma}(t)\hat{\Sigma}(t')\rangle_r+\mathrm{h.c.}\\&+(\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t')-\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t')\hat{\sigma}_-)\langle\hat{\Sigma}^\dagger(t)\hat{\Sigma}^\dagger(t')\rangle_r+\mathrm{h.c.}\\&+(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t')-\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t')\hat{\sigma}_+)\langle\hat{\Sigma}(t)\hat{\Sigma}^\dagger(t')\rangle_r+\mathrm{h.c.}\\&+(\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t')-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t')\hat{\sigma}_-)\langle\hat{\Sigma}^\dagger(t)\hat{\Sigma}(t')\rangle_r+\mathrm{h.c}\}\mathrm{d}t',\end{aligned} \qquad (6.4.11)$$

其中 $\hat{\Sigma}(t)\equiv\hat{\Gamma}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}=\sum_{ks}g_{ks}\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}$,脚标 $r$ 代表只对光场自由度求期望值.由于 $\hat{R}$ 在光子数表象中只有对角项,故

$$\langle\hat{\Sigma}^\dagger(t)\hat{\Sigma}^\dagger(t')\rangle_r=\langle\hat{\Sigma}(t)\hat{\Sigma}(t')\rangle_r=0,$$

另外两项亦可求出为

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Sigma}(t)\hat{\Sigma}^\dagger(t')\rangle_r&=\sum_{ks}\sum_{k's'}g_{ks}g^*_{k's'}\langle\hat{a}_{ks}\hat{a}^\dagger_{k's'}\rangle_r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\\&=\sum_{ks}|g_{ks}|^2(\bar{n}_T(\omega)+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\equiv U_1(t-t'),\end{aligned} \qquad (6.4.12a)$$

其中 $\bar{n}_T(\omega)$代表 $\boldsymbol{k}s$ 模中的热光子数,其值如(5.4.34)式所示.类似地有

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Sigma}^+(t)\hat{\Sigma}^-(t')\rangle_r&=\sum_{ks}\sum_{k's'}g^*_{ks}g_{k's'}\langle\hat{a}^+_{ks}\hat{a}_{k's'}\rangle_r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\\&=\sum_{ks}|g_{ks}|^2\bar{n}_T(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\\&\equiv U_2(t-t').\end{aligned} \qquad (6.4.12b)$$

将(6.4.12)式代入(6.4.11)式即化出在作用图象中原子的主方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = -\int_0^t \{(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t')\hat{\sigma}_+)U_1(t-t')$$
$$+ (\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t')\hat{\sigma}_-)U_2(t-t') + \text{h.c.}\}\mathrm{d}t'. \quad (6.4.13)$$

上式中的 $U_1(t-t')$和 $U_2(t-t')$称为关联函数,它将 $t$ 时刻的$\hat{\rho}(t)$变化率与 $t'$ 时刻的 $\hat{\rho}$关联起来,因此过程一般是非马尔可夫的.

当原子处于真空场时,$\bar{n}_T(\omega)=0$,于是 $U_2(t-t')=0$ 而 $U_1(t-t')$化为§6.1 中 $U(t-t')$.实际上,在室温如 $T=300°\mathrm{K}$,对于光频 $\omega$,$\bar{n}_T(\omega)\approx 10^{-33}$是一个很小的数值,也可以略去.

**2. 马尔可夫近似**

由于热光(包括 $T=0\mathrm{K}$ 的特殊情况)具有宽广的频谱,使得关联时间要比$\hat{\rho}(t)$的演化时间小很多个量级.于是马尔可夫近似可以成立.仿照§6.1 中的处理,可以得出这种情形下,关联函数可以化为

$$\begin{aligned} U_1(t-t') &= [(\bar{n}_T(\omega_0)+1)\gamma + 2\mathrm{i}(\delta\omega_0^T + \delta\omega_0)]\delta(t-t'), \\ U_2(t-t') &= [\bar{n}_T(\omega_0)\gamma + 2\mathrm{i}\delta\omega_0^T]\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

其中 $\gamma$ 和 $\delta\omega_0$ 如(6.1.27)和(6.1.21)式所示.$\delta\omega_0^T$ 与温度有关,由下式表示:

$$\delta\omega_0^{\mathrm{T}} = \mathscr{P}\int \frac{\bar{n}_T(\omega)u(\omega)}{\omega-\omega_0}\mathrm{d}\omega, \quad (6.4.15)$$

其中 $u(\omega)$由(6.1.21)式给出.将以上结果代回(6.4.13)式并将 h.c.项明显写出,即可化出[$\bar{n}_T(\omega_0)$将简写成 $\bar{n}_T$]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\gamma(\bar{n}_T+1)\{2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\}$$
$$+ \frac{1}{2}\gamma\bar{n}_T\{2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\}$$
$$- \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\delta\omega_0 + \delta\omega_0^{\mathrm{T}}\right)[\hat{\sigma}_3, \hat{\rho}(t)]. \quad (6.4.16)$$

上式最后一项代表频率移动.因若回到薛定谔图象(用上角 $S$ 表示),主方程将形如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}^S(t) = \frac{1}{2}\gamma(\bar{n}_T+1)(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}^S(t)\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}^S(t) - \hat{\rho}^S(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)$$
$$+ \frac{1}{2}\gamma\bar{n}_T(2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}^S(t)\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}^S(t) - \hat{\rho}^S(t)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+)$$
$$- \mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_0'[\hat{\sigma}_3, \hat{\rho}^S(t)]. \quad (6.4.17)$$

其中 $\omega_0'$ 已并入了 $2\delta\omega_0^{\mathrm{T}}+\delta\omega_0$(但下面仍将用 $\omega_0$ 表示). 物理上, $2\delta\omega_0^{\mathrm{T}}$ 代表热光引起的交流斯塔克效应. 不过, 这里计算的值并不准确, 情况同 $\delta\omega_0$ 相似.

为了说明(6.4.17)式中各项的意义, 我们可以引入原子的非厄米哈密顿量①, 它包括了阻尼项在内:

$$\hat{H}_{\mathrm{nh}}=\hat{H}_0-\frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar(\bar{n}_T(\omega_0)+1)\gamma\hat{n}_2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar\bar{n}_T(\omega_0)\gamma\hat{n}_1, \tag{6.4.18a}$$

其中 $\hat{n}_2$ 和 $\hat{n}_1$ 代表能级 2 和 1 的布居数算符. 在 $2\times2$ 表象中它们分别为

$$\hat{n}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-,\qquad \hat{n}_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+. \tag{6.4.18b}$$

$\hat{H}_0$ 在 $2\times2$ 表象中即为 $\frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3$. 这样(6.4.17)式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}^S(t)=\gamma(\bar{n}_T(\omega_0)+1)\hat{\sigma}_-\hat{\rho}^S(t)\hat{\sigma}_++\gamma\bar{n}_T(\omega_0)\hat{\sigma}_+\hat{\rho}^S(t)\hat{\sigma}_-$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{nh}}\hat{\rho}^S(t)-\hat{\rho}^S(t)\hat{H}_{nh}^{\dagger}]. \tag{6.4.19}$$

回看(6.4.18a)式. $\hat{H}_{\mathrm{nh}}$ 中的第二项代表上能级布居数的衰减, 它来源于原子的自发辐射和受激辐射. 第三项代表下能级布居数的衰减, 来源于原子吸收热光. 这两项都是反厄米的. 至于(6.4.19)式右方的前两项则是代表原子状态的坍缩. 其中第一项代表从上能级到下能级的坍缩, 第二项代表从下能级到上能级的坍缩. 因若设

$$\hat{\rho}^S=A_{22}|2\rangle\langle2|+A_{21}|2\rangle\langle1|+A_{12}|1\rangle\langle2|+A_{11}|1\rangle\langle1|,$$

则有

$$\hat{\sigma}_-\hat{\rho}^S\hat{\sigma}_+=A_{22}|1\rangle\langle1|,\quad \hat{\sigma}_+\hat{\rho}^S\hat{\sigma}_-=A_{11}|2\rangle\langle2|. \tag{6.4.20}$$

它们分别使 $|2\rangle\langle2|$ 变成了 $|1\rangle\langle1|$, 使 $|1\rangle\langle1|$ 变成了 $|2\rangle\langle2|$. 在主方程的量子随机轨迹处理中(6.4.19)式内这两项对应于随机性地光子发射和吸收(参见上页注中 Carmichael 的书).

坍缩代表随机发生的作用. 因(6.4.19)式给出 $\Delta\rho^S=\gamma(\bar{n}_T+1)(\hat{\sigma}_-\sqrt{\Delta t})\hat{\rho}^S(\hat{\sigma}_+\sqrt{\Delta t})+\gamma\bar{n}_T(\hat{\sigma}_+\sqrt{\Delta t})\hat{\rho}^S(\hat{\sigma}_-\sqrt{\Delta t})-\mathrm{i}/\hbar[(\hat{H}_{\mathrm{nh}}\Delta t)\hat{\rho}^S-\hat{\rho}^S(\hat{H}_{\mathrm{nh}}^+\Delta t)]$, 其中 $\hat{H}_{\mathrm{nh}}$ 和 $\hat{H}_{\mathrm{nh}}^+$ 所起的作用与 $\Delta t$ 成正比, 而坍缩项 $\hat{\sigma}_+\sqrt{\Delta t}$ 和 $\hat{\sigma}_-\sqrt{\Delta t}$ 则与 $\sqrt{\Delta t}$ 成正比, 犹如统计物理课中无规行走的结果.

### 3. $\langle\hat{\sigma}_3\rangle$ 和 $\langle\hat{\sigma}_\pm\rangle$ 的解

将 $\hat{\sigma}_3$ 和 $\hat{\sigma}_\pm$ 分别乘到(6.4.17)式上再求迹, 即可得:

---

① 参见 Carmichael, An Open System Approach to Quantum Optics.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_3\rangle_t = -\gamma[(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)\langle\hat{\sigma}_3\rangle_t + 1],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_+\rangle_t = -\left[\frac{1}{2}\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1) - i\omega_0\right]\langle\hat{\sigma}_+\rangle_t, \tag{6.4.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_-\rangle_t = -\left[\frac{1}{2}\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1) + i\omega_0\right]\langle\hat{\sigma}_-\rangle_t.$$

由此求出

$$\langle\hat{\sigma}_3\rangle_t = \left(\langle\hat{\sigma}_3\rangle_0 + \frac{1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}\right)\mathrm{e}^{-\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)t} - \frac{1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1},$$

$$\langle\hat{\sigma}_+\rangle_t = \langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle_t^* = \langle\hat{\sigma}_+\rangle_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{1}{2}\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)t}. \tag{6.4.22}$$

稳恒时($t=\infty$),有

$$\langle\hat{\sigma}_+\rangle_\infty = \langle\hat{\sigma}_-\rangle_\infty = 0,$$

$$\langle\hat{\sigma}_3\rangle_\infty = -\frac{1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}. \tag{6.4.23}$$

(6.4.23)第二式即$\langle\hat{n}_2\rangle_\infty - \langle\hat{n}_1\rangle_\infty = -\frac{1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}$,再加上$\langle\hat{n}_2\rangle_\infty + \langle\hat{n}_1\rangle_\infty = 1$即得出

$$\frac{\langle\hat{n}_2\rangle_\infty}{\langle\hat{n}_1\rangle_\infty} = \frac{\bar{n}_T(\omega_0)}{n_T(\omega_0)+1}. \tag{6.4.24}$$

将$\bar{n}_T(\omega_0)$的表达式[见(5.4.34)式]

$$\bar{n}_T(\omega_0) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1}$$

代入后,(6.4.24)式又可表示为

$$\frac{\langle\hat{n}_2\rangle_\infty}{\langle\hat{n}_1\rangle_\infty} = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}}, \tag{6.4.25}$$

与统计物理要求的值一致.我们再来查看一下$\langle n_2\rangle_t$和$\langle n_1\rangle_t$随时间的变化.由(6.4.21)第一式和$\langle\hat{n}_2\rangle_t + \langle\hat{n}_1\rangle_t = 1$即可得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{n}_2\rangle_t = -\gamma(\bar{n}_T(\omega_0)+1)\langle\hat{n}_2\rangle_t + \gamma\bar{n}_T(\omega_0)\langle\hat{n}_1\rangle_t. \tag{6.4.26}$$

上式右方第一项代表由于上能级的自发和受激辐射而导致的$\langle\hat{n}_2\rangle_t$减少,而第二项代表由于下能级对热光的吸收而导致的$\langle\hat{n}_2\rangle_t$增加.该方程亦可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{n}_2\rangle_t = -\gamma[(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)\langle\hat{n}_2\rangle_t - \bar{n}_T(\omega_0)],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{n}_1\rangle_t = -\gamma[(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)\langle\hat{n}_1\rangle_t - (\bar{n}_T(\omega_0)+1)]. \tag{6.4.27}$$

此式表明,$\langle\hat{n}_2\rangle_t$ 是衰减还是增长取决于它是大于还是小于$\frac{\bar{n}_T(\omega_0)}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}$. 对于 $\langle\hat{n}_1\rangle_t$,则是取决于它是大于还是小于$\frac{\bar{n}_T(\omega_0)+1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}$. 两者超过(或不足)部分,都以 $e^{-\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)t}$衰减,即具有相同的衰率 $\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)$:

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}_2\rangle_t &= \left(\langle\hat{n}_2\rangle_0 - \frac{\bar{n}_T(\omega_0)}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}\right)e^{-\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)t} + \frac{\bar{n}_T(\omega_0)}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1},\\ \langle\hat{n}_1\rangle_t &= \left(\langle\hat{n}_1\rangle_0 - \frac{\bar{n}_T(\omega_0)+1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}\right)e^{-\gamma(2\bar{n}_T(\omega_0)+1)t} + \frac{\bar{n}_T(\omega_0)+1}{2\bar{n}_T(\omega_0)+1}.\end{aligned} \tag{6.4.28}$$

这些结果都是可预想到的. 此式表明,若$\langle\hat{n}_2\rangle_0=0$,则$\langle\hat{n}_2\rangle_t$ 在任何时刻都小于1/2.

### 4. 同时还与相干光作用的原子的主方程

如果原子在与热光(环境)相作用的同时,又与"和它共振"的单模相干光场相作用,则(在经典干光表叙下)系统的哈密顿量中还有一项 $i\hbar(g_0\alpha\hat{\sigma}_+ - g_0^*\alpha^*\hat{\sigma}_-)$,如§6.3 所述. 我们将此项记作 $\hat{H}_I$,这样在主方程中将多出一项 $-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I,\hat{\rho}]=[(g_0\alpha\hat{\sigma}_+ - g_0^*\alpha^*\hat{\sigma}_-),\hat{\rho}]$. 于是主方程将形如(仍在作用图像中)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = &-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I,\hat{\rho}] + \frac{1}{2}\gamma(\bar{n}_T(\omega_0)+1)(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)\\ &+\frac{1}{2}\gamma\bar{n}_T(\omega_0)(2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+).\end{aligned} \tag{6.4.29}$$

证明就不再详列了. 如果环境并非热光而是任何其他具有宽广频谱的大容量混合态光场,其密度算符 $\hat{\rho}_r$ 如下所示:

$$\hat{\rho}_r = \sum_{\boldsymbol{ks}}\sum_n P_n(\boldsymbol{ks})\mid n\rangle\langle n\mid,$$

我们只需将(6.4.29)中的 $\bar{n}_T(\omega_0)$换成一般的 $\bar{n}(\omega_0)$即可,$\bar{n}(\omega_0)$代表频率为 $\omega_0$ 的单模中的平均光子数. 可由上式计算出. 当库为真空场时,只需令(6.4.29)式中的 $\bar{n}_T(\omega_0)=0$.

如果采用薛定谔图象,并将 $\bar{n}_T(\omega_0)$换成一般的 $\bar{n}(\omega_0)$,相应的原子主方程即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_S = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[(\hat{H}_A + \hat{H}_I^s), \hat{\rho}_S] + \frac{1}{2}\gamma(\bar{n}(\omega_0) + 1)(2\hat{\sigma}_- \hat{\rho}_S\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho}_S - \hat{\rho}_S\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) + \frac{1}{2}\gamma\bar{n}(\omega_0)(2\hat{\sigma}_+ \hat{\rho}_S\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\rho}_S - \hat{\rho}_S\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+). \tag{6.4.30}$$

其中 $\hat{H}_I^s = \mathrm{i}\hbar(g_0\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{\sigma}_+ - g_0^*\alpha^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{\sigma}_-)$. 如果没有广谱混合态的光场(指 $\bar{n}(\omega)=0$)而只有相干光,则从(6.4.30)式可以导出布洛赫方程(6.3.31)式,其中 $\langle\hat{\sigma}_\pm(t)\rangle$ 和 $\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle$ 即为 $\mathrm{tr}(\hat{\sigma}_\pm\hat{\rho}_S(t))$ 和 $\mathrm{tr}(\hat{\sigma}_3\hat{\rho}_S(t))$. 反过来若没有相干光,则可从(6.4.27)式导出爱因斯坦的速率方程(也称为维格纳-韦斯科普夫方程)结果即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{n}_1\rangle_t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{n}_2\rangle_t = \gamma\bar{n}_T(\omega_0)(\langle\hat{n}_2\rangle_t - \langle\hat{n}_1\rangle_t) + \gamma\langle\hat{n}_2\rangle_t, \tag{6.4.31}$$

与§6.2中(6.2.9)式下所列的速率方程一致:在忽略原子有限大小的情况下,$\gamma$ 就是爱因斯坦 $A$ 系数,$\bar{n}_T(\omega_0)\gamma$ 就代表热光情况下的受激辐射系数,因此也就等于该方程中的 $W(\omega_0)B$.

讨论:$W(\omega_0)$ 即(4.1.29)式中的 $\frac{2\pi}{c}I(\omega_0)$ 代表单位体积单位周频中的热光能量即 $W(\omega_0)=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\nu}\Big|_{\nu_0}$,其中 $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$ 代表周频率. 而从上面给出的 $\bar{n}_T(\omega)A=W(\omega_0)B$ 和 $A,B$ 的表达式所求出的 $W(\omega_0)=\bar{n}_T(\omega_0)\frac{2\hbar\omega_0^3}{\pi c^3}$,并不出现参量 $V$. 此结果与 $W(\omega_0)=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\nu}\Big|_{\nu_0}$ 并不矛盾,因为体积 $V$(它的取值有任意性)亦出现在 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\nu$ 中:由 $\mathrm{d}^3k$ 内的模数为 $\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k=\frac{V}{2\pi^2}k^2\mathrm{d}k=\frac{V}{2\pi^2c^3}\omega^2\mathrm{d}\omega=\frac{2V\omega^2}{\pi c^3}\mathrm{d}\nu$,从而 $\mathrm{d}U=(\bar{n}_T(\omega)\hbar\omega)\frac{2V\omega^2}{\pi c^3}\mathrm{d}\nu$,于是 $\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\nu}\right)_{\nu_0}=V\bar{n}_T(\omega_0)\frac{2\hbar\omega_0^3}{\pi c^3}$.

**5. 退相位效应**①

从(6.4.21)式我们看到,由(6.4.6)式所描述的原子与库的相互作用,同时造成原子布居数的改变和跃迁算符 $\langle\hat{\sigma}_\pm\rangle$ 的衰减. 另有一种原子与库量子间的作用,它通过原子状态相位的无序化使 $\langle\hat{\sigma}_\pm\rangle$ 衰减但不改变原子的布居数. 例如原子与库量子间的弹性散射(在固体中常表现为原子与声子间的弹性散射). 相应的哈密顿量可表示为

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{deph}} = \mathrm{i}\hbar\sum_{jl}g_{jl}\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_l\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ + \mathrm{h.c.} \tag{6.4.32}$$

① 参见§8.2第一小节.

其中 $\hat{b}_l$ 为库量子吸收算符. 在二能级原子情况($\hat{n}_1+\hat{n}_2=1$)此项作用除了使原子的跃迁频率有一修正以外,还在主方程中附加一项①

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{deph}}=\frac{1}{2}\gamma_P(\hat{\sigma}_3\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_3-\hat{\rho}). \tag{6.4.33}$$

不难证明此项将使 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_\pm\rangle_t$ 中增加一衰减项 $-\gamma_P\langle\hat{\sigma}_\pm\rangle_t$,从而在原子的自发辐射中贡献一个附加谱线宽度,但对 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\sigma}_3\rangle$ 没有影响.

如果原子运动不限于在这两个能级之内,它还可迁移到其他能级,则(6.4.32)式造成的退相位项将为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{deph}}=\frac{1}{2}\gamma_P^{(2)}(2\hat{n}_2\hat{\rho}\,\hat{n}_2-\hat{n}_2\hat{\rho}-\hat{\rho}\,\hat{n}_2)+\frac{1}{2}\gamma_P^{(1)}(2\hat{n}_1\hat{\rho}\,\hat{n}_1-\hat{n}_1\hat{\rho}-\hat{\rho}\,\hat{n}_1). \tag{6.4.34}$$

在许多情况下,这种退相位率 $\gamma_P$ 的值要比 $\gamma$ 大得多.

## §6.5 热光驱动下的单模腔场 量子主方程 福克尔-普朗克方程和随机微分方程

激光的全量子理论是量子光学中的重要问题. 特别是近年来发展的微激光器,量子特征更为显著. 激光腔内的场不仅与原子相互作用,而且与腔外的热光场或真空场(它可作为热光场的一个特殊情况)相互作用. 这就使得单模腔场与腔外热光场的作用也成为量子光学的基本问题. 借此问题,我们可给出腔场所满足的主方程以及相应的量子福克尔-普朗克方程和随机微分方程.

### 1. 单模腔场主方程

设单模腔场的吸收和发射算符为 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$,频率为 $\omega_0$,它与腔外热光场的作用可以采用下述 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 描述

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)=\mathrm{i}\hbar\sum_{ks}[g_{ks}\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t)-g_{ks}^*\hat{a}(t)\hat{a}_{ks}^\dagger(t)], \tag{6.5.1}$$

其中 $\hat{a}_{ks}$ 和 $\hat{a}_{ks}^\dagger$ 代表腔外热光场的算符. 如令

$$\hat{\Gamma}(t)=\sum_{ks}g_{ks}\hat{a}_{ks}(t), \tag{6.5.2}$$

① 推导可仿前进行,亦可参见 Carmichael, An Open System Approach to Quantum Optics, p.28

则 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$可表示成与(6.4.6)式相类似的形式. 仿照原子主方程的推导,同样可以得出腔内场模的密度算符 $\hat{\rho}$在作用图象中满足的主方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = -\int_0^t [(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t') - \hat{a}\hat{\rho}(t')\hat{a}^\dagger)U_1(t-t') + a(\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t') - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t')\hat{a})U_2(t-t') + \text{h.c.}]\mathrm{d}t'. \quad (6.5.3)$$

关联函数 $U_1(t-t')$和 $U_2(t-t')$具有与(6.4.12)式相同的形式.

在马尔可夫近似下,上式可以化成(在 $\delta\omega_0$ 并入到 $\omega_0$ 中以后)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\kappa(\bar{n}_T+1)(2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_T(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger), \quad (6.5.4)$$

其中 $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$ 代表腔场减少一个光子所导致的状态坍缩,而 $\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a}$代表腔场增添一个光子所导致的状态坍缩. $\bar{n}_T$ 为 $\bar{n}_T(\omega_0)$的简写. 我们可以仿 §6.4 第 2 小节引入 $\hat{H}_{nh}$,这时(6.5.4)式右方第一项内后两项就代表腔外热光场(以及真空场)引起的腔场耗散作用,而第二项内后两项代表热光场对腔场的激励作用.

马尔可夫近似成立的条件的是系统(在这里就是腔场)与库(腔外热光场)的作用是广谱的. 具体要求如下:将库的谱宽(在 $\omega_0$ 周围)用 $\Omega$ 标志,并用 $g_{ks}^{(0)}$ 表示"热光场的归一化体积取为 $k_0^{-3}\left(k_0=\frac{\omega_0}{c}\right)$、频率为 $\omega_0$ 时"的耦合常数,则马尔可夫近似成立的条件是:$|g_{ks}^{(0)}|/\omega_0$ 和 $|g_{ks}^{(0)}|/\Omega$ 都是非常小的值. 对于较高 $Q$ 值光学腔,此条件是满足的.

我们来求$\langle\hat{a}\rangle$的变率. 将 $\hat{a}$乘在(6.5.4)等式两侧并求迹. 利用"在求迹中算符乘积的顺序可以轮换"的性质以及对易关系

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1,$$

从(6.5.4)式即可求出$\langle\hat{a}\rangle_t$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{a}\rangle_t = -\frac{1}{2}\kappa\langle\hat{a}\rangle_t. \quad (6.5.5)$$

上式右方不仅是(6.5.4)式中的反厄米项贡献的,还包含状态坍缩项贡献的结果. 从(6.5.5)式立即解出

$$\langle\hat{a}\rangle_t = \langle\hat{a}\rangle_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa t}. \quad (6.5.6)$$

若补入振荡因子 $e^{-i\omega_0 t}$即为$\langle\hat{a}\rangle_0 e^{-i\omega_0 t-\frac{1}{2}\kappa t}$. 值得注意的是,$\langle\hat{a}\rangle_t$ 的衰率与 $\bar{n}_T$ 无关(请对比(4.27)式).

(6.5.6)式并不表示腔内光场将消失到零,因为$\langle\hat{a}\rangle$只代表它的相干部分. 相干部分的光子数平均值由$\langle\hat{a}^\dagger\rangle\langle\hat{a}\rangle$表示,它以衰率 $\kappa$ 减少到零. 为了求出该模光场

总光子数的变化,我们需要求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t$.将$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$乘到(6.5.4)等式两侧再求迹,结果得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t=-\kappa\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t+\kappa\bar{n}_T. \tag{6.5.7}$$

上式右方第二项($\kappa\bar{n}_T$)是从主方程中第二个状态坍缩项中出来的.

由(6.5.7)式即得,在稳恒时

$$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_S=\bar{n}_T,$$

与热平衡的要求一致.在任一时刻$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t$的值为

$$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t=(\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_0-\bar{n}_T)\mathrm{e}^{-\kappa t}+\bar{n}_T. \tag{6.5.8}$$

它的意思是"$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_0$与稳恒值"的差以$\kappa$为速率指数式地衰减.如果初始的光子数$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_0$为零.上式就代表热光对腔模的激励过程.

非相干成分光子数为总光子数$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t$与$\langle\hat{a}^{\dagger}\rangle_t\langle\hat{a}\rangle_t$之差.其值可表示为

$$\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_t-\langle\hat{a}^{\dagger}\rangle_t\langle\hat{a}\rangle_t=[\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle_0-\langle\hat{a}^{\dagger}\rangle_0\langle\hat{a}\rangle_0]\mathrm{e}^{-\kappa t}+\bar{n}_T(1-\mathrm{e}^{-\kappa t}). \tag{6.5.9}$$

第一项代表其初始值的衰减,第二项代表热光的馈入.

**2. 量子福克尔-普朗克方程**

在经典的非平衡态统计物理中,福克尔-普朗克方程具有重要的地位,它给出概率分布函数随时间的演化.对于量子光场,利用§5.4和§5.5中所给出的分布函数,也可从密度算符的主方程得出它所满足的偏微分方程.在其扩散矩阵为正定的情况下,即为量子福克尔-普朗克方程.

在$P$表示存在的情况下,将$\hat{\rho}=\int\mathrm{d}^2\alpha P(\alpha,\alpha^*,t)|\alpha\rangle\langle\alpha|$代入(6.5.4)式所表示的主方程中,并利用

$$\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|=\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|,\quad |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^{\dagger}=\alpha^*|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

$$\hat{a}^{\dagger}|\alpha\rangle\langle\alpha|=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^*\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|,\quad |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\alpha\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

$$\hat{a}^{\dagger}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\alpha^*\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\alpha\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{6.5.10}$$

即可将主方程中的算符$\hat{a}$和$\hat{a}^{\dagger}$转化为对$P(\alpha,\alpha^*,t)$的微商(和乘以常数).在前文中,$|\alpha\rangle$是用$\hat{a}$的本征值$\alpha$来标志的,但它的表达式中实际含有$\alpha$和$\alpha^*$[参见(5.2.6)和(5.2.8)式及下文的(6.5.11)式].同样,$P(\alpha)$作为$\hat{\rho}$按$|\alpha\rangle\langle\alpha|$展开的系数,也含有$\alpha$和$\alpha^*$,例如见(5.5.53)和(5.5.63)式.在(6.5.10)式的微商中,即

将 $\alpha$ 和$\alpha^*$作为独立的变数①.(6.5.10)后三可通过$|\alpha\rangle\langle\alpha|$的下述表达式来证明：

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-\alpha\alpha^*} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle\langle 0| e^{\alpha^*\hat{a}}. \tag{6.5.11}$$

将(6.5.10)式代入主方程(6.5.4)式后再通过分部积分，即可把微商运算从$|\alpha\rangle\langle\alpha|$转移到 $P$ 表示函数上. $P$ 函数如上所述，现也已表示成 $\alpha,\alpha^*$ 和 $t$ 的函数. 这样得出的热光驱动腔场 $P$ 表示的量子福克尔-普朗克方程即为

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha,\alpha^*,t) = \frac{\kappa}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha P(\alpha,\alpha^*,t)] + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}[\alpha^* P(\alpha,\alpha^*,t)]\right\} + \kappa\bar{n}_T \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}P(\alpha,\alpha^*,t), \tag{6.5.12}$$

通常也写作

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha,\alpha^*,t) = \frac{\kappa}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^* + 2\bar{n}_T\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right]P(\alpha,\alpha^*,t).$$

我们来看(6.5.12)式的解. 设初始时光场为相干态$|\alpha_0\rangle$即

$$P(\alpha,\alpha^*,0) = \delta^2(\alpha-\alpha_0), \tag{6.5.13}$$

则相应的解即为

$$P(\alpha,\alpha^*,t) = \frac{1}{\pi\beta(t)}e^{-\frac{1}{\beta(t)}|\alpha-\alpha_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa t}|^2}, \quad \beta(t) = \bar{n}_T(1-e^{-\kappa t}). \tag{6.5.14}$$

我们看到这是一个高斯型分布. 中心点在

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa t}, \tag{6.5.15}$$

随着时间增加，$\alpha$ 从$\alpha_0$ 衰减到原点. 衰减的速率为$\frac{1}{2}\kappa$，与 $\bar{n}_T$ 无关.

$\beta(t)$代表二维分布的宽度. 按(6.5.14)式，初始时该宽度为零(这时(6.5.14)式化为(6.5.13)式)，最后增加到 $\bar{n}_T$. 相应地，$P$ 表示最后值为

$$P(\alpha,\alpha^*,\infty) = \frac{1}{\pi\bar{n}}e^{-|\alpha|^2/\bar{n}_T}, \tag{6.5.16}$$

即单模热光的结果[参见(5.5.63)式].

我们看到 $\beta(t)$与 $\bar{n}_T$ 成正比，因而应来自福克尔-普朗克方程中的扩散项(即(6.5.12)式右方最后一项). 若无此项，则有

$$P(\alpha,\alpha^*,t) = \delta^2(\alpha-\alpha_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa t}), \tag{6.5.17}$$

对应于纯态$|\alpha_0 e^{-\frac{1}{2}\kappa t}\rangle$.

---

① 复数 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$ 实际上含有两个独立变量 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$，$\alpha$ 和 $\alpha^*$ 为这二个独立变量的组合，于是 $\alpha$ 和 $\alpha^*$ 可作为独立变量来微商.

从解(6.5.14)同样可求出光场的相干成分和非相干成分.首先求 $\hat{a}$ 对 $\hat{\rho}$ 的平均,它也就等于 $\alpha$ 对 $P(\alpha,\alpha^*,t)$ 的平均:

$$\langle\hat{a}\rangle_t = \mathrm{tr}\int P(\alpha,\alpha^*,t)\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha = \int \alpha P(\alpha,\alpha^*,t)\mathrm{d}^2\alpha, \quad (6.5.18)$$

而由(6.5.14)式,不难看出

$$\int(\alpha - \alpha_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa t})P(\alpha,\alpha^*,t)\mathrm{d}^2\alpha = 0.$$

从上两式即得出

$$\langle\hat{a}\rangle_t = \alpha_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa t}, \quad (6.5.19)$$

与(6.5.6)式一致.于是相干成分光子数从其初始值 $|\alpha_0|^2$ 以速率 $\kappa$ 衰减到零:

$$\langle\hat{a}^\dagger\rangle_t\langle\hat{a}\rangle_t = |\alpha_0|^2 \mathrm{e}^{-\kappa t}. \quad (6.5.20)$$

总光子数的期望值亦可通过(6.5.14)式求出,结果与(6.5.8)式亦一致.

最后,我们指出,如果初始时光场并非处于纯态 $|\alpha_0\rangle$,但只要其 $P$ 表示存在,就不难从解(6.5.14)构造出相应的解.但若初态不存在 $P$ 表示,则须采用其他表示函数的福克尔-普朗克方程,例如 $Q$ 表示的方程即为

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(\alpha,\alpha^*,t) = \frac{\kappa}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha Q(\alpha,\alpha^*,t)] + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}[\alpha^* Q(\alpha,\alpha^*,t)]\right\} + \kappa(\bar{n}_T + 1)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}Q(\alpha,\alpha^*,t). \quad (6.5.21)$$

即使在 $\bar{n}_T = 0$ 的情况下,其扩散项(上式最后一项)也不为零.

### 3. 随机微分方程

我们先把(6.5.12)式中的变量换成实变量 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$,其中 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 分别为 $\alpha$ 的实部和虚部.利用

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha^*} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2},$$
$$\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2, \qquad \alpha^* = \alpha_1 - \mathrm{i}\alpha_2, \quad (6.5.22)$$

即可将(6.5.12)式化成

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha_1,\alpha_2,t) = \frac{\kappa}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}[\alpha_1 P(\alpha_1,\alpha_2,t)] + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}[\alpha_2 P(\alpha_1,\alpha_2,t)]\right\} + \frac{1}{4}\kappa\bar{n}_T\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)P(\alpha_1,\alpha_2,t). \quad (6.5.23)$$

这时扩散矩阵 $D$ 的表达式为

$$D = \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.5.24}$$

它是一个正定的矩阵.

根据随机过程的理论,福克尔-普朗克方程(6.5.23)等价于下述随机微分方程[①](由于这里的福克尔-普朗克方程是从作用图象中的主方程化出来的,故相应的随机微分方程中不出现自由振动项):

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\kappa}{2}\alpha_1(t) + \sqrt{\frac{\kappa\bar{n}_T}{2}}\eta_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\kappa}{2}\alpha_2(t) + \sqrt{\frac{\kappa\bar{n}_T}{2}}\eta_2(t). \tag{6.5.25}$$

其中 $\eta_1(t)$和 $\eta_2(t)$为随机数,满足

$$\langle\eta_1(t)\rangle = 0, \qquad \langle\eta_2(t)\rangle = 0,$$

$$\langle\eta_i(t)\eta_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t'). \tag{6.5.26}$$

因而$\sqrt{\frac{\kappa\bar{n}_T}{2}}\eta_j(t)$代表随机涨落作用项,正是它引起 $\alpha_j$ 变化中的无规性.(6.6.25)式右方第一项则为阻尼项.

(6.5.25)式的解不难求出,它等于

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t} + \sqrt{\frac{\kappa\bar{n}_T}{2}}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-t')}\eta_1(t')\mathrm{d}t',$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t} + \sqrt{\frac{\kappa\bar{n}_T}{2}}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-t')}\eta_2(t')\mathrm{d}t'. \tag{6.5.27}$$

通过将它代入(6.5.25)式亦可直接验证.从(6.5.27)式即可看出,右方第一项代表$\alpha_j(t)$的平均值,即

$$\langle\alpha_j(t)\rangle = \alpha_j(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t}, \tag{6.5.28}$$

而(6.5.27)式右方第二项代表涨落作用所导致的对平均值的偏离.

利用(6.5.26)式还可从(6.5.27)式求出

$$\langle\alpha_j^2(t)\rangle = \alpha_j^2(0)\mathrm{e}^{-\kappa t} + \frac{\kappa\bar{n}_T}{2}\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^t \mathrm{d}t''\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-t'+t-t'')}\langle\eta_j(t')\eta_j(t'')\rangle$$

---

① 在我们讨论的情况,扩散矩阵 $D$ 为常数矩阵与 $\alpha_1,\alpha_2$ 无关[见(6.5.24)式],因此对应的随机微分方程不区分是 Ito 型还是 Stratonovich 型.否则同一个福克尔-普朗克方程将对应两个随机微分方程.

$$= \alpha_j^2(0)\mathrm{e}^{-\kappa t} + \frac{\kappa \bar{n}_T}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\kappa(t-t')}\mathrm{d}t' = \alpha_j^2(0)\mathrm{e}^{-\kappa t} + \frac{1}{2}\bar{n}_T(1-\mathrm{e}^{-\kappa t}).$$

于是有

$$\langle \alpha^*(t)\alpha(t)\rangle = \langle \alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t)\rangle = \alpha^*(0)\alpha(0)\mathrm{e}^{-\kappa t} + \bar{n}_T(1-\mathrm{e}^{-\kappa t}). \tag{6.5.29}$$

(6.5.28)和(6.5.29)式与(6.5.6)和(6.5.8)式一致.

这种理论表述形式的一个重要优点是,可直接求出双时平均值:

$$\begin{aligned}\langle \alpha_i(t_1)\alpha_j(t_2)\rangle =& \alpha_i(0)\alpha_j(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1+t_2)} \\ &+ \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_T\int_0^{t_1}\mathrm{d}t'_1\int_0^{t_2}\mathrm{d}t'_2\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1-t_1'+t_2-t_2')}\langle \eta_i(t'_1)\eta_j(t'_2)\rangle \\ =& \alpha_i(0)\alpha_j(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1+t_2)} \\ &+ \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_T\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_1'\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_2'\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1-t_1'+t_2-t_2')}\delta_{ij}\delta(t_1'-t_2').\end{aligned}$$

在进一步计算第二项时,要区别 $t_1>t_2$ 和 $t_2>t_1$ 两种情形.当 $t_1>t_2$ 时,要先对 $t'_1$ 积分,以保证对每个 $t'_2$ 都位于 $t'_1$ 的积分范围($0\rightarrow t_1$)之内.然后再对 $t'_2$ 积分,这样得出的结果为

$$\langle \alpha_i(t_1)\alpha_j(t_2)\rangle = \alpha_i(0)\alpha_j(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1+t_2)} + \frac{1}{2}\bar{n}_T\delta_{ij}\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1-t_2)}(1-\mathrm{e}^{-\kappa t_2}),t_1>t_2. \tag{6.5.30a}$$

反过来,当 $t_2>t_1$ 时,要先对 $t'_2$ 积分,结果即为

$$\langle \alpha_i(t_1)\alpha_j(t_2)\rangle = \alpha_i(0)\alpha_j(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t_1+t_2)} + \frac{1}{2}\bar{n}_T\delta_{ij}\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}|t_2-t_1|}(1-\mathrm{e}^{-\kappa t_1}),t_2>t_1, \tag{6.5.30b}$$

在稳恒阶段($t_1\gg\frac{1}{\kappa},t_2\gg\frac{1}{\kappa}$),则结果可统一地表为(下脚码 $S$ 代表稳恒值)

$$\langle \alpha_i(t_1)\alpha_j(t_2)\rangle_S = \frac{1}{2}\bar{n}_T\delta_{ij}\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}|t_1-t_2|}, \tag{6.5.31}$$

这时只与 $t_1-t_2$ 的绝对值相关.双时平均值(6.5.30)称为 $\alpha_i$ 与 $\alpha_j$ 之间的一阶相关函数.相关函数是量子光学中的重要概念,我们将在下一章作较详细的讨论.

最后顺带指出,对于二能级原子,虽然也可定义相应的特征函数如

$$\chi_N = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^*\hat{\sigma}_+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\hat{\sigma}_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{\sigma}_-}). \tag{6.5.32}$$

再通过主方程求它所满足的方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_N = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^*\hat{\sigma}_+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\hat{\sigma}_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{\sigma}_-}\right),$$

最后利用分布函数 $P(u,u^*,v)$ 与 $\chi_N(\xi,\xi^*,\eta)$ 间的傅里叶变换关系求出 $P(u,u^*,v)$ 所满足的方程，其形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}P = L\left(u,u^*,v,\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u^*},\frac{\partial}{\partial v}\right)P,$$

但由于 $\hat{\sigma}_-$、$\hat{\sigma}_+$、$\hat{\sigma}_3$ 遵从的代数与 $\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ 遵从的代数不同，上式右方含有 $v$ 的无穷次微商. 从而难于处理. 只是对于大量原子的集合，在大 $N$（$N$ 为原子数）的极限下，才可以引入近似的只含二阶微商的福克尔-普朗克方程.

# 第七章　光学测量和光场相关函数　光场的挤压相干态

测量在光学中具有重要地位,光学中一些重要的物理量实际上是根据测量来定义的,一些重要的概念也是联系着测量来引入的.光强和相关函数就是这样的例子.相关函数在经典光学中就已引入,用来描述光场的相干和统计性质.在量子光学中也可以定义类似的量子相关函数.在本章中我们将着重讨论一阶和二阶量子相关函数的物理意义.从"光子关联"的角度来看,光场可分为"光子群聚型","随机散布型"和"反群聚型"三类.最后一类是量子光学中所特有的,经典光学没有相应的情况,因而这类光场将称为特征性量子光场.挤压相干态(squeezed coherent state)也是一种重要的特征性量子光场,在本章中我们将予以专门的讨论.

本章将限于自由光场,在量子理论部分将采用作用图象.

## §7.1　光场一阶相关函数和光强测量的量子理论

杨氏干涉实验是光学中最基本的实验之一.通过它我们可以得到光波波长、光束的相干长度(或相干时间)、光场的横向相干范围等方面的知识.我们将说明杨氏干涉就是与光场的一阶相关函数相联系.光的干涉主要涉及光场相位的相关.经典光学中光的相干性通常只限于相位的相干,因而将完全由一阶相关函数决定.

在本节中我们将对一些具体光场的一阶相关函数进行计算.

光学实验多半都离不开光强的测定,因而我们在说明经典光学中光强的定义以后还将讨论光强测量的量子理论.通过量子光强定义与经典光强定义间的对应关系,就可以从经典一阶相关函数过渡到量子一阶相关函数.

### 1. 经典光学对光场的统计性描述　光场的瞬时强度

在经典光学中,光场也分纯态和统计混合态.纯态光场指矢势或电场强度为一个确定的时空函数.这里的"确定性"是相对于"随机性"而言.换句话说,纯态光场对应于某个确定的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 或 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$.混合态光场是指有一系列 $\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{x},t)$ 或 $\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{x},t)$,各以一定的概率 $P_l$ 出现在光场中.因而混合态光场将用一个经典的统计系综来描述.形式上,我们也可把纯态光场看作混合态光场的特例,即标号 $l$ 只取一个值.这样在数学上可以统一地处理,只是最后作物理讨论时再加以区分.

首先,我们来考察经典光学中光场在 $\boldsymbol{x}$ 点 $t$ 时刻的强度 $I(\boldsymbol{x},t)$ 的意义.虽然

它是瞬时强度,但并不简单地就用瞬时能流密度$\frac{c}{4\pi}E^2(\boldsymbol{x},t)$表示,因为其中将出现以光振动频率的变化,这种频率太高,以这种频率变化的瞬时强度不具有测量上的意义.在许多情况下,它也不是我们所感兴趣的物理量.

为了定义光学中实用的 $I(\boldsymbol{x},t)$,我们将把 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$对 $t$ 作傅里叶展开.并把 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$表示成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x},t), \tag{7.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$代表正频率部分[即含有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(\omega>0)$因子的各项的和],$\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)$代表负频率部分[即含有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}(\omega>0)$因子的各项的和].由于 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$实函数,故有

$$\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)^*, \tag{7.1.2}$$

因此

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 2\mathrm{Re}\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t).$$

在经典光学中,纯态光场的瞬时强度的定义为

$$I(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{2\pi}\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t). \tag{7.1.3}$$

它是$\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$中除去了以光频交变的成分"$\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}^{(+)}\cdot\boldsymbol{E}^{(+)})$和$\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}^{(-)},\boldsymbol{E}^{(-)})$"后的结果.不难看出由(7.1.3)式定义 $I(\boldsymbol{x},t)$仍像瞬时能流密度一样保持其恒正性.

对于单频的光场,这样定义的强度 $I$ 将不随时间变化.例如平面行波情况,$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{e}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$,按(7.1.3)式相应的 $I$ 就等于$\frac{c}{8\pi}E_0^2$,而在驻波情况 $\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{e}_0(\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})(\cos\omega t)$,相应的 $I$ 为$\frac{c}{8\pi}E_0^2\cos^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$.对一般情况,虽然 $I$ 是$t$ 的函数但变化要比光频振动慢得多.在下面讨论光强测量的量子理论时,可以看到实测的光强正好与(7.1.3)式的值相对应[参见(7.1.38)式].

对于混合态光场,相应地有

$$I(\boldsymbol{x},t) = \sum_l \mathscr{I}_l(\boldsymbol{x},t)P_l \equiv \langle\mathscr{I}(\boldsymbol{x},t)\rangle, \tag{7.1.4}$$

其中

$$\mathscr{I}_l(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{2\pi}\boldsymbol{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}_l^{(+)}(\boldsymbol{x},t), \tag{7.1.5}$$

取期望值是对该混合态的统计系综作平均,因而 $I(\boldsymbol{x},t)$是指系综平均的强度.

作为例子,我们先看具有确定波矢 $\boldsymbol{k}$ 和偏振方向$\boldsymbol{e}$ 的自由行波,但其振幅具有

一定的概率分布.对于每个振幅值,电场 $\boldsymbol{E}^{(+)}$ 可表示为①

$$\boldsymbol{E}_{\alpha}^{(+)}(\boldsymbol{x}t) = \alpha\left[\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\boldsymbol{e}_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}\right]. \tag{7.1.6}$$

我们用振幅参数 $\alpha$(它是一个复数 $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2$)来代替 $l$ 作为 $\boldsymbol{E}^{(+)}$ 的指标,设它在 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面中有一个概率分布 $P(\alpha)$. 令 $\mathrm{d}^2\alpha=\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2$,则相应的 $I(\boldsymbol{x},t)$ 即为

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{x},t) &= \frac{c}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\boldsymbol{E}_{\alpha}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) \\ &= \frac{\hbar\omega c}{V}\int \mathrm{d}^2\alpha\,|\,\alpha\,|^2 P(\alpha), \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

其值与 $\boldsymbol{x},t$ 都无关,并等于能流密度的周期平均值.

如果波矢 $\boldsymbol{k}$ 和偏振 $\boldsymbol{e}$ 的取值并不确定,而有一定的分布,结果仍然相似.这时指标 $l$ 将包括$(\boldsymbol{k},s,\alpha)$,$s$ 为偏振指标,$P_l$ 可写成 $P_{\boldsymbol{k}s}(\alpha)$,相应地有

$$I(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{2\pi}\int\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{s=1}^{2}P_{\boldsymbol{k}s}(\alpha)\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}s\alpha}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}s\alpha}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^2\alpha, \tag{7.1.8}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}s\alpha}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 仍由(7.1.6)式表示.上式同样可化成

$$I(\boldsymbol{x},t) = \frac{\hbar c^2}{V}\sum_{\boldsymbol{k},s}\int \mathrm{d}^2\alpha P_{\boldsymbol{k}s}(\alpha)\,|\,\alpha\,|^2\,|\,\boldsymbol{k}\,|,$$

仍然是与 $\boldsymbol{x},t$ 无关的常数.

但若 $\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 是各个$(\boldsymbol{k},s,\alpha)$平面波的相干叠加,情况就不同了.这时 $\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{E}_{\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}s}\alpha_{\boldsymbol{k}s}\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\boldsymbol{e}_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{7.1.9}$$

其中 $\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\}$ 为所有 $\alpha_{\boldsymbol{k}s}$ 构成的一个集合.若每个集合 $\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\}$ 出现的概率为 $P(\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\})$,则相应的光强即为

$$I(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{2\pi}\sum_{\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\}}P(\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\})\boldsymbol{E}_{\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\}}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}_{\{\alpha_{\boldsymbol{k}s}\}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t). \tag{7.1.10}$$

这时光强 $I$ 一般将与 $\boldsymbol{x},t$ 有关.也就是说,如果每个纯态成分的 $\boldsymbol{E}^{(+)}(x,t)$ 为不同频率的波的相干叠加,$I$ 将会是时间的函数.

### 2. 杨氏干涉实验和一阶相关函数

我们仍在经典光学的范畴内来讨论.先看入射波为纯态单色平面波的情况.当

① 关于(7.1.6)式方括号内的系数取值参见(1.3.33)式.

该平面波投射到带有两个狭缝的屏上时,如图 7.1.1,由波的衍射效应,在后屏幕上 $\boldsymbol{x}$ 点 $t$ 时刻的 $\boldsymbol{E}_s^{(+)}$,可表示为前屏幕上两个狭缝(设位于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$)处在 $t_1=t-\frac{r_1}{c}$ 和 $t_2=t-\frac{r_2}{c}$ 时刻的光场的叠加.即

$$\boldsymbol{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{x},t)=\beta_1\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)+\beta_2\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2,t_2), \tag{7.1.11}$$

图 7.1.1　杨氏干涉实验示意图

其中 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的缓变函数.于是后屏上 $\boldsymbol{x}$ 点 $t$ 时刻的衍射光强为

$$\begin{aligned}I_s(\boldsymbol{x},t)=&\mid\beta_1\mid^2 I(\boldsymbol{x}_1,t_1)+\mid\beta_2\mid^2 I(\boldsymbol{x}_2,t_2)\\&+\frac{c}{\pi}\mid\beta_1\beta_2\mid\left(\mathrm{Re}\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)\right).\end{aligned}$$

由于 $I(\boldsymbol{x}_1,t_1)$和 $I(\boldsymbol{x}_2,t_2)$等于常数 $I$.故亮纹和暗纹主要由$[\mathrm{Re}\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)]$决定.对于统计混合态的入射平面波,只须对上式作系综平均,结果即为

$$I_s(\boldsymbol{x},t)=(\mid\beta_1\mid^2+\mid\beta_2\mid^2)\langle I\rangle+\frac{c}{\pi}\mid\beta_1\beta_2\mid\mathrm{Re}\langle\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)\rangle. \tag{7.1.12}$$

我们将光场的一阶相关函数定义成下述 3×3 矩阵:

$$G_{jl}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}'_1,t'_1)=\langle E_j^{(-)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)E_l^{(+)}(\boldsymbol{x}'_1,t'_1)\rangle, \tag{7.1.13}$$

由上可见它是描述光场相干性的一个重要物理量,杨氏干涉实验中的条纹可看作是它的一个具体显示.我们并定义一阶相关度为

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t;\boldsymbol{x}'_1,t'_1)&=\frac{c}{2\pi}\frac{G^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}'_1,t'_1)}{\sqrt{I(\boldsymbol{x}_1,t_1)I(\boldsymbol{x}'_1,t'_1)}}\\&=\frac{G^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}'_1,t'_1)}{\sqrt{G(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1,t_1)G(\boldsymbol{x}'_1,t'_1;\boldsymbol{x}'_1,t'_1)}},\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

其中

$$G^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}'_1,t'_1)=\sum_j G_{jj}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}'_1,t'_1), \tag{7.1.15}$$

即一阶相关函数三个对角元的和.光场强度 $I(\boldsymbol{x},t)$将正比于 $G^{(1)}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t)$:

$$I(\boldsymbol{x},t)=\frac{c}{2\pi}G^{(1)}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t). \tag{7.1.16}$$

由于 $\gamma^{(1)}$ 中消除了强度大小的影响,其值更能反映光场的相干程度.从(7.1.13)和

(7.1.14)式可以看出$|\gamma^{(1)}|\leqslant 1$.

### 3. 统计稳恒的平行光　强度的频谱分布

统计稳恒光场是指其每个纯态成分的光强可能是时间的函数[如(7.1.10)式情况],但经过系综平均后却又化成与 $t$ 无关的常数.具体条件参见下文.

平行光场具有确定的传播方向,我们可以取该方向为 $x$ 轴;这时(7.1.9)式即化为

$$\boldsymbol{E}^{(+)}(x,t) = \sum_{ks}\alpha_{ks}\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_s, \tag{7.1.17}$$

式中的 $V$ 为光子的归一化体积(尽管行波光场并不是局限在固定的空间内).设 $V=L^3$,则 $k$ 的取值为

$$k = \frac{2n\pi}{L}, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{7.1.18}$$

由于光场是统计混合态,因而计算 $G^{(1)}$要作系综平均:

$$G^{(1)}(x_1,t_1;x_1',t_1') = \frac{2\pi\hbar}{V}\sum_{kk's}\sqrt{\omega\omega'}\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{k's}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_1+\mathrm{i}k'x_1'+\mathrm{i}\omega t_1-\mathrm{i}\omega't_1'}.$$

相应地,光强可表示为

$$I(x,t) = \frac{c}{2\pi}G^{(1)}(x,t;x,t) = \frac{\hbar c}{V}\sum_{kk's}\sqrt{\omega\omega'}\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{k's}\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x-\mathrm{i}(\omega-\omega')t},$$

统计稳恒的 $I$ 应与 $t$ 无关,这就要求

$$\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{k's}\rangle = \langle\alpha_{ks}^*\alpha_{ks}\rangle\delta_{kk'}. \tag{7.1.19}$$

代回 $I(x,t)$中即得

$$I = \frac{\hbar c}{V}\sum_{ks}\omega\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{ks}\rangle. \tag{7.1.20}$$

与此相应 $G^{(1)}(x_1,t_1;x_1',t_1')$化为

$$G^{(1)}(x_1,t_1;x_1',t_1') = \frac{2\pi\hbar}{V}\sum_{ks}\omega\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{ks}\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau},$$

$$\tau \equiv t_1 - t_1' - \frac{1}{c}(x_1 - x_1'). \tag{7.1.21}$$

我们看到 $G^{(1)}$对 $x_1$、$t_1$、$x_1'$、$t_1'$ 的依赖全都通过单一的变量 $\tau$.

(7.1.18)式中 $L$ 的值是人为取定的,如果将它取得足够地大,这样上两式中对 $k$ 的求和都可化为对 $\omega$ 的积分.由于 $\omega$ 的取值为$\frac{2n\pi c}{L}$,故 $\mathrm{d}\omega$ 范围内的状态数即为$\frac{L}{2\pi c}\mathrm{d}\omega$.这样稳恒光场的强度和一阶相关函数就可表示为

$$I = \int_0^\infty I(\omega)\mathrm{d}\omega, \tag{7.1.22}$$

$$G^{(1)}(x_1,t_1;x_2,t_2) \equiv G^{(1)}(\tau) = \frac{2\pi}{c}\int_0^\infty I(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega, \tag{7.1.23}$$

其中 $\tau = t_1 - t_2 - \frac{1}{c}(x_1 - x_2)$，而

$$I(\omega) = \frac{L}{2\pi V}\hbar\omega\sum_{s=1}^{2}\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{ks}\rangle = \frac{1}{2\pi A}\hbar\omega\sum_{s=1}^{2}\langle\alpha_{ks}^*\alpha_{ks}\rangle \tag{7.1.24}$$

称为光强的谱密度，其值已与 $L$ 无关，只与横截面 $A$ 有关(这是合理的).

从(7.1.23)式通过反演即得出

$$I(\omega) = \frac{c}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}G^{(1)}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau, \qquad \omega > 0. \tag{7.1.24a}$$

此式亦可写成

$$I(\omega) = \frac{c}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle E^{(-)}(x,t),E^{(+)}(x,0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \quad \omega > 0. \tag{7.1.24b}$$

它表明(统计)稳恒光的强度谱等于一阶相关函数的傅里叶变换(除常数$\frac{c}{2\pi}$外). 此结果与涨落理论中的威纳-亨钦定理相当(参见§8.5)，在§6.3第4小节中也已提到(见(6.3.30)式下面的第四步). 反过来，只要测出稳恒光场的谱密度 $I(\omega)$ 就可通过(7.1.23)式求出其一阶相关函数 $G^{(1)}(\tau)$. 下面来看两个例子.

对于洛伦兹谱型的稳恒准单色波(即有谱宽的谱线)，

$$I(\omega) = I_0\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}, \tag{7.1.25}$$

代入(7.1.23)式求积分时，形式上可将 $\omega$ 的积分限推广为从 $-\infty$ 到 $+\infty$(因 $I(\omega_0)$ 在 $|\omega-\omega_0|$ 大时，以 $(\omega-\omega_0)^2$ 趋于零). 这样即可用回路积分来计算 $G^{(1)}(\tau)$. 结果为

$$G^{(1)}(\tau) = \frac{2\pi}{c}I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau - \frac{1}{2}\gamma|\tau|}. \tag{7.1.26a}$$

相应的一阶相关度为

$$\gamma^{(1)}(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau - \frac{1}{2}\gamma|\tau|} \tag{7.1.26b}$$

由此可见当 $|\tau| \gg \frac{2}{\gamma}$ 使得 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma|\tau|} \ll 1$ 时，相干性即消失. 因而$\frac{2}{\gamma}$称为相干时间(对同一点 $\boldsymbol{x}$ 的光场而言)，$\frac{2c}{\gamma}$称为纵向相干长度(对同一时刻的光场而言). 我们看到谱宽与相干时间有着密切的联系.

再看具有高斯谱型的准单色稳恒光场，它的强度谱为

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}\gamma} e^{-(\omega-\omega_0)^2}/2\gamma^2, \tag{7.1.27}$$

由此可求出

$$G^{(1)}(\tau) = \frac{2\pi}{c} I_0 e^{i\omega_0\tau - \frac{1}{2}\gamma^2\tau^2},$$
$$\gamma^{(1)}(\tau) = e^{i\omega_0\tau - \frac{1}{2}\gamma^2\tau^2}. \tag{7.1.28}$$

与洛伦兹谱型的结果相比，在 $|\tau|$ 小时 $(\gamma|\tau|<1)$，此处 $\gamma^{(1)}$ 的绝对值与 1 偏离较小，但在 $|\tau|$ 大时 $(\gamma|\tau|\gg 1)$ $\gamma^{(1)}$ 的绝对值衰减较快.

**4. 光强测量的量子理论**

光强测量是光学中最基本的测量，在许多光学实验中都要测量光的强度. 从物理上看，所有光强测量都基于光与原子(分子)或介质的作用，亦即通过原子或介质吸收光所产生效应的强弱来度量光的强度. 在本节中我们将从量子理论的角度来考察这种测量，并以光电效应为例来作具体讨论. 相应的检测器就是光电管或光电放大管. 通过这一讨论，将自然地导出量子光强的定义.

光电效应是指原子或介质在吸收光子后放出电子的效应. 以原子为例，就是其中的束缚电子在光的作用下跃迁到连续谱的状态. 实际测量的是这种自由电子的产生率. 作为简单的理想情况，我们设检测器中只有一个原子.

设被检测的是准单色的纯态自由光场 $|R\rangle$，初始时原子处于基态 $|\phi_a\rangle$. 于是整个系统的初态就是 $|\phi_a\rangle|R\rangle$. 我们先来求：通过光吸收，系统跃迁到 $|\phi_b\rangle|R'\rangle$ 的概率，其中 $|\phi_b\rangle$ 表示原子某个离化态(具有连续能谱)，从而打出的电子可被检测，$|R'\rangle$ 为光场任一个状态.

如本章引言中所述，我们将采用作用图象来处理. 在电偶极近似下，相互作用哈密顿量可取为①

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = -\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{d}}(t) \tag{7.1.29}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 代表原子所在位置，$\hat{\boldsymbol{d}}(t)$ 为原子的电偶极算符：

$$\hat{\boldsymbol{d}}(t) = \int \hat{\phi}^\dagger(\boldsymbol{x}'t)(-e\boldsymbol{x}')\hat{\phi}(\boldsymbol{x}',t)\mathrm{d}^3x'. \tag{7.1.30}$$

(7.1.29)式具有电偶极子与电场作用能的形式.

---

① 本来在电偶极近似下，$\hat{H}_{\text{int}}(t) = -\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{d}}(t)}{\mathrm{d}t}\right)$，在略去全微商项后即化为(7.1.29)式.

在一级微扰近似下，从初始到 $t$ 时刻，系统跃迁到 $|\phi_b\rangle|R'\rangle$ 状态的概率幅为

$$C_{bR'}(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\langle\phi_b\mid\langle R'\mid H_{\mathrm{int}}(t')\mid\phi_a\rangle\mid R\rangle\mathrm{d}t'$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\langle R'\mid\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\mid R\rangle\langle\hat{\boldsymbol{d}}\rangle_{ba}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ba}t'}\mathrm{d}t',\quad(7.1.31)$$

其中 $\omega_{ba}=\frac{1}{\hbar}(E_b-E_a)$，$\langle\hat{\boldsymbol{d}}\rangle_{ba}=\int\phi_b^*(\boldsymbol{x}')(-e\boldsymbol{x}')\phi_a(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$. 由于此过程是光子吸收过程，故(7.1.29)式中的 $\hat{\boldsymbol{E}}$ 只取其中的 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}$. 对上式取绝对值平方，得

$$|C_{bk'}(t)|^2=\sum_{j,l}\langle\hat{d}_j\rangle_{ba}\langle d_l\rangle_{ba}^*\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^t\mathrm{d}t''\langle R\mid\hat{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t'')\mid R'\rangle$$

$$\langle R'\mid\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\mid R\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ba}(t'-t'')}.$$

在实际测量中并不测定 $|R'\rangle$ 态，因此应对所有 $|R'\rangle$ 态求和. 并可把求和范围扩大到光场全部状态(因对"无贡献"的态 $|R'\rangle$，$\langle R'|\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)|R\rangle$ 自动等于零)再利用 $\sum\limits_{\text{光场全部态}}|R'\rangle\langle R'|=1$，即得出从零到 $t$ 时刻原子激发到 $\phi_b$ 的概率为

$$P_b(t)=\sum_{jl}\frac{1}{\hbar^2}\langle\hat{d}_j\rangle_{ba}\langle\hat{d}_l\rangle_{ba}^*\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^t\mathrm{d}t''$$

$$\langle R\mid\hat{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t'')\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\mid R\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ba}(t'-t'')}.\quad(7.1.32)$$

另外，最后测量的是光电流(或光电子的数目)$\phi_b$ 只须是原子离解态并不区分具体是哪个状态，因此我们还要对所有连续谱区的原子态求和. 如将表征 $\phi_b$ 的状态参量取为$(E_b,\alpha_b)$，$\alpha_b$ 代表除能量以外的所有其他参量，那么我们应对 $\alpha_b$ 求和对 $E_b$ 积分(也就是对 $\omega_{ba}$ 积分)，结果可表为

$$P(t)=\frac{c}{4\pi^2}\int_{\omega_I}^{\omega_M}\mathrm{d}\omega_{ba}\sum_{jl}\beta_{lj}(\omega_{ba})\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^t\mathrm{d}t''$$

$$\langle R\mid\hat{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t'')\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\mid R\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ba}(t'-t'')},\quad(7.1.33)$$

其中$\frac{c}{4\pi^2}\beta_{lj}(\omega_{ba})$代表$\frac{1}{\hbar^2}\langle\hat{d}_l\rangle_{ba}^*\langle\hat{d}_j\rangle_{ba}$对 $\alpha_b$ 求和后再乘上单位角频率中连续谱能级的数目，$\hbar\omega_I$ 代表原子的离化能，$\omega_M$ 为检测频率的上限(如电偶极近似的频率上限)，从而 $\omega_I$ 到 $\omega_M$ 为检测器的测量范围.

设入射光场的谱宽为 $\gamma$，它比检测范围 $\omega_M-\omega_I$ 小得多，而且不处在测量范围的边缘区域(这是通常使用检测器的条件). 在这种情况下，频率积分的实际范围只是从 $\omega-\frac{1}{2}\gamma$ 到 $\omega+\frac{1}{2}\gamma$，其中 $\omega$ 为入射光的频率. 这时 $\beta_{lj}(\omega_{ba})$可作为 $\beta_{lj}(\omega)$提到积分号的外面(因为 $\beta_{lj}$ 是 $\omega_{ba}$ 的缓变函数). 于是对 $\omega_{ba}$ 的积分即可近似地求出，结果为 $2\pi\delta(t'-t'')$. 再对 $t''$积分就将(7.1.33)式化为

$$P(t)=\frac{c}{2\pi}\sum_{jl}\beta_{lj}(\omega)\int_0^t \mathrm{d}t'\langle R\mid \hat{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t')\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\mid R\rangle. \tag{7.1.34}$$

从而光电子的发射率

$$W(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)=\frac{c}{2\pi}\sum_{jl}\beta_{lj}(\omega)\langle R\mid \hat{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\mid R\rangle. \tag{7.1.35}$$

对于各向同性的检测器(例如实际上检测器中有大量原子.这时对原子平均后检测器即为各向同性的),

$$\beta_{lj}(\omega)=\beta(\omega)\delta_{lj}, \tag{7.1.36}$$

(7.1.35)式即化作

$$W(t)=\beta(\omega)I(\boldsymbol{x},t), \tag{7.1.37a}$$

其中

$$I(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{c}{2\pi}\langle R\mid \hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\mid R\rangle. \tag{7.1.37b}$$

它就代表通过光电子发射率来度量的量子光强.检测器的灵敏度和频谱响应特性则反映在检测系数 $\beta(\omega)$ 中.(7.1.37b)式正是(7.1.3)式的量子对应.

在以上讨论中,被检测的光场假设为纯态,如果它是统计混合态,则应将上面所得的结果作系综平均.这样(7.1.35)和(7.1.37b)式化为

$$W(t)=\frac{c}{2\pi}\sum_{jl}\beta_{lj}(\omega)\mathrm{tr}[\hat{\rho}\,\hat{E}_l^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{x},t)], \tag{7.1.38a}$$

$$I(\boldsymbol{x},t)=\frac{c}{2\pi}\mathrm{tr}[\hat{\rho}\,\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x}t)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)]. \tag{7.1.38b}$$

$\hat{\rho}$ 代表光场的密度算符.如果是单模光场(模函数为 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{x},t)$),而且 $P$ 表示存在,则有

$$I(\boldsymbol{x},t)=\frac{c}{2\pi}\boldsymbol{\varepsilon}^{(-)}(\boldsymbol{x}t)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{x}t)\int \mathrm{d}^2\alpha\mid\alpha\mid^2 P(\alpha). \tag{7.1.39}$$

## 5. 一阶量子相关函数和光场能量的谱分布

从经典光强与量子光强间的对应关系,我们即可从经典的一阶相关函数得出量子一阶相关函数①:

$$G_{jl}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1')=\mathrm{tr}[\hat{\rho}\,\hat{E}_j^{(-)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)\hat{E}_l^{(+)}(\boldsymbol{x}_1',t_1')]. \tag{7.1.40}$$

---

① 虽然在本章我们只讨论自由电磁场情况,但定义式(7.1.40)可推广到一般情况.只须将 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{E}^{(\pm)}$ 都取为海森伯图象中的算符.$\hat{E}^{(+)}$ 和 $\hat{E}^{(-)}$ 分别指含吸收和放射算符的部分.

在杨氏实验中，既然观测的是光强分布，在量子理论中，干涉条纹就将由一阶量子相关函数来确定，情况与经典理论相似.

一阶量子相关度 $\gamma^{(1)}$ 的定义也可从经典定义过渡过来，只需将经典的相关函数和光强换成量子相关函数和光强即可.

我们在第3小节中曾就稳恒的平行光束讨论了光强的谱函数与经典一阶相关函数间的关系，此关系在量子理论中仍然成立，只须将各经典值对应成量子值即可. 下面我们来给出一般的自由光场(不一定是平行光束也不要求是稳恒的)能量的谱函数与一阶量子相关函数间的关系.

一般光场能量 $U$ 可表示为 $\mathrm{tr}(\hat{U}\hat{\rho})$，其中 $\hat{U}=\sum_{ks}\hbar\omega\hat{n}_{ks}$. 在将"对 $\boldsymbol{k}$ 的求和"化成积分后，有

$$U=\frac{V}{(2\pi)^3}\sum_s\int \mathrm{d}^3k\hbar\omega\langle\hat{n}_{ks}\rangle, \tag{7.1.41}$$

其中

$$\langle\hat{n}_{ks}\rangle=\mathrm{tr}(\hat{n}_{ks}\hat{\rho}).$$

在自由场情况，$\langle\hat{n}_{ks}\rangle$和 $U$ 都是与 $t$ 无关的数.

(7.1.41)式可以写成

$$U=\int_0^\infty u(\omega)\mathrm{d}\omega, \tag{7.1.42a}$$

$$u(\omega)=\frac{V}{8\pi^3c^3}\hbar\omega^3\sum_s\int \mathrm{d}\Omega\langle\hat{n}_{ks}\rangle, \tag{7.1.42b}$$

$u(\omega)$称为光场能量的谱函数.

利用 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)$和 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$按平面波的展开式，不难得出

$$\int\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\mathrm{d}^3x=2\pi\sum_{ks}\hbar\omega\hat{n}_{ks}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}. \tag{7.1.43}$$

同(7.1.15)式一样定义 $G^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1')$ 为 $\sum_j G_{jj}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1')$，利用(7.1.43)式即得出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int G^{(1)}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t')\mathrm{d}^3x&=\frac{1}{2\pi}\int\langle\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t')\rangle\mathrm{d}^3x\\&=\sum_{ks}\hbar\omega\langle\hat{n}_{ks}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\end{aligned} \tag{7.1.44}$$

像(7.1.41)式一样将对 $\boldsymbol{k}$ 求和化成积分，再利用(7.1.42b)式就得出我们所要的结果：

$$\frac{1}{2\pi}\int G^{(1)}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t')\mathrm{d}^3x = \int_0^\infty u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega. \tag{7.1.45}$$

此式表明,对于任意的自由光场,$G^{(1)}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t')$体积分的傅里叶变换与光场能量的谱函数 $u(\omega)$成正比(比例常数为 $2\pi$).

最后,我们对一阶相关度的取值作进一步的讨论.首先来看具有固定偏振的单模光.对于这种单模光,$\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$中只含一项 $\hat{a}\boldsymbol{e}\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,其中 $\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x})$表示其空间分布.我们将证明:无论 $\varepsilon^{+}(\boldsymbol{x})$是怎样的函数,也无论光场是纯态还是统计混合态,一阶相关度 $\gamma^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1')$的绝对值都等于 1.这也是$|\gamma^{(1)}|$的最大可能值.

对于单模纯态(包括相干态,光子数本征态 …),$|\rangle$ 可表示成$\sum c_n|n\rangle$,于是

$$\begin{aligned}G^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1') &= \sum_{mn} c_m^* c_n\langle m|\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(x_1,t_1)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x}_1',t_1')|n\rangle \\ &= \sum_{mn} c_m^* c_n\langle m|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{x}_1)\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x}_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_1')} \\ &= \bar{n}\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{x}_1)\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x}_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_1')}.\end{aligned} \tag{7.1.46}$$

其中 $\bar{n} = \sum_n n|c_n|^2$.相应地

$$I(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{2\pi}G^{(1)}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{2\pi}\bar{n}\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{x})\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x}). \tag{7.1.47}$$

因为 $\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{x})$与 $\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x})$互为复共轭,由上两式就得出

$$\gamma^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1') == \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_1')}, \tag{7.1.48}$$

上式所给出的 $\gamma^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1')$的绝对值确为 1.(7.1.46)式的一个特例是$|\rangle = |n\rangle$.尽管光子数本征态$|n\rangle$任何时刻的相位是随机分布的,但按以上的讨论仍可产生杨氏干涉.这意味着其不同时间的相位值具有确定的关联,即其差值是确定的,不是随机的.

对于单模混合态,$\hat{\rho} = \sum_{mn}\rho_{mn}|m\rangle\langle n|$,类似地可得出

$$\begin{aligned}G^{(1)}(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x}_1',t_1') &= \sum_{mn}\rho_{mn}\langle m|\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x}_1',t_1')|n\rangle \\ &= \bar{n}\varepsilon^{(-)}(\boldsymbol{x}_1)\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x}_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t')},\end{aligned} \tag{7.1.49}$$

与(7.1.46) 式的差别仅在于,这里的 $\bar{n} = \sum_n n\rho_{nn}$.因而同样可得出(7.1.48) 式.

利用 Schwarz 不等式,可以一般性地证明(具体证明从略)

$$|\gamma^{(1)}|\leqslant 1.$$

这意味着 1 是$|\gamma^{(1)}|$的最大可能值.通常把$|\gamma^{(1)}| = 1$ 的光场称为一阶完全相干光

场.上面的讨论表明,具有确定偏振基矢的单模光场,不论模函数 $\varepsilon^{(\pm)}(\boldsymbol{x})$ 为何形式也不论它是纯态还是统计混合态,都是一阶完全相干的.

再来看一个较一般的情况,设 $|a\rangle$ 为 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 的本征态(即多模相干态),其本征值为 $a\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}$,即

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\mid a\rangle = a\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}\mid a\rangle,$$

其中 $\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 只含正频项的叠加(但不必是单一频率).当 $a$ 的值具有一个分布,即光场的密度算符为

$$\hat{\rho} = \int P(a)\mid a\rangle\langle a\mid \mathrm{d}^2 a$$

时,它的一阶相关度的绝对值也等于 1.证明同前,不再重复.读者应注意这里所讨论的情况与第 3 小节中稳恒的准单色光在物理上的差别:在这里,光场 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 是由形如 $a\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}$ 的成分所构成,其中所有成分在时空分布上是相似的,即都正比于 $\varepsilon^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}$,只是 $a$ 的取值不同.每个成分始终都是一阶相干的(无论 $t$ 与 $t'$ 相差多大),导致了光场总体也是一阶相干的.第 3 小节(7.1.25)式以下讨论的情况则不同.它相应的成分是有衰减的单色光,但光场整体却又是稳恒的,这意味着整个光场是由许多互不相干的有限长的波列所组成.每个(衰减的)波列自己是一阶相干的,但因只有有限的尺度,它与随后的所有波列就不相干了(因为这些波列系由"彼此相同但又互不相关"的原子所发射)这就导致了 $G^{(1)}(\tau)$ 或 $\gamma^{(1)}(\tau)$ 随着 $\tau$ 的增大而减小.

## §7.2　HanburyBrown-Twiss 实验和高阶相关函数

不难看出,光场的相干统计性质不能完全由它的一阶相关度来确定.例如单模相干态 $|\alpha\rangle$,单模光子数态 $|n\rangle$ 和单模混杂态 $|\bar{n}\rangle$ 都是一阶完全相干的,但它们的相干统计性仍有相当大的差别.这表明需要引入高阶的相关函数和相关度更完全地来描述光场的相干统计性质.其中最重要的就是二阶相关函数.

20 世纪 90 年代后期 HanburyBrown 和 Twiss 进行了一种新的相关测量——光强之间的关联性测量.它与二阶相关函数相联系.这种测量能将单模相干态,单模光子数态和单模混杂态区分开来.

本节还将介绍光子关联测量的实验及相应的量子理论.

### 1. HanburyBrown-Twiss 实验和经典二阶相关函数

HanburyBrown-Twiss 实验(1954～1957)除了它的多方面应用性价值之外,还是量子光学的一个奠基性实验.它和激光的产生标志着量子光学这门分支学科的创始.

杨氏实验从量子力学的角度即可理解:它显示的是一个光子采取两条可能路径的概率幅之间的干涉.HanburyBrown-Twiss 实验给出的应是不同光子之间的关联(这在随后的光子计数检测的实验中更明确地显示出来),因此比较自然的是从量子场论的角度来理解:即客体是场,光

子只是其量子性质的表现①.

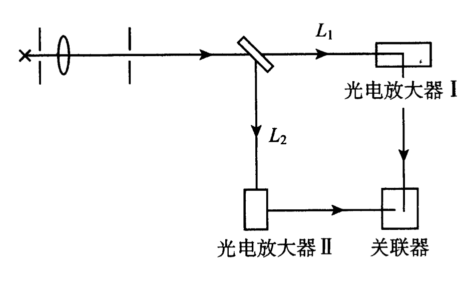



图 7.2.1 HanburyBrown-Twiss 实验装置图

HanburyBrown-Twiss 实验的装置如图 7.2.1 所示. 在此实验中一个(准)单色光源所产生的稳恒平行光,通过半透镜分成两个光束,并调节使两者强度相同. 一束通过光电放大器Ⅰ,另一束通过光电放大器Ⅱ来分别测定其瞬时强度,然后都送到关联器求出其关联值. 后来还用光子计数器和数字关联器重复了这一实验,表明所测定的强度关联就是光子流密度间的关联.

由于两束光所经历路径的长度 $L_1$ 和 $L_2$ 不同,因而上述实验所测定的关联代表原光束在两个时刻强度 $\mathscr{I}(x,t_1)$和 $\mathscr{I}(x,t_2)$间的关联即$\langle\mathscr{I}(x,t_1)\mathscr{I}(x,t_2)\rangle$,其中 $\mathscr{I}(x,t)$由(7.1.5)式所定义.

为简单起见,设实验中的平行光具有固定的偏振方向. 这时经典的二阶相关函数的定义为

$$\begin{aligned}&G^{(2)}(x_1t_1,x_2t_2;x_1't_1',x_2t_2')\\&=\langle E^{(-)}(x_1t_1)E^{(-)}(x_2t_2)E^{(+)}(x_1't_1')E^{(+)}(x_2't_2')\rangle,\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

因而$\langle\mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle$就等于$\frac{c^2}{4\pi^2}G^{(2)}(x_1t_1,x_2t_2;x_1t_1,x_2t_2)$.

下面我们先来计算强度相关函数$\langle\mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2t_2)\rangle$在多模混杂光场中的值.

对于具有确定偏振的平行平面光,在纯态情况其电场函数的一般表达式为

$$E^{(+)}(x,t)=\sum_k\alpha_k\left[\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\mathrm{e}^{ikx-\mathrm{i}\omega t}\right].\tag{7.2.2}$$

它由集合$\{\alpha_k\}$所标定,故可记作 $E^{(+)}_{\{\alpha_k\}}(x,t)$.

在§5.5 中,我们曾讨论过单模混杂光场. 在那里只有一个参量 $\alpha$,但它不是一个确定值而具有一个概率分布. 该概率分布由高斯误差函数(5.5.63)式来表示. 现在考虑的是多模混杂光场,这时(7.2.2)式中的各个 $\alpha_k$ 是互相独立的随机变量,其分布函数都具有(5.5.63)式的形式. 因此集合$\{\alpha_k\}$出现的概率即为

$$P(\{\alpha_k\})=\prod_k P(\alpha_k),\qquad P(\alpha_k)=\frac{1}{\pi\langle n_k\rangle}\mathrm{e}^{-|\alpha_k|^2/\langle n_k\rangle}.\tag{7.2.3}$$

① 对于 Pqlcegor 和 Mandel 实验所显示的用两个激光器所发出的光来产生杨氏干涉(Phys. Rev. **159**, 1084, 1967),比较自然的也是从量子场论来理解,即光场是由它们共同相干地激发的. 光子是这种激发场的量子. 这些情况也表明,量子光学的理论基础是量子场论.

其中$\langle n_k\rangle$为给定的参数,代表随机变量 $\alpha_k$ 绝对值平方的平均值,因

$$\langle |\alpha_k|^2\rangle = \int \mathrm{d}^2\alpha_k P(\alpha_k)\,|\alpha_k|^2 = \frac{1}{\pi\langle n_k\rangle}\int_0^\infty |\alpha_k|^2 \mathrm{e}^{-|\alpha_k|^2/\langle n_k\rangle} 2\pi |\alpha_k|\, d\,|\alpha_k|$$

$$= \frac{1}{\langle n_k\rangle}\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\langle n_k\rangle}}\mathrm{d}x = \langle n_k\rangle. \tag{7.2.4a}$$

当 $k\neq k'$时,由于各个 $\alpha_k$ 是互相独立的随机变量,故有

$$\langle \alpha_k^*, \alpha_{k'}\rangle = 0. \tag{7.2.4b}$$

将(7.2.2)式代入$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle$即得

$$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle = \frac{\hbar^2c^2}{V^2}\sum_{k,k',k'',k'''}\langle \alpha_{k'''}^*\alpha_{k''}^*\alpha_{k'}\alpha_k\rangle\sqrt{\omega\omega'\omega''\omega'''}$$
$$\times \exp[\mathrm{i}(k-k'')x_1+\mathrm{i}(k'-k''')x_2$$
$$-\mathrm{i}(\omega-\omega'')t_1-\mathrm{i}(\omega'-\omega''')t_2].$$

根据同样的理由,只当$(k''=k,k'''=k')$或$(k''=k',k'''=k)$时$\langle \alpha_{k'''}^*\alpha_{k''}^*\alpha_{k'},\alpha_k\rangle$才不为零,于是得出

$$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle = \frac{\hbar^2c^2}{V^2}\sum_{k,k'}\omega\omega'\langle|\alpha_k|^2\rangle\langle|\alpha_{k'}|^2\rangle[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}+1], \tag{7.2.5}$$

其中

$$\tau = t_1-t_2-\frac{1}{c}(x_1-x_2). \tag{7.2.6}$$

(7.2.5)式方括号中的第一项对应于$(k''=k',k'''=k)$的情况,而方括号中第二项对应于$(k''=k,k'''=k')$的情况.

(7.2.5)式右方可改写成

$$\frac{\hbar^2c^2}{V^2}\Big[\Big(\sum_k\omega\langle|\alpha_k|^2\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\Big)\Big(\sum_{k'}\omega'\langle|\alpha_{k'}|^2\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau}\Big)$$
$$+\Big(\sum_k\omega\langle|\alpha_k|^2\rangle\Big)\Big(\sum_{k'}\omega'\langle|\alpha_{k'}|^2\rangle\Big)\Big],$$

再利用(7.1.20)和(7.2.21)式即可将(7.2.5)式化为

$$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle = \frac{c^2}{4\pi^2}|G^{(1)}(x_1,t_1;x_2,t_2)|^2 + I^2. \tag{7.2.7}$$

并可写成[利用(7.1.23)式]

$$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int_0^\infty \mathrm{d}\omega' I(\omega)I(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}+I^2, \tag{7.2.8}$$

其中 $\tau$ 由(7.2.6)式确定,$I$ 代表$\langle \mathscr{I}(x,t)\rangle$,参见(7.1.4)式.

(7.2.7)和(7.2.8)式表明,对于稳恒的偏振混杂光,强度关联函数完全由它的

一阶相关函数 $G^{(1)}(x_1,t_1;x_2,t_2)$或 $I(\omega)$确定.它对$(x_1,t_1)$和$(x_2,t_2)$的依赖通过单一变数 $\tau$ 来表现.

到此为止,我们没有对频谱 $I(\omega)$的形式作任何假定.对于洛伦兹谱型的准单色光,将 $I(\omega)$用(7.1.25)式代入即得

$$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle = I^2(e^{-\gamma|\tau|}+1). \tag{7.2.9}$$

用(7.1.26a)式代入(7.2.7)式自然亦得出同样结果.按(7.2.1)式下文所述,上式亦即

$$G^{(2)}(\tau) = \frac{4\pi^2}{c^2}I^2(e^{-\gamma|\tau|}+1). \tag{7.2.10}$$

对于高斯谱型,利用(7.1.27)式,相应的结果为

$$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle = \frac{c^2}{4\pi^2}G^2(\tau) = I^2(e^{-\gamma^2\tau^2}+1). \tag{7.2.11}$$

从(7.2.9)和(7.2.11)式,我们看到不论是洛伦兹谱型还是高斯谱型,当$(x_1,t_1)=(x_2,t_2)$即 $\tau=0$ 时,混杂光场的$\langle \mathscr{I}\rangle$都等于 $2I^2$ 即 $2\langle \mathscr{I}\rangle^2$,而当 $\tau \gg \dfrac{1}{\gamma}$时,$\langle \mathscr{I}(x_1,t_1)\mathscr{I}(x_2,t_2)\rangle \to I^2$.后一结果的意义比较显然,它说明当 $\tau$ 很大时,上述准单色光的 $\mathscr{I}(x_1,t_1)$与 $\mathscr{I}(x_2,t_2)$之间已无关联.关联时间同样是(7.2.26)式下文中说的相干时间$\dfrac{1}{\gamma}$.前一结果的含义是:$\mathscr{I}(x,t)$的测量值有涨落,而且是正关联的,即第一次测量值大时,紧接着的第二次测量值也大;反之第一次测量值小时.第二次测量值也小,导致$\langle \mathscr{I}\rangle$大于$\langle \mathscr{I}\rangle^2$①.

这样,稳恒的、准单色的混杂光场的谱宽 $\gamma$,无论从一阶相关函数或二阶相关函数来看都具有相关时间(或称相干时间,关联时间)倒数的意义.

仿照一阶的情况,我们定义二阶相关度为

$$\gamma^{(2)}(x_1t_1,x_2t_2;x_1't_1',x_2't_2') = \frac{c^2}{4\pi^2}\frac{G^{(2)}(x_1t_1,x_2t_2;x_1't_1',x_2't_2')}{\sqrt{I(x_1t_1)I(x_2t_2)I(x_1't_1')I(x_2't_2')}}. \tag{7.2.12}$$

在$(x_1't_1')=(x_1t_1)$,$(x_2't_2')=(x_2t_2)$的情况下,$\gamma^{(2)}$只是单变量 $\tau$ 的函数.对于洛伦兹谱型的稳恒混杂光场,由(7.2.10)式,

$$\gamma^{(2)}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}+1, \tag{7.2.13a}$$

而对高斯谱型情况

---

① 例如 $\mathscr{I}$取两个值 3 和 1 的情况,$\langle \mathscr{I}\rangle=\frac{1}{2}(3^2+1^2)=5$,而$\langle \mathscr{I}\rangle^2=\left(\frac{3+1}{2}\right)^2=4$.前者比后者大.

$$\gamma^{(2)}(\tau)=\mathrm{e}^{-\gamma^2\tau^2}+1. \tag{7.2.13b}$$

图 7.2.2 所示的 Arrecki 等的实验结果与(7.2.13)式符合很好.

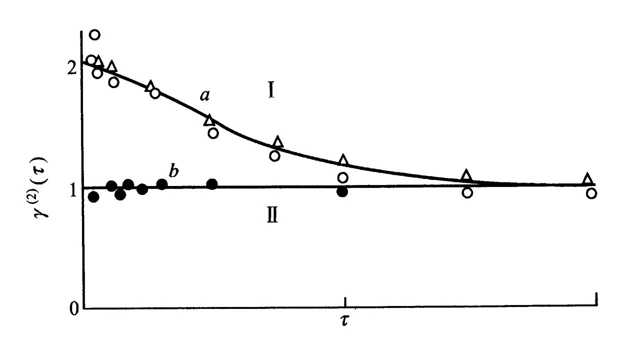



图 7.2.2 二阶相关度的实验值与理论值的比较

Ⅰ. 高斯型混杂光场. Ⅱ. 相干光场

对于严格的单模平面波,其频率取单一值 $\omega_0$,从而 $\gamma=0$(关联时间趋于∞),相应的混杂光场的 $\gamma^{(2)}(\tau)$将恒等于 2.

我们再来看经典光学中的平行偏振相干光场,它对应于(7.2.2)式中所有的 $\alpha_k$ 都取确定值,从而 $E^{(+)}(x,t)$为一个确定的时空函数,于是

$$\begin{aligned}&G^{(2)}(x_1t_1,x_2t_2;x_1't_1',x_2''t_2)\\&=E^{(-)}(x_1t_1)E^{(-)}(x_2t_2)E^{(+)}(x_1't_1')E^{(+)}(x_2't_2')\end{aligned} \tag{7.2.14a}$$

由(7.2.12)式,相应的二阶相关度的绝对值恒为 1:

$$|\gamma^{(2)}(x_1t_1,x_2t_2;x_1't_1',x_2''t_2)|=1. \tag{7.2.14b}$$

二阶相关度或者强度关联度($\langle\mathscr{I}(x_1t_1)\mathscr{I}(x_2t_2)\rangle/I^2$)对区别光场的量子统计性质有着重要的作用. 例如对于具有确定偏振基矢的单模光场,如上节所述,$|\gamma^{(1)}|$都等于 1. 因而它不能区别混杂光场和相干光场. 强度关联度就不一样了,对于单模混杂光,从(7.2.9)式可以得出①

$$\langle\mathscr{I}(x_1t_1)\mathscr{I}(x_2t_2)\rangle/I^2=2, \tag{7.2.15}$$

而对于单模相干光场,由(7.2.14)式可得出

$$\langle\mathscr{I}(x_1t_1)\mathscr{I}(x_2t_2)\rangle/I^2=1. \tag{7.2.16}$$

这表明通过强度关联测量即可将它们区别开来.

以上考虑的是偏振方向为固定的情况. 如果偏振方向不固定,则(7.2.1)式应

---

① 注意,这里是讨论偏振方向固定的情况,否则结果会不同参见 Mandel, Proc. Phys. Soc. **81**, 1104(1963),或 Loudon, The Quantum Theory of Light, § 3.10.

推广为

$$G^{(2)}_{j_1 j_2 j_1' j_2'}(x_1 t_1, x_2 t_2; x_1' t_1', x_2' t_2)$$
$$= \langle E^{(-)}_{j_1}(x_1 t_1) E^{(-)}_{j_2}(x_2 t_2) E^{(+)}_{j_1'}(x_1' t_1') E^{(+)}_{j_2'}(x_2' t_2') \rangle. \tag{7.2.17}$$

## 2. 光子关联测量　量子相关函数

上一小节是从经典光学的角度来讨论的,在定义量子相关函数以前,我们先从光电子检测的角度来考察光强的关联测量.

设想用 $n$ 个全同的单原子检测器分别置于 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 点来进行关联测量,光场仍设为自由场.每个检测器在吸收一个光子时即产生一个光电子,情况如§7.1所述.我们现在要求的是,$t$ 时刻每个检测器都检测到光子的检测率.为此,采用§3.2中的演化算符 $\hat{U}(t,0)$来作理论计算(下式中的 $\hat{H}_{\text{int}}$为作用图象中的算符):

$$\hat{U}(t,0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^l} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \cdots \int_0^t \mathrm{d}t_l \mathrm{T}[\hat{H}_{\text{int}}(t_1) \hat{H}_{\text{int}}(t_2) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(t_l)]. \tag{7.2.18}$$

在这 $n$ 个检测器相距为宏观距离的情况下,它们之间的相互影响可以忽略,$\hat{H}_{\text{int}}$就是各个原子通过跃迁电偶极矩与所在地点 $\boldsymbol{x}_j$ 的 $\boldsymbol{E}$ 相作用,即

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x}_j, t) \cdot \hat{\boldsymbol{d}}^{(j)}(t) + \text{h.c.} \tag{7.2.19}$$

$\hat{H}_{\text{int}}(t)$第一项代表原子吸收一个光子而从基态跃迁到激发态,并将记作 $\hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t)$.这样在最低级微扰中,吸收 $n$ 个光子的跃迁矩阵元$\langle f | \hat{U}(t,0) | i \rangle$只有一项:

$$\langle f | \hat{U}(t,0) | i \rangle = \frac{1}{n!} \frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^n} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \cdots \int_0^t \mathrm{d}t_n \mathrm{T} \langle f | \hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t_1) \cdots \hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t_n) | i \rangle. \tag{7.2.20}$$

将 $\hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t) = -\sum_{j=1}^{r} \hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x}_j, t) \cdot \hat{\boldsymbol{d}}^{(j)}(t)$ 代入并展开后,共得出 $n^n$ 项,但其中许多项对应于某些原子多次吸收光子而另一些原子不吸收光子的情况.显然,这些项对于我们要计算的概率 $P_n(t)$(每个原子都吸收一个光子的概率)无贡献.真正有贡献的为 $n^n$ 中的$n!$项,对应于 $n$ 个原子分别出现在$\hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t_1) \cdots \hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t_n)$ 中位置的不同排列.考虑到不同时刻的 $\hat{H}^{(+)}_{\text{int}}(t)$ 是相互对易的(因为 $\hat{H}^{(+)}_{\text{int}}$ 中所含光子的算符只是吸收算符,而且是在作用图象中),于是(7.2.20)式中的编时算符 $T$ 可以除去.这样 $n!$项的贡献相同,从而将该式右方的$\frac{1}{n!}$因子消去,使$\langle f | \hat{U}(t,0) | i \rangle$只

有下面(7.2.21)式右方所示的一项.其中$\langle R'|$代表系统末态$\langle f|$中的光场部分，$|R\rangle$代表系统初态$|i\rangle$中的光场部分,各个原子的末态指标分别为$b_1,b_2,\cdots,b_n$，原子的初态都是基态$a$，$\hbar\omega_l$为第$l$个原子末态能量与初态能量的差值.

$$\langle f|\hat{U}(t,0)|i\rangle = \sum_{j_1,\cdots,j_n}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^n\langle\hat{\mathrm{d}}_{j_1}\rangle_{b_1a}\langle\hat{\mathrm{d}}_{j_2}\rangle_{b_2a}\cdots\langle\hat{\mathrm{d}}_{j_n}\rangle_{b_na}$$
$$\times\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^t\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^t\mathrm{d}t_n\langle R'|\hat{E}_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{E}_{j_2}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots$$
$$\hat{E}_{j_n}^{(+)}(\boldsymbol{x}_nt_n)|R\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_l\omega_lt_l},\tag{7.2.21}$$

上式中的$j_l$为矢量的分量指标,各个$j_l$都要从1到3求和.

像上节一样,将$|\langle f|\hat{U}(t,0)|i\rangle|^2$对所有的光场末态$|R'\rangle$求和,再利用$\sum|R'\rangle\langle R'|=1$就得出$t$时刻$n$个原子分别跃迁到状态$b_1,b_2,\cdots,b_n$的概率$P_{b_1b_2\cdots b_n}(t)$,其中对光场的依赖在于因子

$$\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^t\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^t\mathrm{d}t_n\int_0^t\mathrm{d}t_1'\int_0^t\mathrm{d}t_2'\cdots\int_0^t\mathrm{d}t_n'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_l\omega_l(t_l-t_l')}\times$$
$$\langle R|\hat{E}_{j_1'}^{(-)}(\boldsymbol{x}_1t_1')\hat{E}_{j_2'}^{(-)}(\boldsymbol{x}_2t_2')\cdots$$
$$\hat{E}_{j_n'}^{(-)}(\boldsymbol{x}_nt_n')\hat{E}_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{E}_{j_2}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\hat{E}_{j_n}^{(+)}(\boldsymbol{x}_nt_n)|R\rangle.$$

同上节相似,在光场为准单色光(宽度为$\gamma$),原子检测器是各向同性的并具有宽的频带的情况下,取测量时间$t\gg\dfrac{1}{\gamma}$,并对原子所有的末态求和,结果得出

$$P_n(t)=\left(\frac{c}{2\pi}\right)^n\beta^n(\omega)\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^t\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^t\mathrm{d}t_n\times$$
$$\langle R|\hat{E}_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{E}_{j_2}^{(-)}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots$$
$$\hat{E}_{j_n}^{(-)}(\boldsymbol{x}_nt_n)\hat{E}_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{E}_{j_2}^{(+)}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\hat{E}_{j_n}^{(+)}(\boldsymbol{x}_nt_n)|R\rangle$$
$$=\beta^n(\omega)\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^t\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^t\mathrm{d}t_n\langle R|\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_nt_n)|R\rangle.\tag{7.2.22}$$

其中$\beta(\omega)$为上节定义的检测系数[参见(7.1.33)式下及(7.1.37)式],N代表正规编序符号,$\omega$为准单色光的频率,$\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x},t)$由$\frac{c}{2\pi}\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$定义.

以上结果可推广到各个检测器的检测时间间隔彼此不同的情况.这时只需将$t_j$的的积分限从统一的$(0,t)$换成$(0,t^{(j)})$.

在作上述代换后,再对各个$t^{(j)}$作微商,就得出$n$重符合检测率

$$W^{(n)}(\boldsymbol{x}_1t_1,\boldsymbol{x}_2t_2,\cdots,\boldsymbol{x}_nt_n)=\beta^n(\omega)\langle R|\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_nt_n)|R\rangle.\tag{7.2.23}$$

$W^{(n)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$ 代表各个检测器分别在 $t_1$ 到 $t_1+\mathrm{d}t_1$, $t_2$ 到 $t_2+\mathrm{d}t_2$, $\cdots t_n$ 到 $t_n+\mathrm{d}t_n$时段内都测到一个光子的概率.(7.2.23)式表明该概率正比于量子强度的相关函数.需要指出的是,在量子强度的相关函数中,算符 $\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}t)$乘积的前面有正规编序算符 N.

以上讨论并说明, HanburyBrown-Twiss 实验所给出的实验数据 $\langle\mathscr{I}(x_1t_1)\mathscr{I}(x_2t_2)\rangle$应等于量子理论中的$\langle R|\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(x_1t_1)\hat{\mathscr{I}}(x_2t_2)|R\rangle$,而不是$\langle R|\hat{\mathscr{I}}(x_1t_1)\hat{\mathscr{I}}(x_2t_2)|R\rangle$.

当入射光场不是纯态而是统计混合态的时候,像上节一样只需用密度算符的迹来代替对态$|R\rangle$的平均,即

$$W^{(n)}(\boldsymbol{x}_1t_1,\boldsymbol{x}_2t_2,\cdots,\boldsymbol{x}_nt_n)=\beta^n(\omega)\mathrm{tr}[\hat{\rho}\,\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\hat{\mathscr{I}}(\boldsymbol{x}_nt_n)].\tag{7.2.24}$$

从上述讨论我们看到,光强关联测量确是与杨氏干涉实验不同的新型实验,它正比于多个光子检测中的关联.

当然,我们也可用一个检测器来作关联检测,这时 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=\cdots=\boldsymbol{x}_n$, $W^{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$ 代表该检测器在$t_1\to t_1+\mathrm{d}t_1$, $t_2\to t_2+\mathrm{d}t_2$, $\cdots$, $t_n\to t_n+\mathrm{d}t_n$都检测到一个光子的概率.值得指出的是,在这里我们并不过问:在 $t_1+\mathrm{d}t_1\to t_2$, $t_2+\mathrm{d}t_2\to t_3$, $\cdots$, $t_{n-1}+\mathrm{d}t_{n-1}\to t_n$ 等区间内是否也可能检测到光子.因而 $W^{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是一种非排它性的概率密度,相应的测量亦称为单举性关联测量.另外还有一种排它性的概率密度,相应的测量称为遍举性关联测量,我们将在§7.4 中加以讨论.

根据以上讨论,我们定义 $n$ 阶量子相关函数为

$$\begin{aligned}&G^{(n)}_{j_1j_2\cdots j_nj_1'j_2'\cdots j_n'}(\boldsymbol{x}_1t_1,\boldsymbol{x}_2t_2,\cdots,\boldsymbol{x}_nt_n;\boldsymbol{x}_1't_1'\boldsymbol{x}_2't_2'\cdots\boldsymbol{x}_n't_n')\\&=\mathrm{tr}[\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}_{j_1}(\boldsymbol{x}_1t_1)\hat{E}^{(-)}_{j_2}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\\&\quad\hat{E}^{(-)}_{j_n}(\boldsymbol{x}_nt_n)\hat{E}^{(+)}_{j_1'}(\boldsymbol{x}_1't_1')\hat{E}^{(+)}_{j_2'}(\boldsymbol{x}_2't_2')\cdots\hat{E}^{(+)}_{j_n'}(\boldsymbol{x}_n't_n')].\end{aligned}\tag{7.2.25}$$

注意到上式中电场算符是正规排序的.因此当$\hat{\rho}$的 $P$ 表示存在即

$$\hat{\rho}=\int\mathrm{d}^2\alpha_1\cdots\mathrm{d}^2\alpha_kP(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\,|\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\,|\tag{7.2.26}$$

时(其中$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\rangle$代表多模(共 $k$ 个模)相干态),将它代入(7.2.25)式后,所给出的结果即与概率密度为 $P(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$的经典 $n$ 阶相关函数完全一致.

由(7.2.24)式定义的 $n$ 重符合检测率与"各个$(\boldsymbol{x}_j't_j')$等于$(\boldsymbol{x}_jt_j)$时"的 $G^{(n)}$成正比:

$$W^{(n)}(\boldsymbol{x}_1t_1,\boldsymbol{x}_2t_2,\cdots,\boldsymbol{x}_nt_n)$$

$$= \beta^n(\omega)\left(\frac{c}{2\pi}\right)^n G^{(n)}(\boldsymbol{x}_1 t_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n t_n;\boldsymbol{x}_1 t_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n t_n). \qquad (7.2.27)$$

其中 $G^{(n)} = \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} G^{(n)}_{j_1\cdots j_n j_1 \cdots j_n}$.

仿前,$n$ 阶量子相关度定义为

$$\gamma^{(n)}(\boldsymbol{x}_1 t_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n t_n;\boldsymbol{x}_1' t_1',\cdots,\boldsymbol{x}_n' t_n')$$
$$= \left(\frac{c}{2\pi}\right)^n \frac{G^{(n)}(\boldsymbol{x}_1 t_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n t_n;\boldsymbol{x}_1' t_1',\cdots,\boldsymbol{x}_n' t_n')}{\sqrt{I(\boldsymbol{x}_1 t_1)\cdots I(\boldsymbol{x}_n t_n) I(\boldsymbol{x}_1' t_1')\cdots I(\boldsymbol{x}_n' t_n')}}. \qquad (7.2.28)$$

在单模场情况,$\gamma^{(n)}$对时空坐标的依赖可以分出来.设模函数为 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$,则有

$$\gamma^{(n)} = \left[\prod_{l=1}^{n} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(-)}(\boldsymbol{x}_l t_l)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{x}_l' t_l')}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^{(-)}(\boldsymbol{x}_l t_l)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{x}_l t_l)\boldsymbol{\varepsilon}^{(-)}(\boldsymbol{x}_l' t_l')\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{x}_l' t_l')}}\right] \frac{\mathrm{tr}[\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n]}{[\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a})]^n} \qquad (7.2.29)$$

于是在偏振方向固定的情况下,

$$|\gamma^{(n)}| = \mathrm{tr}[\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n]/[\mathrm{tr}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a}]^n. \qquad (7.2.30)$$

若将 $\hat{\rho} = \sum\limits_{mm'} \rho_{mm'} |m\rangle\langle m'|$ 代入上式,即得出

$$|\gamma^{(n)}| = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-n+1)\rho_{mm}/[\sum_m m\rho_{mm}]^n. \qquad (7.2.31)$$

因而$|\gamma^{(n)}|$完全由 $\rho$ 的对角元或光子数的分布所决定.

在上一小节中曾按经典理论比较了稳恒的单模混杂光场和相干光场在$(x_1' t_1') = (x_1 t_1)$,$(x_2' t_2') = (x_2 t_2)$情况下的二阶相关度 $\gamma^{(2)}(\tau)$.量子理论对这二个 $\gamma^{(2)}(\tau)$计算的结果与经典值一致.这里再补充单模光子数本征态$|n\rangle$的二阶相关度结果,这种态是经典理论中所没有的.从(7.2.30)式不难得出其结果为

$$|\gamma^{(2)}(\tau)| = 1 - \frac{1}{n}. \qquad (7.2.32)$$

它的值比相干态的值还要小,当 $n=1$ 时甚至为零.关于这一结果的物理意义我们将在下节中讨论.

## §7.3　条件检测率　光子群聚及反群聚和光子计数问题

条件检测率是指在特定条件下检测到光子的概率,通常是指在已检测到一个光子或几个光子情况下再次检测到光子的概率.因而它将反映两次被检测光子之间的相关性.按照这种检测结果可把上述光场分别称为光子群聚态、随机分布态和

反群聚态①.其中反群聚性是特征量子光场才可能具有的,是量子光学研究的主要课题之一.我们将结合混杂光场,相干光场和光子数本征态光场来阐明这三种状态的含义.光子数的统计分布是光场的十分重要的性质,在本节中我们还将对光子数分布的测量问题进行简要的讨论.

## 1. 条件检测率

我们来考察一个检测器在 $t_1$ 和 $t_1+\tau$ 两个时刻对稳恒的准单色平行光进行“符合检测”,并假定光场具有固定的偏振方向.由(7.2.27)式,相应的二重检测率为

$$W^{(2)}(t_1,t_1+\tau)=\beta^2(\omega)\frac{c^2}{4\pi^2}G^{(2)}(\tau). \tag{7.3.1}$$

根据上节的说明,$W^{(2)}(t_1,t_1+\tau)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$ 代表该检测器在 $t_1$ 附近 $\mathrm{d}t_1$ 时间内和 $t_1+\tau$ 附近 $\mathrm{d}t_2$ 时间 内都检测到一个光子的概率.我们定义二重的条件检测率(或称二重的关联检测率)$P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)$如下:

$$W^{(2)}(t_1;t_1+\tau)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=[W^{(1)}(t_1)\mathrm{d}t_1][P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)\mathrm{d}t_2], \tag{7.3.2}$$

其中 $W^{(1)}(t_1)$为单重检测率亦即§7.1(7.1.38a)式所定义的 $W(t_1)$(在这里它实际为一常数).(7.3.2)式右方第一个因子 $W^{(1)}(t_1)\mathrm{d}t_1$ 为在 $t_1$ 附近 $\Delta t_1$ 时间内检测到一个光子的概率.第二个因子 $P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)\mathrm{d}t_2$ 即代表在 $t_1$ 时间已检测到一个光子的条件下,在 $t_1+\tau$ 附近 $\mathrm{d}t_2$ 时间内又检测到一个光子的概率.因此 $P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)$称为(二阶)条件检测率,它的值不仅与第二次检测时间 $t_1+\tau$ 相关,也与上次检测时间 $t_1$ 有关.按(7.1.37)、(7.2.12)式有

$$W^{(1)}(t_1)=\beta(\omega)I,\qquad G^{(2)}(\tau)=\frac{4\pi^2}{c^2}I^2\gamma^{(2)}(\tau), \tag{7.3.3}$$

再由(7.3.1)和(7.3.2)式,即可得出

$$P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)=\beta(\omega)I\gamma^{(2)}(\tau)(=W^{(1)}(t_1)\gamma^{(2)}(\tau)). \tag{7.3.4}$$

它与第二次检测时刻$(t_1+\tau)$与 $t_1$ 的差值 $\tau$ 相关,因而与 $W^{(1)}(t_1+\tau)$不同[这里所研究的光场是稳恒的,$W^{(1)}(t+\tau)$就等于 $\beta(\omega)I$].我们看到 $P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)$中多了一个因子“二阶相关度”$\gamma^{(2)}(\tau)$.当二阶相关度 $\gamma^{(2)}(\tau)=1$ 时如相干光场情况,$P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)$才等于 $W^{(1)}(t+\tau)$即 $\beta(\omega)I$.这时第二次检测结果与第一次检测结果没有联系.

类似地,如果考察同一个检测器的 $n$ 重符合检测率 $W^{(n)}(t_1,t_1+\tau,\cdots,t_1+(n-1)\tau)$,在我们所研究的稳恒光场情况,它实际与 $t_1$ 无关,只与差值 $\tau$ 及 $n$ 有关,因而可记作 $W^{(n)}(\tau)$.按

---

① 这并不是一种严格的说法,因光子是光场的作用量子,并不是在光束中分布的粒子.所谓群聚和反群聚等实际是就测量的结果而言.

照(7.2.27)式

$$W^{(n)}(\tau) = \beta^n(\omega)\left(\frac{c}{2\pi}\right)^n G^{(n)}(\tau). \tag{7.3.5a}$$

我们同样可定义 $n$ 阶条件检测率 $P^{(n)}(t_1, t_1+\tau, \cdots, t_1+(n-1)\tau)$ 为

$$P^{(n)}(t_1, t_1+\tau, \cdots, t_1+(n-1)\tau) = W^{(n)}(\tau)/W^{(n-1)}(\tau). \tag{7.3.5b}$$

不过通常不大用到这种 $n>2$ 的结果.

## 2. 混杂光场的高阶相关函数　光子群聚态

为描述多模混杂光场,我们用 $\{n\}$ 表示各个模光子数的集合 $(n_1, n_2, \cdots, n_l, \cdots)$. 于是稳恒的多模混杂光场的密度算符可表示为

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}) \mid \{n\}\rangle\langle\{n\}\rangle \\ &\equiv \sum_{n_1, n_2, n_3\cdots} P(n_1, n_2, n_3, \cdots) \mid n_1\rangle \mid n_2\rangle \mid n_3\rangle\cdots\langle n_1 \mid \langle n_2 \mid \langle n_3 \mid \cdots,\end{aligned} \tag{7.3.6a}$$

其中 $P\{n\}$ 为各个模的几何分布的乘积:

$$P(\{n\}) = \prod_l \frac{1}{\langle n_l\rangle + 1}\left(\frac{\langle n_l\rangle}{\langle n_l\rangle + 1}\right)^{n_l}. \tag{7.3.6b}$$

此密度算符用 $P$ 表示为

$$\hat{\rho} = \int d^2\{\alpha\} P(\{\alpha\}) \mid \{\alpha\}\rangle\langle\{\alpha\} \mid, \tag{7.3.7}$$

其中 $d^2\{\alpha\} = \prod_l d^2\alpha_l$,而

$$P(\{\alpha\}) = \prod_l \frac{1}{\pi\langle n_l\rangle} e^{-|\alpha_l|^2/\langle n_l\rangle}, \tag{7.3.8}$$

上式与(7.2.3)式一样. 在这里 $\langle n_l\rangle$ 代表光子数算符 $\hat{n}_l$ 的期望值. 由(7.3.6)和(7.3.8)式可见,对于混杂光场. 只要知道了各个模的光子数的期望值,就可以完全确定它的密度算符. 从而各阶的量子相关函数也就随之确定.

在光场为偏振具有固定方向的平行光的情况,各个模由它的频率 $\omega$ 所标定. 换句话说模指标 $l$ 就是 $\omega$,而"给定 $\langle n_\omega\rangle$"相当于给定强度的频谱 $I(\omega)$. 这样,偏振具有固定方向的平行混杂光场的任意阶的相关函数都可由 $I(\omega)$ 确定. 其 $G^{(n)}$ 的具体函数形式由 Glauber 给出①,结果如下:

$$G^{(n)}(x_1t_1, x_2t_2, \cdots, x_nt_n; x_1't_1', x_2't_2', \cdots, x_n't_n')$$

① Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766(1963).

$$= \sum_{\{X,T\}} G^{(1)}(x_1 t_1, X_1 T_1) G^{(1)}(x_2 t_2, X_2 T_2) \cdots G^{(1)}(x_n t_n, X_n T_n), \tag{7.3.9}$$

其中$\{X,T\} \equiv (X_1 T_1, X_2 T_2, \cdots, X_n T_n)$为$(x_1' t_1', x_2' t_2', \cdots, x_n' t_n')$的各种可能排列,因而共有 $n!$ 项,而 $G^{(1)}$可由 $I(\omega)$确定,参见(7.1.23)式.

对于一般的混杂光场(偏振方向和传播方向都不固定),相应的结果为

$$G^{(n)}_{j_1 j_2 \cdots j_n j_1' j_2' \cdots j_n'}(\boldsymbol{x}_1 t_1, \boldsymbol{x}_2 t_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n t_n; \boldsymbol{x}_1' t_1', \boldsymbol{x}_2' t_2', \cdots, \boldsymbol{x}_n' t_n')$$

$$= \sum_{\{J,X,T\}} G^{(1)}_{j_1 J_1}(\boldsymbol{x}_1 t_1, \boldsymbol{X}_1 T_1) G^{(1)}_{j_2 J_2}(\boldsymbol{x}_2 t_2, \boldsymbol{X}_2 T_2) \cdots G^{(1)}_{j_n J_n}(\boldsymbol{x}_n t_n, \boldsymbol{X}_n T_n), \tag{7.3.10}$$

其中$\{J,\boldsymbol{X},T\} \equiv (J_1 \boldsymbol{X}_1 T_1, J_2 \boldsymbol{X}_2 T_2, \cdots, J_n \boldsymbol{X}_n T_n)$为$(j_1' \boldsymbol{x}_1' t_1', j_2' \boldsymbol{x}_2' t_2', \cdots, j_n' \boldsymbol{x}_n' t_n')$的各种可能排列.

下面来看最重要的 $n=2$ 情况.这时有

$$\begin{aligned} & G^{(2)}(x_1 t_1, x_2 t_2; x_1' t_1', x_2' t_2') \\ &= G^{(1)}(x_1 t_1, x_1' t_1') G^{(1)}(x_2 t_2, x_2' t_2') \\ &\quad + G^{(1)}(x_1 t_1, x_2' t_2') G^{(1)}(x_2 t_2, x_1' t_1'). \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

由于稳恒混杂光场各个模是互相无关的,$G^{(1)}$只是 $\tau$ 的函数[参见(7.2.3)式上],(7.3.11)式即化为

$$\begin{aligned} & G^{(2)}(x_1 t_1, x_2 t_2; x_1' t_1', x_2' t_2') \\ &= G^{(1)}(\tau_{11}) G^{(1)}(\tau_{22}) + G^{(1)}(\tau_{12}) G^{(1)}(\tau_{21}), \end{aligned} \tag{7.3.12a}$$

其中

$$\tau_{ij} = (t_i - t_j') - \frac{1}{c}(x_i - x_{j'}). \tag{7.3.12b}$$

如果考虑的是$(x_1' t_1') = (x_1 t_1)$、$(x_2' t_2') = (x_2 t_2)$的特殊情形,则有

$$\begin{aligned} & \tau_{11} = \tau_{22} = 0, \tau_{12} = -\tau_{21} \equiv \tau, \\ & \tau = (t_2 - t_1) - \frac{1}{c}(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

于是 $G^{(2)}$将只是 $\tau$ 的函数,并可表示为

$$G^{(2)}(\tau) = G^{(1)}(0)^2 + G^{(1)}(\tau) G^{(1)}(-\tau) = G^{(1)}(0)^2 + | G^{(1)}(\tau) |^2. \tag{7.3.14}$$

在写最后一个等式时,利用了 $G^{(1)}(-\tau) = G^{(1)}(\tau)^*$.此关系式从 $G^{(1)}(\tau)$的定义即可看出.上式与经典理论的结果(7.2.7)式一致,经典的$\langle \mathscr{I}(x_1 t_1) \mathscr{I}(x_2 t_2) \rangle$对应于量子理论中的 $\mathrm{tr}[\hat{\rho} \mathrm{N} \hat{\mathscr{I}}(x_1, t_1) \hat{\mathscr{I}}(x_2, t_2)]$.

从(7.3.14)式得出相应的二阶相关度为

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + | \gamma^{(1)}(\tau) |^2. \tag{7.3.15}$$

(7.3.14)与(7.3.15)式与经典的结果(7.2.7)式一致.若将上式代入(7.3.4)式,即

得混杂光场的二阶条件检测率为

$$P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)=\beta(\omega)I(1+|\gamma^{(1)}(\tau)|^2). \tag{7.3.16}$$

上式表明对频宽为 $\gamma$ 的混杂光场，当 $\gamma\tau$ 大时，$P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)$接近于 $\beta(\omega)I\equiv W^{(1)}$，即第一次检测对于第二次已无影响，而当 $\gamma\tau\ll1$ 时，$P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)$接近于 $2W^{(1)}$，表明对混杂光场第一次检测到光子后紧接着再检测到光子的概率密度增加了一倍.

关于 $n$ 为一般值的情况，从(7.3.9)式可以看出，(7.3.5a)式中的 $G^{(n)}(\tau)$在 $\tau=0$ 时将等于 $n![G^{(1)}(0)]^n$，因 $G^{(n)}$ 中所含的 $n!$ 项这时都彼此相等并等于 $[G^{(1)}(0)]^n$. 这样 $P^{(n)}(t_1,t_1+\tau,t_1+2\tau,\cdots,t_1+(n-1)\tau)$在 $\tau=0$ 时就等于 $nW^{(1)}$，即这种情况下 $n$ 阶条件检测率比一般检测率 $W^{(1)}$ 大了 $n$ 倍. 而当 $\tau\to\infty$ 时，$P^{(n)}(t_1,t_1+\tau,t_1+2\tau,\cdots,t_1+(n-1)\tau)$如所预期的等于1，即后面的检测已与前面的检测无关. 这一结果用形象的语言来说，就是在混杂光场中，光子好像是成群出现的，因而被称为光子的群聚态. 群聚态的特点是当 $\tau\to0$ 时 $P^{(2)}(t_1;t_1+\tau)>W^{(1)}$.

根据以上讨论，可对该混杂光场赋予一个直观图象：即在作系综平均以前，它的光场强度随时间的分布可分成许多关联段，各段的间隔平均值为 $1/\gamma$. 有的段 $I=0$，有的段 $I$ 较小，有的较大. 其概率分布为 $P(I)\approx e^{-I/\langle I\rangle}$，即 $I=0$ 的概率最大，随着 $I$ 的增大而指数衰减. 整个光场像一些稀散参差的波包. 在 $t_1$ 时刻检测到一个光子，相当于碰上了一个较强的波包，于是紧接着又检测到光子的概率就大于平均概率.

### 3. 相干光场　光子随机分布态

无论是单模还是多模相干光场，它的任意阶相关函数都具有因子化乘积的形式[见下面(7.3.17)式]，因为相干光场的态矢量是 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x}t)$的本征态. 若设其本征值为 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}t)$，则按定义其 $n$ 阶相关函数即为

$$\begin{aligned}&G^{(n)}_{j_1\cdots j_n j_1'\cdots j_n'}(\boldsymbol{x}_1t_1,\boldsymbol{x}_2t_2,\cdots,\boldsymbol{x}_nt_n;\boldsymbol{x}_1't_1',\cdots,\boldsymbol{x}_n't_n')\\&=\varepsilon^{(-)}_{j_1}(\boldsymbol{x}_1t_1)\varepsilon^{(-)}_{j_2}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots\varepsilon^{(-)}_{j_n}(\boldsymbol{x}_nt_n)\varepsilon^{(+)}_{j_1'}(\boldsymbol{x}_1't_1')\varepsilon^{(+)}_{j_2'}(\boldsymbol{x}_2't_2')\cdots\varepsilon^{(+)}_{j_n'}(\boldsymbol{x}_n't_n')\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

相干态的这种性质使它与经典的纯态光场相似. $n$ 重检测率这时形如

$$W^{(n)}=\beta^nI(\boldsymbol{x}_1t_1)I(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots I(\boldsymbol{x}_nt_n)=W^{(1)}(\boldsymbol{x}_1t_1)W^{(1)}(\boldsymbol{x}_2t_2)\cdots W^{(1)}(\boldsymbol{x}_nt_n), \tag{7.3.18}$$

这表明这 $n$ 次检测彼此互不影响，即互不关联. 于是 $n$ 阶条件检测率就等于普通的检测率：

$$P^{(n)}(t_1;t_2,\cdots,t_n) = W^{(1)}(t_n). \tag{7.3.19}$$

(7.3.17)式也等价于

$$\gamma^{(n)}(x_1t_1,x_2t_2,\cdots,x_nt_n;x_1't_1',x_2't_2',\cdots,x_n't_n') = 1, \tag{7.3.20}$$

这表明,对于相干光场,光子好像是彼此无关地随机分布在光束中.

下面来看光场不是通常相干态而是其本征值 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{x}t)$带有一个随机相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$的状态.这种状态$\langle\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{x}t)\rangle=0$,如果 $\theta$ 具有均匀的概率分布.但它的 $n$ 阶相关函数却与原来的纯相干态相同,因为将(7.3.17)式中的 $\varepsilon_j^{(+)}(\boldsymbol{x}t)$换成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\varepsilon_j^{(+)}(\boldsymbol{x}t)$.将$\varepsilon_j^{(-)}(\boldsymbol{x}t)$换成 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon_j^{(-)}(\boldsymbol{x}_1t)$后,结果并不变.以上情况表明,光子关联测量并不能区分真正的相干态和上述本征值的相因子随机取值的相干态(它实际上是一种统计混合态).从物理上看,后者的强度仍为确定的函数,而且在检测原子吸收光子后,其状态亦不改变,因而 $n$ 重检测率的无关联性得以保持.

**4. 反群聚光场和幅模压缩态**

如前所述,群聚光场中的光子间(严格地说,应是光子检测间)具有正关联,相干态光场中光子间无关联.前者 $P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)|_{\tau\to0}>W^{(1)}$,按(7.3.4)式也就是$\gamma^{(2)}(\tau)|_{\tau\to0}>1$.后者 $P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)$总等于 $W^{(1)}$,即 $\gamma^{(2)}(\tau)=1$. 而反群聚光场是指其光子间为负关联即 $P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)|_{\tau\to0}<W^{(1)}$,而且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)|_{\tau\to0}>0$的情况.此条件也就是 $\gamma^{(2)}(\tau)|_{\tau\to0}<1$ 而且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma^{(2)}(\tau)|_{\tau\to0}>1$.所有的类经典光场都满足 $P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)|_{\tau\to0}\geqslant W^{(1)}$,因此具有负关联的一定是特征性量子光场(但反过来并不对.有些特征性量子光场亦具有正关联,参见§7.5).

反群聚光场的一个例子是单个原子在相干光激励下所发的共振荧光.我们在§6.3 中曾近似地处理过这一问题.较准确的解可利用主方程(6.4.29)来求出(令其中 $\bar{n}_T(\omega)=0$).在稳恒状态下,得出的二阶相关度为(参见 Carmichael and Walls, J. Phys. B,**9**,1199(1976)或 Scully and Zubairy,Quantum Optics,ch10):

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\gamma\tau}\left(\cos\Omega\tau+\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega\tau\right),$$

$$\Omega\equiv\sqrt{4\,|\,g_0\alpha\,|^2-\frac{1}{16}\gamma^2}. \tag{7.3.21}$$

虽然强相干光($4|g_0\alpha|^2\gg\frac{1}{16}\gamma^2$)和弱相干光($4|g_0\alpha|^2\ll\frac{1}{16}\gamma^2$)情况下,$\gamma^{(2)}(\tau)$的曲线有很大的不同(参见图 7.3.1),但是 $\tau\to0$ 时,两者的 $\gamma^{(2)}(\tau)$都趋于零,而且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma^{(2)}(\tau)|_{\tau=0}$都大于零(亦即两者的$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)|_{\tau=0}$都大于零).

单原子共振荧光的反群聚性不难从物理上得到理解:当我们观测到该原子发

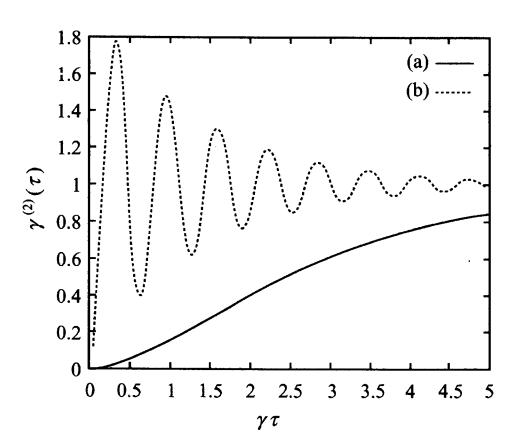



图 7.3.1　单原子共振荧光的二阶相干度

(a) $\dfrac{2|g_0\alpha|}{\frac{1}{4}\gamma}=10$　(b) $\dfrac{2|g_0\alpha|}{\frac{1}{4}\gamma}=0.1$

出的一个光子时,意味着它已跃迁到基态,紧接着作第二次观测,其概率自然为零,因为原子还来不及被激发到上能级并再次发射一个光子.当然若发荧光的原子不止一个而是许多个,情况就不同了.1977 年单原子共振荧光的反群聚性已为实验所证实(Kimble, Dagenais and Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**,691(1977),Dagengs and Mandel, Phys. Rev. A **18**,2217(1978)).对量子光学来说,这有一定的重要意义,因为经典光学无法对它解释.

具有 $\gamma^{(2)}(\tau)<1$ 的最明显的状态是单模光场的光子数本征态.由(7.2.32),这时 $\gamma^{(2)}(\tau)=1-\dfrac{1}{n}$,与 $\tau$ 无关.因此它虽然是光子间的负关联态,但不满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma^{(2)}(\tau)\mid_{\tau\to 0}>0, \tag{7.3.22}$$

因此还不能算是真正的反群聚光场.

下面我们就单模并具有固定偏振方向的光束情况来考察出现 $\gamma^{(2)}<1$ 的条件.对于上述光束,我们可以应用(7.2.30),于是得出①

$$|\gamma^{(2)}|=\frac{\mathrm{tr}[\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2]}{[\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a})]^2}=\frac{\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle^2}=1+\frac{\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2-\langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle^2}, \tag{7.3.23}$$

① (7.3.22)和(7.3.23)式中的 $\gamma^{(2)}(\tau)$都与 $\tau$ 无关.从而当 $\tau\to\infty$时并不趋于 1,是因为我们假定了光场是严格的单模光.如果该光场有一个小的频谱宽度,$\gamma^{(2)}(\tau)$在 $\tau\to\infty$时就将趋于 1.请比较(7.2.15)与(7.2.9)式,并参见(7.2.26b)式的下文.

此值与 $\tau$ 无关. 上式中$\langle\hat{n}\rangle$和$\langle\hat{n}^2\rangle$即为 $\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{n})$和 $\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{n}^2)$的简写.

我们知道,对于泊松分布,$\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2=\langle\hat{n}\rangle$,因而可以把$\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2>\langle\hat{n}\rangle$的分布称为超泊松分布,把$\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2<\langle\hat{n}\rangle$的分布称为亚泊松分布. 这样,$|\gamma^{(2)}|>1$ 就对应于超泊松分布,$|\gamma^{(2)}|<1$ 就对应于亚泊松分布.

亚泊松分布的光场也称为幅模压缩态光场. 山本(Yamamoto)等通过压低半导体激光器的抽运噪音成功地产生出了幅模压缩态光场(见 Yamamoto, Machida and Nilson, Phys. Rev. A, **34**, 4025(1986); Yamamoto and Machida, Phys. Rev. A, **35**, 5114(1987)). 它能大大提高光学测量的精度和荷载更大量的信息.

最后再就单模光场情况考察群聚和反群聚性与 $P$ 表示的分布函数$P(\alpha)$的行为间的关系. 将

$$\hat{\rho}=\int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

代入$\langle\hat{n}\rangle=\mathrm{tr}(\hat{n}\hat{\rho})$和$\langle\hat{n}^2\rangle=\mathrm{tr}(\hat{n}^2\hat{\rho})$式中,并令 $U\equiv|\alpha|^2$,即得

$$\langle\hat{n}\rangle=\int \mathrm{d}^2\alpha\,|\alpha|^2 P(\alpha)=\langle U\rangle,$$

$$\langle\hat{n}^2\rangle=\int \mathrm{d}^2\alpha P(\alpha)\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}^2\alpha(|\alpha|^4+|\alpha|^2)P(\alpha)=\langle U^2\rangle+\langle U\rangle, \tag{7.3.24}$$

上式右方最后一项是由于 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 不对易而得出的. 于是有

$$\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2=\langle U\rangle^2-\langle U\rangle^2+\langle U\rangle\equiv\langle\Delta U\rangle^2+\langle\hat{n}\rangle. \tag{7.3.25}$$

(7.3.25)式表明:$(\Delta n)^2\equiv\langle\hat{n}^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2$ 包括两项,第一项是强度($U=|\alpha|^2$ 为相干光场的无量纲强度)涨落所贡献的(可称为强度涨落),第二项$\langle\hat{n}\rangle$则是强度确定时(相当于 $\hat{\rho}=|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$)光子数的涨落. 这是"光具有粒子性而粒子的散布又具有随机性"的结果(散粒效应),故可称为散粒性涨落,犹如真空管中阴极电流在恒定电压下仍出现的涨落(附带指出,导线中电子的"粒子性噪音"要比散粒噪音小,因为电流涨落可形成导体中电荷积累,从而起到抑制这种涨落的作用①,如同真空管中出现空间电荷的情况).

在经典物理学中,$(\Delta U)^2=\langle U\rangle^2-\langle U\rangle^2$ 恒为正定的($\geqslant 0$),于是$(\Delta n)^2$ 应恒大于$\langle\hat{n}\rangle$,即 $\gamma^{(2)}(\tau)$应恒大于(或等于)1. 这就说明了经典概念不允许出现反群聚性. 在量子光学中 $P(\alpha)$并不总是正定的(或根本不存在),从而按(7.3.24)式计算

① 若在半导体激光器上采用高内阻的抽运源,可较强地抑制抽运电流的涨落,山本和 Machida 就是采用这种办法来产生幅模压缩态光场的. 半导体激光器与普通激光器有一个重要差别,那就是普通激光器的抽运源可作为库,它不受激光器内运作的影响. 半导体激光器则不同,它的抽运源与激光器是在同一个电路上,激光器内发生的过程如电子与空穴的复合可能影响抽运电流. 抽运源的高内阻可以抑制这种影响,保持电流强度的稳定.

出的 $\Delta U$ 可能为负值.例如单模光子数本征态,按(7.3.24)式计算出的$(\Delta U)^2$ 就等于 $-n$.

由此可见,对单模光场,当 $P(\alpha)$出现负值或高度奇异从而失去意义时,才可能出现反群聚性(这时,区分强度涨落和散粒性涨落已无意义).这种光场如§5.4第5小节所述,属于特征性量子光场(通常文献中简称为量子光场).但逆命题并不成立.例如§7.5中所讨论的相干挤压态也是一种特征性量子光场,但它不一定是反群聚的.

### *5. 光子计数(photon counting)问题

过去人们常把光场的方向性(平行度)、谱分布(单色性)、偏振性和光强度看作是光场的物理要素.甚至在激光出现后,一些书籍描写它的特性和优点也只强调它的平行度和单色性好、强度大.通过上章和本章的讨论,我们看到,仅把方向性,谱分布,偏振和光强作为光场的物理要素是不恰当的.例如行波单模的混杂光和相干光,前三个点都完全一样(因为是同一个模),强度也可以做到相同.但它们的品质都仍有很大的差异.理想单模激光器所产生的光场,在抽运功率(泵浦功率)从阈值以下变到阈值以上时就经历了一个二级相变(在忽略自发辐射的情况下),即从开始出现单模准相干光(具体说明见§5.5第6小节).混杂光与准相干光品质上的差异在于它们的相干和统计性质的不同.光子数分布就是其中一个重要方面.

实验上可以测出稳恒光场的光子计数的分布.测量时采用同一曝光时间 $T$,进行多次光子计数的测量.然后对结果进行统计.问题是这种光子计数分布是否就等于该光场的光子数分布?曝光时间的长短对结果有何影响?

首先考察频率严格为 $\omega$ 的单模光场.先看相干态情况

设0到 $t$ 时间内检测到 $n$ 个光子的概率为 $P_n(t)$.为了求 $P_n(t)$,我们先来分析 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的检测分布 $P_n(t+\mathrm{d}t)$与 $t$ 时刻的检测分布 $P_n(t)$之间的联系.当 $\mathrm{d}t$ 足够小时,在 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 期间内检测到一个以上光子的概率是高级小量,因而对于 $t+\mathrm{d}t$ 时刻共测到 $n$ 个光子的情况只需考虑二种可能性:一是在0到 $t$ 时间内检测到 $n-1$ 个光子,在 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内又检测到一个光子;另一可能是在0到 $t$ 时间内已检测到 $n$ 个光子,在 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内未检测到光子.前一种可能情况的概率为

$$P_{n-1}(t)W(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $W(t)\mathrm{d}t$ 代表 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内检测到一个光子的概率.需要指出的是,在上式中第二个因子,本来应该用关联检测率而不是 $W(t)$,只是因为在相干态情况,$t$

---

* 由于讲课时间限制,这一小节内容只简单提及.

时刻光子检测的概率与此前已测到的光子的情况无关,所以才可用 $W(t)$. 这一结果很重要,否则下面的求解无法进行. 第二种可能情况的概率应即为

$$P_n(t)[1 - W(t)\mathrm{d}t].$$

于是有

$$P_n(t + \mathrm{d}t) = P_{n-1}(t)W(t)\mathrm{d}t + P_n(t)[1 - W(t)\mathrm{d}t].$$

由此即可求出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n(t) = - W(t)[P_n(t) - P_{n-1}(t)]. \tag{7.3.26}$$

显然,上式只对 $n>0$ 才成立. 当 $n=0$ 时,上式右方只有第一项,再利用(7.1.37)式即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_0(t) = - W(t)P_0(t) = - \beta(\omega)I(t)P_0(t). \tag{7.3.27}$$

对于单模相干光场,$I$ 与 $t$ 无关,于是由上式及初条件

$$P_0(0) = 1.$$

即求出

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-\beta(\omega)It}. \tag{7.3.28}$$

接着可得出 $P_1(t)$所满足的方程:将上式代入(7.3.26)式中,结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_1(t) + \beta(\omega)IP_1(t) = \beta(\omega)I\mathrm{e}^{-\beta(\omega)It}. \tag{7.3.29}$$

这是一个非齐次的一阶方程,用通常的解法即可求出. 结果为[初条件应为 $P_1(0)=0$]

$$P_1(t) = \beta(\omega)It\mathrm{e}^{-\beta(\omega)It}. \tag{7.3.30}$$

仿此递推,即得出($\beta(\omega)$简写成 $\beta$)

$$P_n(t) = \frac{1}{n!}(\beta It)^n\mathrm{e}^{-\beta It}. \tag{7.3.31}$$

这样,当我们在 0 到 $T$ 时段内进行大量的光子计数测量时,所得出的光子数分布即为

$$P(n,T) = \frac{1}{n!}(\beta IT)^n\mathrm{e}^{-\beta IT}. \tag{7.3.32}$$

从(7.3.32)式不难求出在这段时间内光子计数的平均值为

$$\langle n(T)\rangle = \beta IT, \tag{7.3.33}$$

于是(7.3.32)式又可表示为

$$P(n,T) = \frac{1}{n!}\langle n(T)\rangle^n\mathrm{e}^{-\langle n(T)\rangle}. \tag{7.3.34}$$

(7.3.32)和(7.3.34)式是泊松分布，与相干光场本身的光子数分布相似. 只是原来的$|\alpha|^2$被替换成$\beta IT\equiv\langle n(T)\rangle$. 当测出$\langle n(T)\rangle$时即可定出$|\alpha|^2$. 因为$\frac{|\alpha|^2}{V}$代表相干光场的光子数密度，故其光强$I$应为$\left(\frac{|\alpha|^2}{V}\hbar\omega\right)c$. 于是

$$|\alpha|^2=\frac{V}{\beta T\hbar\omega c}\langle n(T)\rangle. \tag{7.3.35}$$

其次来看单模混杂光场. 为了计算相应的$P(n,T)$，我们将(7.3.32)式中的$I$换成$\mathscr{I}$($I$和$\mathscr{I}$的定义见(7.1.4～7.1.5)式，对于相干光场$I=\mathscr{I}$)然后对$\mathscr{I}$作系综平均. 从混杂光场的$P(\alpha)=\frac{1}{\pi\langle n\rangle}e^{-|\alpha|^2/\langle n\rangle}$可得出$\mathscr{I}$的系综分布为①

$$P(\mathscr{I})=\frac{1}{I}e^{-\mathscr{I}I}. \tag{7.3.36}$$

于是

$$P(n,T)=\int_0^\infty\left[\frac{1}{n!}(\beta\mathscr{I}T)^n e^{-\beta\mathscr{I}T}\right]P(\mathscr{I})d\mathscr{I}=\frac{1}{1+\langle n(T)\rangle}\left[\frac{\langle n(T)\rangle}{1+\langle n(T)\rangle}\right]^n, \tag{7.3.37}$$

其中$\langle n(T)\rangle$仍由(7.3.33)式所示. 上式给出的$P(n,T)$为几何分布，亦与混杂光场本身的光子数分布相似. 两者差别同样只是$\langle\hat{n}\rangle$换成了$\langle n(T)\rangle$. 在测出$\langle n(T)\rangle$后，同样可通过$\langle\hat{n}\rangle=\frac{V}{\beta T\hbar\omega c}\langle n(T)\rangle$，可从$\langle n(T)\rangle$定出$\langle\hat{n}\rangle$[参见(7.3.35)式]

对于一般的单模的类经典光场，$P(\mathscr{I})$为正定的并具有好的行为(其奇异性不超过δ函数)，都可采用下述公式来计算光子计数分布：

$$P(n,T)=\int_0^\infty P(\mathscr{I})\frac{1}{n!}(\beta\mathscr{I}T)^n e^{-\beta\mathscr{I}T}d\mathscr{I}. \tag{7.3.38}$$

单模光场是一种理想的情况，实际中常遇到的是稳恒的准单模光，它的频率不是单一的值$\omega_0$而是在$\omega_0$附近有一个分布，如(7.1.25)式所示. 该分布的谱宽(半高处全宽)为$\gamma$. 我们知道$\frac{1}{\gamma}$代表相干时间(参见(7.1.26)及(7.2.11)式下面的讨论). 不难想到，当计数时间$T\ll\frac{1}{\gamma}$时，计数分布能区分出混杂光场和相干光场，

---

① 因$\frac{\mathscr{I}}{I}=\frac{|\alpha|^2}{\langle n\rangle}$而$\frac{d^2\alpha}{\langle n\rangle}$可化为$\frac{\pi d(|\alpha|^2)}{\langle n\rangle}=\pi\frac{d\mathscr{I}}{I}$，即$d^2\alpha$等于$\frac{\pi\langle n\rangle}{I}d\mathscr{I}$. 于是得出$P\langle\alpha\rangle d^2\alpha=\frac{1}{\pi\langle n\rangle}e^{-|\alpha|^2/\langle n\rangle}\left(\frac{\pi\langle n\rangle}{I}\right)d\mathscr{I}=\frac{1}{I}e^{-\mathscr{I}I}d\mathscr{I}\equiv P(\mathscr{I})d\mathscr{I}$

而当 $T \gg \frac{1}{\gamma}$ 时，就难以区分了，因前者的计数分布也趋于泊松分布．下面就来作具体的说明．

在对光强作系综平均之前，(7.3.27)式中的 $I(t)$ 实应为 $\mathscr{I}(t)$ ($\mathscr{I}(t)$ 为系综平均前的强度，(7.3.27)式讨论的是单模相干光，$I(t)$ 就是 $\mathscr{I}(t)$)，亦即该式可写成

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\beta\mathscr{I}(t)P_0(t).$$

它的解为

$$P_0(t) = e^{-\beta\bar{\mathscr{I}}(t)t}, \tag{7.3.39}$$

其中 $\bar{\mathscr{I}}(t)$ 代表 $\mathscr{I}$ 在 0 到 $t$ 之间的时间平均值：

$$\bar{\mathscr{I}}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathscr{I}(t')dt', \tag{7.3.40}$$

重复前面的推算过程，即得出 0 到 $T$ 时间计数的 $P_n(T)$ 为

$$P_n(T) = \frac{1}{n!}(\beta\bar{\mathscr{I}}(T)T)^n e^{-\beta\bar{\mathscr{I}}(T)T}. \tag{7.3.41}$$

这一结果是对确定的 $\bar{\mathscr{I}}(t)$ 求出的，对不同光场要用不同的系综作平均．对于准单色相干光场，它的宽度常由于场强 $E$ 的相因子无规漂移引起的，因而对 $\bar{\mathscr{I}}$ 无影响即 $P(\bar{\mathscr{I}})$ 就是 $\delta(\bar{\mathscr{I}}-I)$．对于混杂光场，当 $T \ll \frac{1}{\gamma}$ 时，Jackman 和 Pike(J. Phys. A. ser. 2,**1**,128,1968)得出

$$P(\bar{\mathscr{I}}(T)) \approx \frac{1}{I}e^{-\bar{\mathscr{I}}(T)/I}.$$

即与(7.3.36)式一致．于是 $P_n(T)$ 作系综平均后，仍近似得出(7.3.37)式．

如果 $T \gg \frac{1}{\gamma}$，Jackman 和 Pike 给出的 $P(\bar{\mathscr{I}}(T))$ 为

$$P(\bar{\mathscr{I}}) = \sqrt{\frac{\gamma T}{4\bar{\mathscr{I}}I\pi}}e^{-\frac{\gamma T}{4\bar{\mathscr{I}}I}(\bar{\mathscr{I}}-I)^2}. \tag{7.3.42}$$

其中 $\bar{\mathscr{I}}(T)$ 已简写为 $\bar{\mathscr{I}}$.

当 $\gamma T \to \infty$ 时上式右方趋于 $\delta(\bar{\mathscr{I}}-I)$，在此情况下，$P_n(T)$ 在作系综平均后的 $P(n,T)$ 仍为泊松分布

$$P(n,T) = \int_0^\infty \frac{1}{n!}(\beta\bar{\mathscr{I}}T)^n e^{-\beta\bar{\mathscr{I}}T}P(\bar{\mathscr{I}})d\bar{\mathscr{I}} \approx \frac{1}{n!}(\beta IT)^n e^{-\beta IT}. \tag{7.3.43}$$

此结果与单模混杂光场的光子数分布完全不同．物理上的理解是，在这样长的时间中，包含许多彼此不关联的小时段(每个小时段 $\sim \frac{1}{\gamma}$)，它们之间的随机性，导致了整个时段上光子计数的泊松分布．

以上讨论表明,当我们要通过光子计数来得出一个准单色的类经典光的光子数分布时,计数的时段 $T$ 应取得比 $1/\gamma$ 小[①].

下面再来看特征性量子光场的情况. 由于 $P(\alpha)$ 不存在,故不能再按 $\int_0^\infty \frac{1}{n!}(\beta\bar{\mathscr{I}}T)^n \mathrm{e}^{-\beta\bar{\mathscr{I}}T}P(\bar{\mathscr{I}})\mathrm{d}\mathscr{I}$来求 $P(n,T)$. 在稳恒光场情况,Kelly 和 Kleinel 推导了一个普遍性公式(Phys. Rev. **136**, A316, 1964),它既适用了类经典光场也适用于量子光场,既适用于单模也适用于多模的情况:

$$P(n,T) = \mathrm{tr}[\hat{\rho}\,\mathrm{N}\frac{1}{n!}(\beta\hat{\bar{\mathscr{I}}}T)^n \mathrm{e}^{-\beta\hat{\bar{\mathscr{I}}}T}], \qquad (7.3.44a)$$

其中 N 代表正规编序,$\hat{\bar{\mathscr{I}}}$由下式表示:

$$\hat{\bar{\mathscr{I}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{c}{2\pi}\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(t)\mathrm{d}t. \qquad (7.3.44b)$$

与(7.3.38)式比较,我们看到除了"$\int P(\mathscr{I})\,\mathrm{d}\mathscr{I}$换成了 $\mathrm{tr}\hat{\rho}$ 以及 $\mathscr{I}$换成了 $\hat{\bar{\mathscr{I}}}$" 以外(这是显然的),就是在量子表达式(7.3.43) 中要加上正规编序. 这种经典—量子对应关系我们在(7.2.23) 以及(7.2.24) 式中已经看到(并参见两式之间的说明). 对于单模光场,(7.3.44a) 式可以约化为

$$P(n,T) = \mathrm{tr}\left[\hat{\rho}\,\mathrm{N}\frac{1}{n!}(\xi\hat{a}^\dagger\hat{a})^n \mathrm{e}^{-\xi\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right], \quad \xi = \beta\hbar\omega cT/V. \quad (7.3.45)$$

(上述 $\xi$ 的表达式 $\xi = \beta\hbar\omega cT/V$ 只当"$T$ 不太大、检测概率随时间成正比"的情况下才成立) 由于 $\hat{a}$ 与 $\hat{a}^\dagger$ 成对出现,故 $P(n,T)$ 只与密度算符的对角元 $\rho_{mm}$ 相关. 将(7.3.45) 式中的指数因子展开成幂级数即得

$$P(n,T) = \sum_m \rho_{mm}\frac{1}{n!}\xi^n\sum_{l=0}^\infty(-1)^l\left(\frac{\xi^l}{l!}\right)\langle m \mid (\hat{a}^\dagger)^{n+l}\hat{a}^{n+l} \mid m\rangle. \qquad (7.3.46)$$

由此可以得出

$$P(n,T) = \sum_{m=n}^\infty \rho_{mm}C_n^m\xi^n(1-\xi)^{m-n}. \qquad (7.3.47)$$

此式给出了光子计数分布与光子数分布(它与 $\rho_{nn}$ 相联系)之间的关系,适用于任何稳恒的单模光场.

对于单模相干光场,若其光子数平均值为 $\bar{n}$,则 $\rho_{mn} = \frac{\bar{n}^m}{m!}\mathrm{e}^{-\bar{n}}$,于是(7.3.47)式化为

---

① 这样小的 $T$,实行起来比较困难. 实际测量中取 $T < \frac{2\pi}{\gamma}$时,即可判别出相干光和混杂光.

$$P(n,T)=\frac{1}{n!}\xi^n e^{-\bar{n}}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\bar{n}^m(1-\xi)^{m-n}}{(m-n)!}=\frac{1}{n!}(\xi\bar{n})^n e^{-\bar{n}}\sum_{m'=0}^{\infty}\frac{[\bar{n}(1-\xi)]^{m'}}{m'!}$$
$$=\frac{1}{n!}(\xi\bar{n})^n e^{-\xi\bar{n}}, \tag{7.3.48}$$

与(7.3.34)式一致.对于一般的类经典单模光场,利用其密度算符的 $P$ 表示,即可将(7.3.45)式化为

$$P(n,T)=\int d^2\alpha P(\alpha)\langle\alpha\mid \mathrm{N}\frac{1}{n!}(\xi\hat{a}^\dagger\hat{a})^n e^{-\xi\hat{a}^\dagger\hat{a}}\mid\alpha\rangle. \tag{7.3.49}$$

其中$\langle\alpha\mid \mathrm{N}\frac{1}{n!}(\xi\hat{a}^\dagger\hat{a})^n e^{-\xi\hat{a}^\dagger\hat{a}}\mid\alpha\rangle$已由(7.3.48)式右方给出(只需令其中 $\bar{n}=|\alpha|^2$).于是(7.3.49)式将与(7.3.38)式一致.

下面再看特征量子光场,这时光子计数分布 $P(n,T)$与光子数分布 $\rho_{nn}$一般并不具有相似的函数形式,例如对于光子数本征态$|n_0\rangle$(它的含意是在时段 $T$ 内进入检测器系统的光子数为恒定值 $n_0$).此态的光子数分布为 $\rho_{nn}=\delta_{nn_0}$.而由(7.3.47)式给出的光子计数分布为

$$P(n,T)=\begin{cases}C_n^{n_0}\xi^n(1-\xi)^{n_0-n}, & \text{当 } n\leqslant n_0 \text{ 时},\\ 0, \text{当 } n>n_0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{7.3.50}$$

它与 $\rho_{nn}$的函数形式完全不一致.从上式不难看出只当 $\xi\to1$(它的物理意义为每个光子都被检测到)$P(n,T)$才化为 $\delta_{nn_0}$,与 $\rho_{nn}$相同.这一结果实际上从(7.3.47)式即可直接得出:当 $\xi\to1$ 时,(7.3.47)式就化为 $\rho_{nn}$(但 $\xi=1$ 是不现实的).(7.3.50)式的结果从物理上也容易理解.由于不是每个光子都被检测到,故 $n_0$ 个光子中,可能只检测到 $n_0-1$ 个,或 $n_0-2$ 个,等等.其中有 $n(n<n_0)$个光子被检测到而 $n_0-n$ 个光子未被检测到的概率就等于"$\xi^n(1-\xi)^{n_0-n}$乘上它们各种可能的排序数目 $C_n^{n_0}$".

在以上讨论中,我们考虑的是对(统计)稳恒的行波光束进行光子计数检测.如果是对封闭在腔内光场的检测,则光场的强度将因检测而不断减少,上述理论将需要修正.但实际中这种 情况很少碰到.我们不再讨论.有兴趣的读者可参阅 Mollow 论文:Phys.Rev.**168**,1896(1968).另见 Shepherd 论文:Optica. Acta.**28**,567(1981),该文讨论了腔内场不是自由场的情况.

对于偏振方向固定的单模光场,不难证明:可以通过光子计数分布来计算$|\gamma^{(2)}|$.由(7.2.31)式,这时

$$|\gamma^{(2)}|=\sum_n n(n-1)\rho_{nn}/[\sum_n n\rho_{nn}]^2, \tag{7.3.51}$$

而从(7.3.47)式可以证明上式可以化成

$$|\gamma^{(2)}| = \sum_n n(n-1)P(n,T)/[\sum_n nP(n,T)]^2. \tag{7.3.52}$$

具体证明如下:将(7.3.47)式代入上式分子后得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(n,T) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\rho_{mm}\frac{m!}{n!(m-n)!}\xi^n(1-\xi)^{m-n}n(n-1).$$

由于求和$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}$可化为$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}$,而

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{n!(m-n)!}\xi^n(1-\xi)^{m-n}n(n-1)\\&=\sum_{n=2}^{m}\frac{m!}{(n-2)!(m-n)!}\xi^n(1-\xi)^{m-n}\\&=\xi^2 m(m-1)\sum_{l=0}^{m-2}\frac{(m-2)!}{l!(m-2-l)!}\xi^l(1-\xi)^{m-2-l}.\end{aligned}$$

由二项式展开公式上式即等于 $\xi^2 m(m-1)$. 于是得出

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(n,T) = \xi^2\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\rho_{mm}. \tag{7.3.53}$$

同样可以化出

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,T) = \xi\sum_{m=0}^{\infty} m\rho_{mm}. \tag{7.3.54}$$

这样就证明了(7.3.51)式右方与(7.3.52)式右方相等.

于是在此情况下我们可以采用光子计数分布 $P(n,T)$来代替真正的光子数分布 $\rho_{nn}$来计算单模光场的二阶相关度.

## * §7.4　等待时间分布　遍举多重检测和随机量子轨迹

在上一节中我们通过二重条件检测率 $P^{(2)}(t_1,t_1+\tau)$或二阶相关度 $\gamma^{(2)}(\tau)$[在稳恒光场情况两者成正比,参见(7.3.2)式]来区分群聚性、随机分布性和反群聚性光场. 在本节中,我们将引入另一个量"等待时间分布"来处理这同一个问题. 它能使我们对这三类光场有更多的认识. 所谓的等待时间是指在检测到一个光子后,要等待多长时间才检测到第二个光子. 此时间值一般是一个随机量,具有一个分布.

另外,我们在§7.2 中曾经指出,由(7.2.23)式定义的多重复合检测率是一种非排它性的检测率,也称作单举的检测率. 本节将介绍另一种即排它性的检测率,也就是遍举的检测率,以及相应的"遍举的条件检测率". 等待时间分布即与一阶遍举的条件检测率相等.

---

* 本节是写书时所加的,平常讲课讲不到这些内容,但本节内容对量子光学理论工作者是重要的.

如果令检测常数为1,遍举的光子检测率也就是遍举的光子辐射率.通过它我们可以得出辐射系统发射光子过程的总体面貌.它也被称作是“系统发射的量子轨迹”.这一理论并为我们提供了求解辐射系统主方程的一种有力的数值解法.

## 1. 等待时间分布

我们用 $w(\tau|t)$代表“在 $t$ 时刻检测到一个光子后等待了时间 $\tau$ 才能测到第二个光子”的概率密度(指单位时间的概率).换句话说,$w(\tau|t)\mathrm{d}\tau$ 代表 $\tau$ 到 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 时间内(在时间 $t$ 检测到第一个光子后)首次检测到第二个光子的概率.

对于稳恒的光场,$w(\tau|t)$与 $t$ 的具体值无关,可简写成 $w(\tau)$.

我们先来看单模相干光场的 $w(\tau)$.按照§7.3中说法,相干光场具有确定的强度(即 $I=\mathscr{I}$),因而它的光子数涨落完全是散粒噪音贡献的.它的光子被测到具有随机性.我们把 $t$ 到$t+\tau$ 间隔等分成$N$ 份,则在这 $N$ 个小间隔($\Delta t=\tau/N$)中都未检测到光子的概率就是$(1-\beta\mathscr{I}\Delta t)^N$,其中 $\beta$ 参见(7.1.37a)式.注意只有在光子被测到的事件是随机发生的,即每次检测结果不受以前检测影响的情况下,上述表达式才成立.紧接着在 $t+\tau$ 到$t+\tau+\mathrm{d}\tau$ 期间检测到一个光子的概率为$\beta\mathscr{I}\mathrm{d}\tau$,于是得出

$$w(\tau)\mathrm{d}\tau = (1-\beta\mathscr{I}\Delta t)^N\beta\mathscr{I}\mathrm{d}\tau. \tag{7.4.1}$$

当 $N\to\infty$,$\Delta t=\tau/N\to 0$ 时,即得出稳恒单模相干光场的 $w(\tau)$为

$$w(\tau) = \beta\mathscr{I}e^{-\beta\mathscr{I}\tau}, \quad \mathscr{I} = I. \tag{7.4.2}$$

由此式不难求出平均等待时间

$$\bar{\tau} = \int_0^\infty \tau w(\tau)\mathrm{d}\tau = 1/\beta\mathscr{I}, \tag{7.4.3}$$

即为检测率的倒数.

我们来比较 $w(\tau)$与二重符合检测率 $P^{(2)}(t,t+\tau)$.后者对于相干光场就等于 $\beta\mathscr{I}$,与 $\tau$ 无关.两者在意义上的差别是:后者不去管在 $t$ 到$t+\tau$ 之间是否能检测到光子、以及能检测到几个光子,而 $w(\tau)$则不同,它要求在 $t$ 到$t+\tau$ 之间没有检测到光子(进行了监测,但未测到),$\tau$ 愈大,这一要求实现愈不易(因相干光场中光子是随机出现的),(7.42)式右方的因子 $e^{-\beta\mathscr{I}\tau}$就是这一情况的体现.

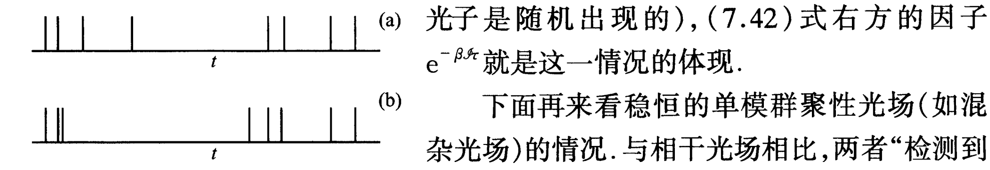



图 7.4.1　“检测到光子”的时间序列
(a) 单模相干光场情况,
(b) 单模群聚光场情况

下面再来看稳恒的单模群聚性光场(如混杂光场)的情况.与相干光场相比,两者“检测到光子”的时间序列可示意性地比较如图 7.4.1.

在混杂光场中,由于“光子群聚性”,当 $t$ 时刻检测到一个光子后,紧接着再检测到光子的

概率增大,换句话说,对于小的 $\tau$ 值,混杂光场 $w(\tau)$的值将比相干光场的对应值大.对于长一些时间的 $\tau$,混杂光场的 $w(\tau)$将变得比相干光场的对应值小,这从图 7.4.1 即可看出.至于更长时间的行为,则需要通过具体的计算给出(见下文(7.4.11)式).计算出的稳恒单模混杂光场的 $w(\tau)$表达式为

$$w(\tau) = \frac{2\beta I}{(1+\beta I\tau)^3}, \tag{7.4.4}$$

它随着 $\tau$ 增加而持续地减小.对于相干光场 $\mathscr{I}=I$,于是由(7.4.2)和(7.4.4)式即得

$$\frac{w(\tau)_{相干}}{w(\tau)_{混杂}} = \frac{1}{2}(1+\beta I\tau)^3 \mathrm{e}^{-\beta I\tau} \tag{7.4.5}$$

在 $\tau=0$ 处,上述比值为$\frac{1}{2}$,而当 $\tau$ 大于一定值时上述比值将大于 1,$\tau$ 再大,$w(\tau)_{混杂}$又变得比 $w(\tau)_{相干}$大,但这时两者的值都已甚小,参见右图(图 7.4.2).

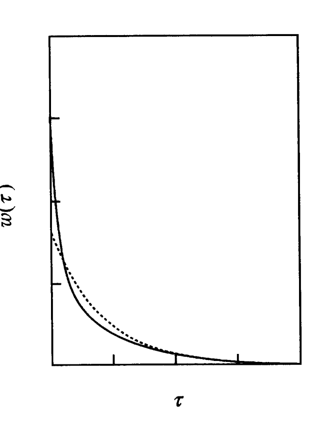



图 7.4.2　等待时间的分布
实线代表混杂光场情况,虚线代表相干光场情况

对于反群聚光场,“检测到光子”的时间序列与相干光场的相比,规则性将提高,(参见图7.4.3),相应地,等待时间的涨落将减小.例如单原子的共振荧光,如§7.3 第 4 小节所述,就是反群聚光场,它的等待时间就是分布在某个时间 $\tau_0'$ 附近,成为一个峰状,如图 7.4.4 所示.在半导体量子光学研究中通过单量子点(犹如一个巨型人工原子)的共振荧光以及微 pn 结上的库仑阻塞效应,都可产生反群聚光场,它们在集成光电路中具有重要的应用前景.

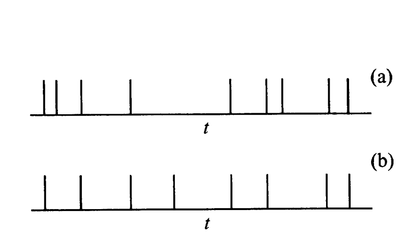



图 7.4.3　“检测到光子”的时间序列
(a) 单模相干光场情况,
(b) 单模反群聚光场情况

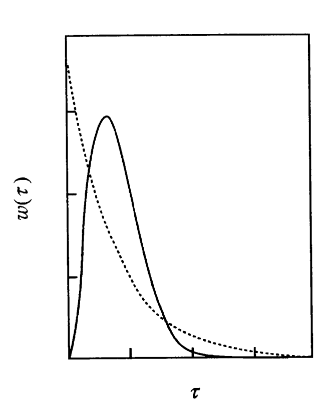



图 7.4.4　等待时间的概率分布
实线代表反群聚光场情况
虚线代表相干光场情况

**2. 单举和遍举的多重检测**

在§7.2中,我们曾给出 $n$ 重符合检测率为(参见(7.2.23)式)

$$W^{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\beta^n\langle \mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(t_1)\hat{\mathscr{I}}(t_2)\cdots\hat{\mathscr{I}}(t_n)\rangle$$

$$=\left(\frac{c}{2\pi}\beta\right)^n\langle\hat{E}^{(-)}(t_1)\hat{E}^{(-)}(t_2)\cdots\hat{E}^{(-)}(t_n)\hat{E}^{(+)}(t_n)\cdots\hat{E}^{(+)}(t_1)\rangle. \quad (7.4.6)$$

如在本节引言中所指出的,这是一种单举性的检测率,即只针对 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 时刻的检测而言,而不去管其他时间是否会检测到光子.

这种单举性的多重检测率比较容易测定,因为只需要在 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 时刻将检测器开放 $\mathrm{d}t$ 时间,求出在这 $n$ 个小"时段"都检测到一个光子的概率(一个小"时段"内检测到二个光子的概率为高级小量可以不计),然后再除以 $(\mathrm{d}t)^n$ 即得.但要用它来表示光子计数分布,则结果将很复杂.

现在我们要引入一种遍举的多重检测率 $P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T])$,它乘上 $(\mathrm{d}t)^n$ 就代表在 $[t,t+T]$ 时段内,在"$t_1$ 到 $t_1+\mathrm{d}t$"、"$t_2$ 到 $t_2+\mathrm{d}t$",…、"$t_n$ 到 $t_n+\mathrm{d}t$"各检测到一个光子而在 $[t,t+T]$ 中其余时间间隔都未检测到光子(注意:是指"检测了,但未检测到")的概率.这种遍举的多重检测率与光子计数分布 $P(n,T)$[如果光场不是稳恒的,则 $P(n,T)$ 应写成 $P(n,[t,t+T])$]有比较简单的关系,即

$$P(n,T)=\int_t^{t+T}\mathrm{d}t_n\int_t^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\int_t^{t_2}\mathrm{d}t_1P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T]). \quad (7.4.7)$$

此式不难理解,因 $t_1<t_2<t_3\cdots<t_n$,故 $t_1$ 取值在 $t$ 到 $t_2$ 之间,$t_2$ 的取值在 $t$ 到 $t_3$ 之间,等等,最后 $t_n$ 的取值是在 $t$ 到 $t+T$ 之间,是以将 $P_n(t_1,\cdots,t_n;[t,t+T])$ 对 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 积分后即得出 $P(n,T)$.

剩下的问题是,这种遍举的多重检测率的表达式是什么. Saleh 在 Photonelectron Statistics 中给出

$$P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T])=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\beta^{r+n}}{r!}\int_t^{t+T}\mathrm{d}t'_r\int_t^{t+T}\mathrm{d}t'_{r-1}$$

$$\cdots\int_t^{t+T}\mathrm{d}t'\langle\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(t'_r)\hat{\mathscr{I}}(t'_{r-1})\cdots\cdots\hat{\mathscr{I}}(t'_1)\hat{\mathscr{I}}(t_n)\cdots\hat{\mathscr{I}}(t_2)\hat{\mathscr{I}}(t_1)\rangle$$

$$=\beta^n\langle\mathrm{N}(\mathrm{e}^{-\int_t^{t+T}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'})\hat{\mathscr{I}}(t_n)\hat{\mathscr{I}}(t_{n-1})\cdots\hat{\mathscr{I}}(t_1)\rangle. \quad (7.4.8)$$

其中,$\hat{\mathscr{I}}(t)$ 如前所述即为 $\frac{c}{2\pi}\hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{+}(t)$,$\beta$ 仍代表检测系数,与(7.4.6)式中的一样.

在我们所考虑的自由光场情况下,上式的简单论证如下:首先,(7.4.7)式可写成

$$P(n,T)=\frac{1}{n!}\int_t^{t+T}\mathrm{d}t_n\int_t^{t+T}\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\int_t^{t+T}\mathrm{d}t_1P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T]),$$

而(7.3.43)式可推广成

$$P(n,T)=\beta^n\langle\mathrm{N}\frac{1}{n!}\int_t^{t+T}\hat{\mathscr{I}}(t_n)\mathrm{d}t_n\int_t^{t+T}\hat{\mathscr{I}}(t_{n-1})\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\int_t^{t+T}\hat{\mathscr{I}}(t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{e}^{-\int_t^{t+T}\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\rangle.$$

两相比较,即得出 $P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T])=\beta^n\langle\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(t_n)\hat{\mathscr{I}}(t_{n-1})\cdots\hat{\mathscr{I}}(t_1)\mathrm{e}^{-\int_t^{t+T}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\rangle$.

对于稳恒的类经典光场,其 $P$ 表示为行为良好的正定的函数,$\mathscr{I}$的概率分布 $P(\mathscr{I})$可由 $P(\alpha)$得出,这时(7.4.8)式即化为

$$P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T])=\beta^n\int_0^\infty\mathscr{I}^n\mathrm{e}^{-\beta\mathscr{I}T}P(\mathscr{I})\mathrm{d}\mathscr{I}.\qquad(7.4.9)$$

同样,我们还可以定义**遍举**的 $n$ 阶**条件**检测率 $P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n|t)$,它的意义是:在 $t$ 时刻检测到一个光子的条件下,在 $t_1\to t_1+\mathrm{d}t,t_2\to t_2+\mathrm{d}t,\cdots,t_n\to t_n+\mathrm{d}t$ 等时间又各检测到一个光子(而在其余中间时段皆未检测到光子)的概率就由 $P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n|t)(\mathrm{d}t)^n$ 表示.

总结起来,我们共引进了三个概念,等待时间分布,遍举的多重检测率和遍举的 $n$ 阶条件检测率.实际用得较多的是:等待时间分布 $w(\tau|t)$,遍举的二重检测率 $P_2(t,t+\tau;[t,t+\tau])$和遍举的一阶条件检测率 $P_1(t+\tau|t)$.它们三者的关系是

$$w(\tau\mid t)=P_1(t+\tau\mid t)=P_2(t,t+\tau;[t,t+\tau])/W(t)\qquad(7.4.10)$$

其中 $W(t)$由(7.1.37a)或由(7.4.6)式给出的 $W^{(1)}(t)$所表示.

对于单模混杂光场,$P(\mathscr{I})$由(7.3.6)式表示,于是按(7.4.9)式

$$P_2(t,t+\tau;[t,t+\tau])=\beta^2\int_0^\infty\mathscr{I}\mathrm{e}^{-\beta\mathscr{I}\tau}\frac{1}{I}\mathrm{e}^{-\mathscr{I}I}\mathrm{d}\mathscr{I}=\frac{2\beta^2I^2}{(1+\beta I\tau)^3}.\qquad(7.4.11)$$

再由 $W=W^{(1)}=\beta I$ 即可证明(7.4.4)式.

对于单模相干光场,$P(\mathscr{I})=\delta(\mathscr{I}-I)$,相应的 $P_2(t,t+\tau;[t,t+\tau])$就等于 $\beta^2I^2\mathrm{e}^{-\beta I\tau}$,由此得出的 $w(\tau)$与(7.4.2)式一致.

最后,我们指出若 $\beta IT$ 为一小量则可令 $\mathrm{e}^{-\int_t^{t+T}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\approx1$ 时,这时(7.48)式右方近似化为 $\beta^n\langle\mathrm{N}\hat{\mathscr{I}}(t_n)\hat{\mathscr{I}}(t_{n-1})\cdots\hat{\mathscr{I}}(t_1)\rangle$,于是 $P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+\tau])$将近似等于(7.4.6)式中的 $W^{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$.在通常的光子计数实验中,$\beta IT$ 多为一小量,于是 $P_2(t,t+\tau;[t,t+\tau])\approx W^{(2)}(t,t+\tau)$.再由 $\gamma^{(2)}(t,t+\tau)$与 $W^{(2)}(t,t+\tau)$的关系[参见(7.2.28)和(7.2.29)式],即得出

$$\gamma^{(2)}(t,t+\tau)\approx\frac{1}{\beta}w(\tau).\qquad(7.4.12)$$

这就说明了,在有些实验中严格说来测量的本是 $w(\tau)$,却给出了二阶相关度 $\gamma^{(2)}$.

最后我们来说明,如果光场并非自由场,而是与原子(或相它辐射源)相互作用着的场,那么(7.4.8)式该如何改写.在此情况下,$\hat{\mathscr{I}}(t)$应为海森伯算符,不同时间的 $\hat{\mathscr{I}}(t_1)$和 $\hat{\mathscr{I}}(t_2)$是不可对易的.(7.4.8)式中的正规编序要改用"正规加时间"编序.它的定义是:首先按正规编序把所有放射算符(产生算符)放在所有吸收算符(湮灭算符)的左面,其次,在放射算符中按时间先后从左向右排列(时间最早的排在最左边),而放射算符按时间先后从右向左排列(时间最早的排在最右边).我们将用前后两个:来表示这种编序即(7.4.8)式需改写为

$$P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T]) = \beta^n\langle :\mathrm{e}^{-\int_t^{t+T}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\hat{\mathscr{I}}(t_n)\hat{\mathscr{I}}(t_{n-1})\cdots\hat{\mathscr{I}}(t_1):\rangle. \tag{7.4.13}$$

当然,我们也可将上式右方写成

$$\beta^n\langle :\mathrm{e}^{-\int_{t_n}^{t_n+T}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\hat{\mathscr{I}}(t_n)\mathrm{e}^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\hat{\mathscr{I}}(t_{n-1})\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}\hat{\mathscr{I}}(t_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_t^{t_1}\beta\hat{\mathscr{I}}(t')\mathrm{d}t'}:\rangle.$$

以细致显示在 $t_i$ 时刻检测到光子后经过 $t_i$ 到 $t_{i+1}$ 这一段时间未检测到光子,到 $t_{i+1}$ 处又再检测到一个光子,……的历史过程

(7.4.13)式中的态矢量为总场的状态,其中含有自由场和辐射源产生的场两部分,后者可用辐射源的算符表示.我们把海森伯图象中的 $\hat{E}^{(\pm)}(t)$表为 $\hat{E}_0^{(\pm)}(t)+\hat{E}_s^{(\pm)}(t)$其中 $\hat{E}_s^{(\pm)}$ 由辐射源的跃迁算符来表示(好比推迟解那样),而 $\hat{E}_0^{(\pm)}(t)$为解 $\hat{E}_0(t)$中的自由场部分.

我们也可将(7.4.13)式用到辐射源发射光子的检测,这时 $\hat{\mathscr{I}}(t)$化为$\frac{c}{2\pi}\hat{E}_s^{(-)}(t)\hat{E}_s^{(+)}(t)$,从而只含辐射源算符.

这里的辐射源可以是单纯的原子分子,也可以是像激光器那样既包括原子分子也包括腔场.在后一情况,辐射源放射光子也就是激光器内的光子透过腔镜的外泄.

如令 $\hat{\rho}_T$ 表示系统总体的密度算符,则(7.4.13)式可以写成

$$P_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;[t,t+T]) = \beta^n\mathrm{tr}[:\mathrm{e}^{-\int_t^{t+T}\beta\mathscr{I}(t')\mathrm{d}t'}\hat{\mathscr{I}}_s(t_n),\cdots,\hat{\mathscr{I}}_s(t_1):\hat{\rho}_T], \tag{7.4.14}$$

其中符号::代表"正规加时间"编序.

### 3. 密度算符的量子随机轨迹解

这是20世纪90年代发展起来的一种处理主方程的方法,它可以显示一个开放系统与库作用的细致过程.它还可以将量子测量嵌入到动力学理论中.这时,一条随机量子轨迹即与一个实际监测过程相对应.

在本小节中,我们将对这种理论方法作简单介绍①,并以发光源与热光场(库)作用为例,对此理论方法作具体说明.另外要指出的是,所谓的发光源不仅是指原子,也可以包括激光器那样的复杂系统.

为简明起见,下面将 $\bar{n}_T$ 忽略不计(实际上对于可见光频 $\omega$,在普通温度下,

---

① 有兴趣的读者可参阅 Carmichael 的书 An Open System Approach to Quantum Optics.

$\bar{n}_T(\omega)$是一个很小的值,参见§6.4中的估计),于是在薛定谔图象中,主方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{nh}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{H}_{nh}^{\dagger}] + \beta\hat{b}\hat{\rho}(t)\hat{b}^{\dagger} \tag{7.4.15}$$

其中 $\hat{H}_{nh}$ 为非厄米哈密顿量,即把阻尼项包括在其内.$\sqrt{\beta}\hat{b}$ 和$\sqrt{\beta}\hat{b}^{\dagger}$ 为发光源的跃迁算符(参见(6.4.19)式,其中发光源为二能级原子,$\hat{b}$ 和 $\hat{b}^{\dagger}$ 对应于 $\hat{\sigma}_-$ 和 $\hat{\sigma}_+$)(7.4.15)式右方最后一致即为坍缩项.

于是在经过 $\Delta t$ 时间后,$\hat{\rho}$的改变为

$$\Delta\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[(\hat{H}_{nh}\Delta t)\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)(\hat{H}_{nh}^{\dagger}\Delta t)] + \beta(\hat{b}\sqrt{\Delta t})\hat{\rho}(t)(\hat{b}^{\dagger}\sqrt{\Delta t}). \tag{7.4.16}$$

由此可见,$\hat{H}_{nh}$和$\hat{H}_{nh}^{\dagger}$所起的作用与 $\Delta t$ 成正比,而坍缩$\sqrt{\beta}\hat{b}$ 和$\sqrt{\beta}\hat{b}^{\dagger}$ 的作用与$\sqrt{\Delta t}$成正比,后者同无规行走的结果相类似,是一种随机的行为,(这一特点,在(6.4.20)式下已经讲到过.由于这里的需要而再次指明),因此在 $\hat{\rho}(t)$的解中,我们将对 $\hat{H}_{nh}$ 所引起的演化和$\sqrt{\beta}\hat{b}$ 所引起的坍缩作不同的处理.

下面形式地引入两个超算符$\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}$和 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$,它们作用到 $\hat{\rho}$上的规则为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}\hat{\rho} &= \hat{H}_{nh}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}_{nh}, \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}\hat{\rho} &= \beta\hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^{\dagger} \end{aligned} \tag{7.4.17}$$

于是方程(7.4.15)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}\hat{\rho}(t) + \hat{\boldsymbol{\zeta}}\hat{\rho}(t) \tag{7.4.18}$$

它的解可形式上写成

$$\hat{\rho}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}t + \hat{\boldsymbol{\zeta}}t} + \hat{\rho}(0). \tag{7.4.19}$$

由于坍缩作用的随机性,我们把 $\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{\zeta}}t}$分成许多小段 $\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{\zeta}}\Delta t} \approx (1 + \hat{\boldsymbol{\zeta}}\Delta t)$的乘积,再将它们以各种可能的方式插到 $\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(t_j - t_{j-1})}$中间.在将各个$(1 + \hat{\boldsymbol{\zeta}}\Delta t)$项展开后,就得出

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \mathrm{d}t_n \int_0^t \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \int_0^t \mathrm{d}t_1 \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(t-t_n)}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(t_n - t_{n-1})} \\ \cdots\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(t_2 - t_1)}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}t_1}\hat{\rho}(0). \end{aligned} \tag{7.4.20}$$

在上式中,坍缩发生的次数包括 0,1,2,…,发生的时间以各种可能的分布出现在 $0\sim t$的间隔内.

(7.4.20)式中的坍缩算符使发光源的状态发生跃变,对应于光子的发射(我们

已取 $\bar{n}_T=0$,因而发光源吸收光子的可能已经略去),而 $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\Upsilon}(t_j-t_{j-1})}$代表 $t_{j-1}$到 $t_j$ 时段内的无发射演化(既然没有发射,为何发光源还会出现有阻尼的演化?关于这个问题我们将在后面回答).这样,(7.4.20)式右方的每一项就代表发光源放射光子的一个可能轨迹.对所有可能的演化轨迹求和就给出从 $\hat{\rho}(0)$到 $\hat{\rho}(t)$的变化过程.

如果要考虑的是遍举的监测过程,只要把(7.4.20)式中所有的 $\hat{\zeta}$乘上一个检测效率因子即可.于是(7.4.20)式也代表检测效率为 100%的监测过程.

(7.4.20)式是把 $\hat{\rho}(t)$展开为各种可能的量子轨迹的和.下面我们要将 $\hat{\rho}(t)$表为许多随机量子轨迹的平均.

由于从求和转到了统计平均,故每条随机量子轨迹在每个时刻,$\hat{\rho}$都应满足归一化的要求.在数学上,上述转化也就是通过蒙特卡洛方法来处理(7.4.20)式中的求和.

在每条随机量子轨迹中,放射光子的数目和时间都不是设定的,而是在计算过程中随机定出的.我们用 $\hat{\rho}_c(t)$来表示每一个这样得出的结果,然后对许多个 $\hat{\rho}_c$来计算物理量的平均值.$\hat{\rho}_c(t)$的具体计算如下:

把时段$[0,t]$分成许多小间隔.对于每个小间隔$(t_j,t_{j+1})$,$\hat{\rho}_c$ 的演化都有两种可能,一种是"无放射"演化,这时

$$\hat{\rho}_c(t_{j+1}) = \alpha_j e^{-\frac{i}{\hbar}\Upsilon\Delta t}\hat{\rho}_c(t_j) \equiv \alpha_j e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{nh}\Delta t}\hat{\rho}_c(t_j)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{nh}^{\dagger}\Delta t}, \qquad (7.4.21)$$

其中 $\alpha_j$ 代表归一化常数,

$$\alpha_j = [\mathrm{tr}(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\Upsilon}\Delta t}\hat{\rho}_c(t_j))]^{-1}. \qquad (7.4.22)$$

另一种是"放射"演化,它可表为

$$\hat{\rho}_c(t_{j+1}) = \alpha_j'\hat{\zeta}\,\hat{\rho}_c(t_j) \equiv \alpha_j'\beta\hat{b}\,\hat{\rho}_c(t_j)\hat{b}^{\dagger}, \qquad (7.4.23)$$

其中 $\alpha_j'$ 同样代表归一化常数.

为了确定在某个小间隔 $\Delta t$ 内发生哪一种演化,我们先来计算在该小间隔$(t_j\to t_{j+1})$内发射光子的概率 $p_j$.根据主方程中超算符 $\hat{\zeta}$的意义,

$$p_j = \mathrm{tr}[\hat{\zeta}\,\hat{\rho}_c(t_j)]\Delta t, \qquad (7.4.24)$$

其中 $\Delta t$ 要取得足够小,使 $p_j<1$,然后我们产生一个随机数 $r$,它以均匀的概率分布在$[0,1]$间隔内.如果产生出的 $r<p_j$,我们就选择放射演化,而若 $r>p_j$ 则选取无发射演化.这样两者发生的概率比值就是 $p_j/(1-p_j)$.

按此办法,从 $\hat{\rho}_c(0)=\hat{\rho}(0)$开始,一小段一小段地演化下去,就可求出整个一条随机量子轨迹.对于一个问题通常需要计算数百条这样的轨迹,然后用每条轨迹来计算所需要的物理量,再对所有的轨迹平均.

如果初始时,发光源的密度算符可表为因子化的形式,即

$$\hat{\rho}_c(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|, \tag{7.4.25}$$

那么无论是放射演化(7.4.21)还是无放射演化(7.4.23),$\hat{\rho}_c(t)$都将保持这种因子化的形式,即

$$\hat{\rho}_c(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\,. \tag{7.4.26}$$

于是我们可以用计算$|\psi(t)\rangle$来代替计算$\hat{\rho}_c$. $|\psi(t)\rangle$的每一步演化即由无放射型演化

$$|\psi(t_{j+1})\rangle = \sqrt{\alpha_j}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{nh}\Delta t}\,|\psi(t_j)\rangle \tag{7.4.27}$$

或放射型演化

$$|\psi(t_{j+1})\rangle = \sqrt{\alpha_j'}\beta\hat{b}\,|\psi(t_j)\rangle \tag{7.4.28}$$

来实现.两次相邻的放射演化间的时差即为放射的等待时间,由此可以求出等待时间的分布.这也是随机量子轨迹方法的一个优点.

最后来看一个简单例子:一个二能级原子的自发辐射.由(6.4.18)和(6.4.20)式,这时

$$\begin{aligned}\hat{H}_{nh} &= \hat{H}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar\gamma\hat{n}_2,\\ \sqrt{\beta}\hat{b} &= \sqrt{\gamma}\hat{\sigma}_-\,.\end{aligned} \tag{7.4.29}$$

其中 $\hat{n}_2$ 为上能级布居数算符.如果取原子上、下能级中点为能量原点,则 $\hat{H}_0$ 可表为$\frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3$,而 $\hat{n}_2$ 可表为 $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$,原子初态设为

$$|\psi(0)\rangle = c_1(0)\,|1\rangle + c_2(0)\,|2\rangle \tag{7.4.30}$$

在此例子中,整个过程至多只能出现一次坍缩,因为坍缩算符作用到$|2\rangle$上得出$\sqrt{\gamma}|1\rangle$,再作用一次就等于零.因此在$|\psi(t)\rangle$达到$|1\rangle$时,演化即中止.

如果在某个随机量子轨迹中,直到 $t$ 时刻尚未发生坍缩,则由(7.4.27)和(7.4.29)式,$|\psi(t)\rangle$将为

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)[c_1(0)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_0 t}\,|1\rangle + c_2(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma t-\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_0 t}\,|2\rangle], \tag{7.4.31}$$

其中 $\alpha(t)$为归一化常数.在下一个时段$(t,t+\Delta t)$发生坍缩的概率按(7.4.24)计算的结果为

$$p(t) = |\alpha(t)|^2\,|c_2(0)|^2\mathrm{e}^{-\gamma t}\gamma\Delta t = \frac{|c_2(0)|^2\mathrm{e}^{-\gamma t}}{|c_1(0)|^2 + |c_2(0)|^2\mathrm{e}^{-\gamma t}}\gamma\Delta t\,. \tag{7.4.32}$$

如果 $c_1(0)=0$,即初始时原子处在激发态,则 $p(t)$恒等于 $\gamma\Delta t$,为一个与 $t$ 无关

的常数.继续演化下去,总会发生坍缩.发生坍缩后演化就此终止.如果 $c_1(0)\neq 0$,则开始时坍缩概率就比 $\gamma\Delta t$ 小一个百分比 $\frac{|c_2(0)|^2}{|c_1(0)|^2+|c_2(0)|^2}$,随着 $t$ 的增大,按(7.4.32)式发生坍缩的概率还将愈来愈小并趋于零.若到 $t$ 很大时还未发生坍缩,很可能继续演化下去再也不会出现坍缩.这种情况意味着当初原子实际上是在 $|1\rangle$.出现这种情况的概率应等于 $|c_1(0)|^2$,这样才与(7.4.30)式相洽.

读者或许会感到奇怪:没有发生坍缩,原子状态如何会变到基态 $|1\rangle$ 呢? 回答是:"未检测到光子"也构成对原子状态某种检测.虽然这种检测不是直接的,不能明确判定原子的能级是在 $|1\rangle$ 还是在 $|2\rangle$,但会改变它们的概率分布.(7.4.31)就是这一结果的显示.若这种检测结果持续地发生下去,原子状态就逐渐地明确为基态 $|1\rangle$.

从以上讨论我们清楚地看到 $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{nh}t}$ 的衰减项($e^{-\frac{1}{2}\gamma\hat{n}_2 t}$)在处理过程中的作用:它体现了"发光检测但未测到光子"的结果对原子状态的改变.换句话说,对发射光子的检测,无论是"测到"还是"未测到"都会改变原子的状态,只不过一个是突变,一个是渐变.

在研究某些更复杂的系统如激光器时,不仅有与腔内光场(输出相应的)坍缩,还有与原子能级的弛豫或抽运所相应的状态坍缩(如原子主方程中所出现的),有关情况可参见附录 G.

## * §7.5 光场的正交挤压相干态

人类所使用的光场长期以来(直到激光出现以前)都是混杂光场,它是由大量的原子(分子)或发光中心互相独立地发出的光,如热光,固体的荧光或磷光,气体放电发光等等.激光的出现,突破了混杂光场的局限,进入到相干光场的范围,使光学获得新的发展.但无论是混杂光场还是相干光场都还没有脱离类经典光场的领域,它们的密度算符的 $P$ 表示是正定的.随着量子光学的进一步发展,人们又开始了对特征性量子光场的探索.挤压态(squeezed state)光场就是近十多年来受到重视的一种特征性量子光场.它又分正交挤压态(或正交分量挤压态)和振幅挤压态.它们可以用来进行超高精度的光学测量(例如探测引力波①),或扩大光信息的荷载容量.它的一个重大缺点是,在与周围环境接触中,其特有品质易受到破坏.本节将对相干正交挤压态的性质作简要介绍.

---

* 由于授课时间限制,通常只讲本节的第一小节.

① 例如见 C. M. Caves, Phys. Rev. D**23**,1693(1981).

**1. 挤压态的物理意义**

在§5.2第4小节中，我们曾提到，(单模)相干态光场相当于“带有零点振动不确定度”的经典光波.我们可以形象地用一根模糊的粗线表示它的场强，如图7.5.1所示.

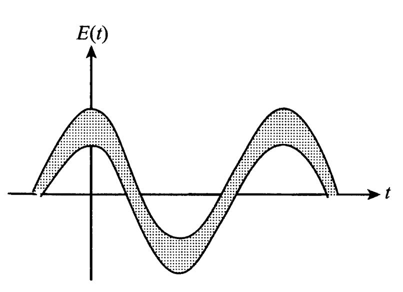


图7.5.1　单模相干态光场的 $E(t)$ 图中垂直虚线的长度代表 $\Delta E(t)$，它的大小与 $t$ 无关

在经典光学中，如果将光场振幅 $\alpha$ 的实部和虚部 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 来表示，则在 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面中，一个单模相干光场可用一个点来表示.而在量子光学中一个相干光场在类似的图中则要用一个圆斑来表示即 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的取值有一个范围.这是因为 $\hat{a}_1$ 与 $\hat{a}_2$ 不对易，不可能有它们的本征值($\alpha_1$ 和 $\alpha_2$)都确定的状态. $\hat{a}_1$ 与 $\hat{a}_2$ 与吸收算符 $\hat{a}$ 的关系为

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}), \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}). \tag{7.5.1}$$

亦即

$$\hat{a} = \hat{a}_1 + \mathrm{i}\hat{a}_2, \qquad \hat{a}^{\dagger} = \hat{a}_1 - \mathrm{i}\hat{a}_2. \tag{7.5.2}$$

不难证实 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 是互相不对易的，它们之间的对易子为

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = \frac{1}{2}\mathrm{i}. \tag{7.5.3}$$

于是在任一状态中它们的不确定度 $\Delta\alpha_1 = \sqrt{\langle\hat{a}_1^2\rangle - \langle\hat{a}_1\rangle^2}$ 和 $\Delta\alpha_2 = \sqrt{\langle\hat{a}_2^2\rangle - \langle\hat{a}_2\rangle^2}$ 满足下述测不准关系：

$$(\Delta\alpha_1)(\Delta\alpha_2) \geqslant \frac{1}{4}. \tag{7.5.4}$$

相干态是具有最小测不准度乘积$(\Delta\alpha_1)(\Delta\alpha_2)$而且 $\Delta\alpha_1$ 与 $\Delta\alpha_2$ 相等的态，因此对于相干态有

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \frac{1}{2}. \tag{7.5.5}$$

图7.5.2　在 $\alpha_1$-$\alpha_2$ 平面中图示的相干态

在 $\alpha_1$-$\alpha_2$ 图中，这一不确定度就对应于半径为$\frac{1}{2}$的小圆斑，如图7.5.2所示. $\alpha_1, \alpha_2$ 的不确定性在光信息中表现为量子噪音.它是一种比热噪音大得多的噪音，因为它相当半个光子能量的涨落，而在光频情况，$\frac{1}{2}\hbar\omega$ 要比热噪音 $kT$($T$ 为室温)大得多.这样在消

除了环境和线路产生的其他噪音之后,量子噪音问题将变得突出起来.

为了减少量子噪音,人们考虑这样的光场,它在 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面不同的方向具有不同的不确定度,其最小值(设位于 $\boldsymbol{S}$ 方向)$\Delta\alpha_S$ 比$\frac{1}{2}$小,而最大值 $\Delta\alpha_L$(位于与 $\boldsymbol{S}$ 相垂直的$\boldsymbol{L}$ 方向)比$\frac{1}{2}$大,使 $\Delta\alpha_S\Delta\alpha_L\geqslant\frac{1}{4}$仍成立.这种态的不确定度在 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面中将由一个扁圆斑表示,参见图 7.5.3 并称为正交挤压态光场①.

本节要介绍的正交挤压相干态光场是一种特定的正交挤压态.它是一个单模纯态(具有确定频率),在任何时刻都保持最小测不准度乘积:$\Delta\alpha_S\Delta\alpha_L=\frac{1}{4}$.

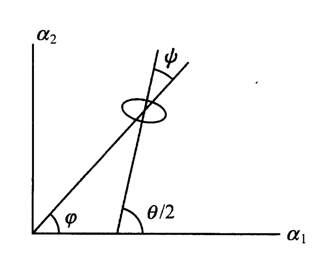



图 7.5.3　在 $\alpha_1$-$\alpha_2$ 平面中的正交挤压相干态

由于 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面中的每一点将以同样的角速度作圆周运动,因而扁圆斑的短轴方向和长轴方向会随着时间而旋转(扁圆斑的形状并不变,只是方位在旋转).这样,有物理意义的是压缩方向(即短轴方向)与中心方向(从原点到中心点的方向)间的夹角 $\psi$,$\psi$ 的值不随时间改变.当 $\psi=0$ 或$\frac{\pi}{2}$时,我们称为正挤压,参见图 7.5.3.

为了对正交挤压相干态光场有一个直观的印象,我们来看它所对应的矢势和电场随时间的变化,矢势 $A$ 和电场$E$ 用随机数$\alpha$ 表示出来即为

$$
\begin{aligned}
A(t)&=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}}[\alpha(t)+\alpha^*(t)]=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}}(\alpha e^{-i\omega t}+\alpha^* e^{i\omega t})=\sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{V\omega}}\mathrm{Re}(\alpha e^{-i\omega t}),\\
E(t)&=i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}[\alpha(t)-\alpha^*(t)]=i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}(\alpha e^{-i\omega t}-\alpha^* e^{i\omega t})=\sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}}\mathrm{Im}(\alpha e^{-i\omega t}).
\end{aligned}
\tag{7.5.6}
$$

按照上式,$A$ 和$E$ 像$\alpha$ 一样亦为随机数.如后面第三小节所述,大体上说 $\alpha(t)$分布在一个扁圆斑内.此扁圆斑中心在转动((7.5.6)式中的因子 $e^{-i\omega t}$ 即表示这一转动),方位亦随时间在变化(例如若 $t=0$ 时扁圆斑中心在 $\alpha_1$ 轴上,其长轴与 $\alpha_1$ 轴垂直,则在 1/4 周期后,该扁圆斑中心转到 $\alpha_2$ 轴上时,其长轴将变得与 $\alpha_1$ 轴平行).除了带量纲的系数以外,$A$ 由上述扁圆斑在$\alpha_1$ 轴上的投影给出,而 $E$ 由上述扁圆斑在$\alpha_2$ 轴上的投影给出.在正挤压的情况[$\psi=0$ 和 $\psi=\frac{\pi}{2}$,角度 $\psi$ 的意义见

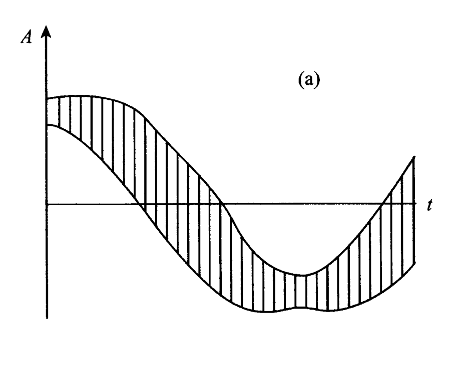
---

① 好比不确定度圆斑受到了挤压,使得 $\boldsymbol{S}$ 方向的不确定度压缩了,而 $\boldsymbol{L}$ 方向的不确定度却膨胀了.

(7.5.6)式上和图 7.5.3],$A$ 随时间的变化如图 7.5.4 所示.

正交挤压相干态的光子数分布可能是亚泊松分布也可能是超泊松分布.以正挤压情况而言,当 $\psi=\frac{\pi}{2}$(设 $|\alpha|$ 不太小使扁圆斑不致掩盖原点)时,光子数将具有超泊松分布.当 $\psi=0$ 时,则为亚泊松分布.更详细的说明,见本节(7.5.55)式下文.

当我们利用不确定度小的"$\alpha$ 分量"来荷载信息时,就可以提高信噪比.对于一些极其微弱的效应如引力波的探测,也只有应用挤压态才可能实现.



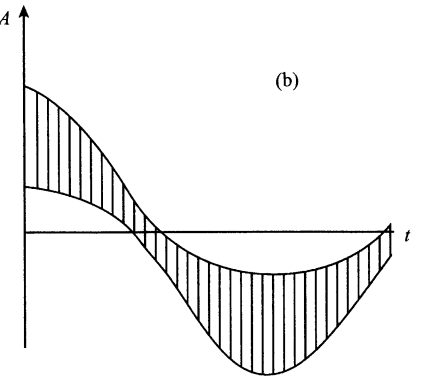




图 7.5.4　单模正交挤压相干态的矢势 $A$

(a) $\psi=0$ 情况,(b) $\psi=\frac{\pi}{2}$ 情况,$\psi$ 代表压缩方向与中心点方向间的夹角

**2. 光场的挤压算符**

在§5.2 第一小节中我们曾定义了单模光场的平移算符

$$\hat{D}(\alpha)=e^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}},\quad(7.5.7)$$

它作用到真空态 $|0\rangle$ 即可得出(单模)相干态 $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle=\hat{D}(\alpha)|0\rangle.\quad(7.5.8)$$

真空态 $|0\rangle$ 也就是 $\alpha=0$ 的相干态,它在 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面上用一个中心位于原点半径为 $\frac{1}{2}$ 的小圆斑来表示①. $\hat{D}(\alpha)$ 的作用就是把圆斑的中心从原点平移到 $\alpha$.

为了从数学上描述正交挤压态 Stoler 引进了挤压算符 $\hat{S}(\zeta)$(见 Phys.Rev.D, **1**,3217,1970).它将包含两个参数,一个是压缩方向参数 $\theta/2$.它等于不确定度扁圆短轴方向(即压缩方向)与 $\alpha_1$ 轴间的夹角(参见图 7.5.3).另一个为表示挤压度的参数 $r(r>0)$,$e^{-r}$ 代表"扁圆斑的半短轴长度 $\Delta\alpha_S$"与零点振动的不确定度 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 的比:

① 这一结果并不意味着真空态也像 $\alpha\neq0$ 的相干态一样,具有光子数涨落.因为光子数涨落 $\Delta n$ 并不与 $\Delta\alpha_1$ 和 $\Delta\alpha_2$ 相联系.按(5.2.15)式,相干态的 $\Delta n$ 等于 $\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$.

$$e^{-r} = 2\Delta\alpha_S. \tag{7.5.9}$$

$\frac{\theta}{2}$和 $r$ 可分别称为压缩方向角和挤压度.若定义挤压因子(复数)为

$$\zeta = re^{i\theta}, \tag{7.5.10}$$

则 Stoler 定义的光场挤压算符即为

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}\zeta^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta\hat{a}^{\dagger 2}}. \tag{7.5.11}$$

显然它是一个幺正算符.正交挤压相干态的定义可表示成

$$|\alpha,\zeta\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle. \tag{7.5.12}$$

也就是先对真空态挤压,然后平移 $\alpha$. $\alpha$ 即为不确定度扁圆斑的中心的位置,因而 $\hat{a}$在$|\alpha,\zeta\rangle$中的平均值即为 $\alpha$:

$$\langle \alpha_1 \zeta | \hat{a} | \alpha,\zeta\rangle = \alpha. \tag{7.5.13}$$

我们并可直接证明该态的不确定度扁圆的短轴方向与 $\alpha_1$ 轴的夹角确为 $\theta/2$,并具有最小测不准度乘积 $\Delta\alpha_S\Delta\alpha_L = \frac{1}{4}$($\boldsymbol{L}$ 方向与$\boldsymbol{S}$ 垂直,见(7.5.5)式下).为此,我们给出挤压算符的一个重要性质(证明从略):

$$\hat{S}(\zeta)\hat{a}\hat{S}^{\dagger}(\zeta) = \mathrm{ch}r\hat{a} + e^{i\theta}\mathrm{sh}r\hat{a}^{\dagger}, \tag{7.5.14}$$

图 7.5.5　旋转 $\theta/2$ 角度后的新轴

其中 $\mathrm{ch}r$ 和 $\mathrm{sh}r$ 为双曲余弦和双曲正弦函数:$\mathrm{ch}r = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r})$,$\mathrm{sh}r = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r})$. (7.5.14)式表明挤压变换把吸收算符 $\hat{a}$变成吸收算符 $\hat{a}$和发射算符 $\hat{a}^{\dagger}$ 的线性组合.如果我们用 $\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$轴和 $\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$轴代表"原来的 $\alpha_1$ 轴和 $\alpha_2$ 轴在旋转$\frac{\theta}{2}$角度后"的新轴(见图 7.5.5). $\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$和 $\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$即表示 $\hat{a}_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$和 $\hat{a}_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$的本征值,其中

$$\begin{aligned} \hat{a}_1\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \hat{a}_1\cos\frac{\theta}{2} + \hat{a}_2\sin\frac{\theta}{2}, \\ \hat{a}_2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= -\hat{a}_1\sin\frac{\theta}{2} + \hat{a}_2\cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{7.5.15}$$

从上式反解出 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 用 $\hat{a}_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$和 $\hat{a}_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$表示,再代入(7.5.14)式即可化得

$$\hat{S}(\zeta)\hat{a}_1\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{S}^{\dagger}(\zeta) = e^r\hat{a}_1\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\hat{S}(\zeta)\hat{a}_2\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{S}^{\dagger}(\zeta)=\mathrm{e}^{-r}\hat{a}_2\left(\frac{\theta}{2}\right).\qquad(7.5.16)$$

此式表明,变换 $\hat{S}(\zeta)$对旋转了$\frac{\theta}{2}$的 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 起单纯的挤压作用,从而具有比(7.5.14)式更明显的物理意义.下面即来证明由(7.5.12)式定义的$|\alpha,\zeta\rangle$在 $\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$轴的方向具有最小的不确定度,在 $\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$轴的方向具有最大的不确定度.为此,我们来求"$\hat{a}$在任意方向的分量"$\hat{a}_\phi$ 在挤压相干态$|\alpha,\zeta\rangle$上的不确定度 $\Delta a_\phi$. $\hat{a}_\phi$ 的表达式为

$$\hat{a}_\phi=\hat{a}_1\cos\phi+\hat{a}_2\sin\phi=\frac{1}{2}(\hat{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}+\hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}),\qquad(7.5.17\mathrm{a})$$

而

$$(\Delta a_\phi)^2=\langle\alpha,\zeta\,|\,\hat{a}_\phi^2\,|\,\alpha,\zeta\rangle-(\langle\alpha,\zeta\,|\,\hat{a}_\phi\,|\,\alpha,\zeta\rangle)^2.\qquad(7.5.17\mathrm{b})$$

(7.5.17b)式右方第一项 $T_1$ 可写成

$$T_1=\langle 0\,|\,\hat{S}^{\dagger}(\zeta)\hat{D}^{\dagger}(\alpha)\,\frac{1}{4}(\hat{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}+\hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^2\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)\,|\,0\rangle.\qquad(7.5.18)$$

利用 $\hat{S}(\zeta)$和 $\hat{D}(\alpha)$的幺正性和(7.5.14)式以及

$$\begin{aligned}&\hat{S}^{\dagger}(\zeta)=\hat{S}(-\zeta),\qquad -\zeta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)},\\&\hat{D}^{\dagger}(\alpha)=\hat{D}(-\alpha),\\&\hat{D}(\alpha)\hat{a}\,\hat{D}^{\dagger}(\alpha)=\hat{a}-\alpha,\end{aligned}\qquad(7.5.19)$$

即可求出

$$T_1=\frac{1}{4}[\mathrm{ch}^2r+\mathrm{sh}^2r-2(\mathrm{ch}r)(\mathrm{sh}r)\cos(\theta-2\phi)+2\alpha^*\alpha+\alpha^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}+\alpha^{*2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}].\qquad(7.5.20)$$

同样(7.5.17b)式第二项可求出为

$$T_2=(\langle\alpha,\zeta\,|\,\hat{a}_\phi\,|\,\alpha,\zeta\rangle)^2=\frac{1}{4}(2\alpha^*\alpha+\alpha^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}+\alpha^{*2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}).\qquad(7.5.21)$$

代回(7.5.17b)式即得

$$\begin{aligned}(\Delta a_\phi)^2&=\frac{1}{4}[\mathrm{ch}^2r+\mathrm{sh}^2r-2(\mathrm{ch}r)(\mathrm{sh}r)\cos(\theta-2\phi)]\\&=\frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2r}\sin^2\left(\phi-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{e}^{-2r}\cos^2\left(\phi-\frac{\theta}{2}\right)\right].\end{aligned}\qquad(7.5.22)$$

这就是挤压相干态在任意方向上不确定度的基本公式,从它即可画出不确定度扁圆的曲线.当 $\phi=\frac{\theta}{2}$时,$\Delta a_\phi$ 的值最小(这是显然的,因$\frac{\theta}{2}$为扁圆短轴与 $\alpha_1$ 轴的夹

角,参见图 7.5.3),其值为

$$\Delta\alpha_{\theta/2} \equiv \Delta\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-r}. \tag{7.5.23}$$

又 $\Delta\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$即为 $\phi=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$时的 $\Delta\alpha_\phi$,于是从(7.5.22)式又可得出

$$\Delta\alpha_{\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}} \equiv \Delta\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{r}, \tag{7.5.24}$$

它是 $\Delta\alpha_\phi$ 的最大可能值. $\Delta\alpha_{\theta/2}$和 $\Delta\alpha_{\theta/2+\pi/2}$也就是第一小节中的 $\Delta\alpha_S$ 和 $\Delta\alpha_L$.

从(7.5.23)和(7.5.24)式又可得出 $\Delta\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$与 $\Delta\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$的乘积等于$\frac{1}{4}$. 这样(7.5.13)式下面的论断就得到了证明.

附带指出,对于原来的一对算符 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$,它们在$|\alpha,\zeta\rangle$态上的不确定度乘积(在 $\theta\neq 0$ 情况下)一般已不等于最小值 1/4. 因 $\hat{a}_1$ 的方位角 $\phi=0$, $\hat{a}_2$ 的方位角 $\phi=\frac{\pi}{2}$,于是由(7.5.22)式

$$\Delta\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2r}\sin^2\frac{\theta}{2} + e^{-2r}\cos^2\frac{\theta}{2}}, \tag{7.5.25a}$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2r}\cos^2\frac{\theta}{2} + e^{-2r}\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{7.5.25b}$$

两者的乘积为

$$(\Delta\alpha_1)(\Delta\alpha_2) = \frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2r}-e^{-2r})^2\sin^2\theta} \tag{7.5.26}$$

它一般大于 1/4,除非 $\theta=0$ 或 $\pi$. 前者($\theta=0$)代表扁圆斑短轴方向与 $\alpha_1$ 轴平行,后者($\theta=\pi$)代表扁圆斑短轴方向与 $\alpha_1$ 轴垂直(参见图 7.5.3).

最后要指出的是,平移算符 $\hat{D}(\alpha)$与挤压算符 $\hat{S}(\zeta)$互相并不对易. 因而$|\alpha,\zeta\rangle$并不等于 $\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$. 可以证明

$$\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)\hat{S}^\dagger(\zeta) = \hat{D}(\bar{\alpha}), \tag{7.5.27}$$

其中

$$\bar{\alpha} = \alpha\,\mathrm{ch}r - \alpha^* e^{i\theta}\mathrm{sh}r = |\alpha| e^{-i\frac{\theta}{2}}\left[e^{-r}\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)+ ie^{r}\sin\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)\right]. \tag{7.5.28}$$

因而有

$$\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\bar{\alpha},\zeta\rangle. \tag{7.5.29}$$

### 3. 挤压相干态的某些基本性质

我们的阐述如下:

(1) 完备性　挤压相干态是由两个复数 $\alpha$ 和 $\zeta$ 标志. 我们将 $\zeta$ 值相同的所有

挤压相干态称作一类,它们具有相同的不确定度扁圆斑(因都是由挤压真空态 $\hat{S}(\zeta)|0\rangle$ 平移得出),只是中心位置不同,不难证明每类挤压相干态都构成完备集合:

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha \mid \alpha,\zeta\rangle\langle\alpha,\zeta\mid = 1. \tag{7.5.30}$$

证明可从相干态 $|\alpha\rangle$ 的完备性

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha \mid \alpha\rangle\langle\alpha\mid = 1$$

出发,将上式从左边乘 $\hat{S}(\zeta)$,从右边乘 $\hat{S}^\dagger(\zeta)$,利用 $\hat{S}(\zeta)$ 的幺正性以及(7.5.29)式即得出

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha \mid \bar{\alpha},\zeta\rangle\langle\bar{\alpha},\zeta\mid = 1. \tag{7.5.31}$$

再从(7.5.28)式可得:$(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)$ 与 $(\alpha_1,\alpha_2)$ 间的变换行列式等于 1. 于是(7.5.31)式中的 $d^2\alpha$ 可换成 $d^2\bar{\alpha}$,这样该式就等于(7.5.30)式.

(2) $Q$ 表示 在§5.5 中曾经指出,对于有些光场,$P(\alpha)$ 会失去意义,但对任何光场 $Q(\alpha)$ 都具有好的行为. 挤压相干态就是 $P$ 表示失去意义的一个例子. 我们先来求它的 $Q$ 表示.

根据定义(5.5.29),挤压相干态 $|\alpha_0,\zeta\rangle$ 的 $Q$ 表示为

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}|\langle\alpha|\alpha_0,\zeta\rangle|^2, \tag{7.5.32}$$

因挤压相干态的 $\hat{\rho} = |\alpha_0,\zeta\rangle\langle\alpha_0,\zeta|$.

我们只需计算挤压真空态 $\hat{S}(\zeta)|0\rangle \equiv |0,\zeta\rangle$ 在 $|\alpha\rangle$ 态上的投影 $\langle\alpha|0,\zeta\rangle$,就可求出 $\langle\alpha|\alpha_0,\zeta\rangle$,因为

$$\langle\alpha|\alpha_0,\zeta\rangle = \langle\alpha|\hat{D}(\alpha_0)\hat{S}(\zeta)|0\rangle = e^{-i\mathrm{Im}(\alpha_0^*\alpha)}\langle\alpha-\alpha_0|0,\zeta\rangle. \tag{7.5.33}$$

为了计算 $\langle\alpha-\alpha_0|0,\zeta\rangle$,我们来考察 $\langle\alpha|\hat{S}(\zeta)\hat{a}|0\rangle$. 它的值应为零(因 $\hat{a}|0\rangle=0$). 但通过在算符 $\hat{a}$ 的右方插入单位算符 $\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{S}(\zeta)$(参照(7.5.11)式),并利用(7.5.14)又得出

$$\langle\alpha\mid\hat{S}(\zeta)\hat{a}\mid 0\rangle = \langle\alpha\mid[(\mathrm{ch}r)\hat{a} + e^{i\theta}(\mathrm{sh}r)\hat{a}^\dagger]\hat{S}(\zeta)\mid 0\rangle. \tag{7.5.34}$$

再由公式①

$$\langle\alpha\mid\hat{a}^\dagger\mid f\rangle = \alpha^*\langle\alpha\mid f\rangle,$$

---

① (7.5.35)第二式证明如下:利用 $\langle\alpha\mid = e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\langle 0\mid e^{\alpha^*\hat{a}}$,即可将 $\langle\alpha\mid\hat{a}\mid f\rangle$ 化为 $e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}}|f\rangle$,它又可化为 $\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}}|f\rangle) + \frac{1}{2}\alpha(e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}}|f\rangle) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\frac{1}{2}\alpha\right)\langle\alpha|f\rangle$.

$$\langle \alpha \mid \hat{a} \mid f \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{1}{2}\alpha \right) \langle \alpha \mid f \rangle, \tag{7.5.35}$$

其中$|f\rangle$为任意与$|\alpha\rangle$无关的态矢量,即可将(7.5.34)式表示为

$$\left[ (\mathrm{ch}r)\left( \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{1}{2}\alpha \right) + (\mathrm{sh}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\alpha^* \right] \langle \alpha | \hat{S}(\zeta) | 0 \rangle.$$

如令 $F_\zeta(\alpha,\alpha^*)$表示$\langle \alpha | \hat{S}(\zeta) | 0 \rangle = \langle \alpha | 0, \zeta \rangle$,由(7.5.34)式的右方本为零,就得出方程

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{1}{2}\alpha + (\mathrm{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\alpha^* \right] F_\zeta(\alpha,\alpha^*) = 0. \tag{7.5.36}$$

它的归一化解(即满足$\frac{1}{\pi}\int |F_\zeta(\alpha,\alpha^*)|^2 \mathrm{d}^2\alpha = \frac{1}{\pi}\int \langle 0,\zeta | \alpha \rangle \langle \alpha | 0,\zeta \rangle \mathrm{d}^2\alpha = \langle 0,\zeta | 0,\zeta \rangle = 1$的解)为

$$F_\zeta(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{(\mathrm{ch}r)^{1/2}} \exp\left[ -\frac{1}{2}\alpha^*\alpha - \frac{1}{2}(\mathrm{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\alpha^{*2} \right], \tag{7.5.37}$$

它可表示成

$$F_\zeta(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{(\mathrm{ch}r)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(1+\mathrm{th}r)\left[ \alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 - \frac{1}{2}(1-\mathrm{th}r)\left[ \alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 + \mathrm{i}(\mathrm{th}r)\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right)\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \tag{7.5.38}$$

的形式[此形式的好处是明显表示出 $Q$ 表示的等值线(椭圆)的主轴方位,见下],其中

$$\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right) = \alpha_1\cos\frac{\theta}{2} + \alpha_2\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\alpha_1\sin\frac{\theta}{2} + \alpha_2\cos\frac{\theta}{2}. \tag{7.5.39}$$

求出了 $F_\zeta(\alpha,\alpha^*)$,再通过 $F_\zeta(\alpha,\alpha^*) = \langle \alpha | 0,\zeta \rangle$以及(7.5.33)和(7.5.32)即可得出挤压相干态$|\alpha_0,\zeta\rangle$的 $Q$ 表示为

$$Q(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{\pi\mathrm{ch}r}\exp\left\{ -(1+\mathrm{th}r)\left[ \alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right) - \alpha_{01}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 - (1-\mathrm{th}r)\left[ \alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \alpha_{02}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \right\}, \tag{7.5.40}$$

其中 $\alpha_{01}\left(\frac{\theta}{2}\right)$和 $\alpha_{02}\left(\frac{\theta}{2}\right)$可通过将(7.5.39)式中的 $\alpha_i$ 换成 $\alpha_{0i}$而得出.(7.5.40)式所给出 $\theta(\alpha_1,\alpha_2)$的确是一个好函数.它的取值在 0 与$\frac{1}{\pi\mathrm{ch}r}$之间,其等值线为 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面中的椭圆,中心在$(\alpha_{01},\alpha_{02})$点.椭圆短轴沿 $\alpha_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$轴方向,长轴沿$\alpha_2\left(\frac{\theta}{2}\right)$轴方向,与不确定度扁圆的短轴和长轴一致(参见图 7.5.6),但椭圆的短轴与长轴的长度比为$\sqrt{\frac{1-\mathrm{th}r}{1+\mathrm{th}r}} = \mathrm{e}^{-r}$,与不确定扁圆的不同.

挤压相干态不存在 $P$ 表示.为了说明这一点,我们先从 $Q$ 表示来求相应的特征函数$\chi_Q(\eta_1,\eta_2)$.根据 $\chi_Q$ 的定义

$$\chi_Q(\eta_1,\eta_2)=\int \mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\eta_1\alpha_1+\eta_2\alpha_2)}Q(\alpha_1,\alpha_2),$$

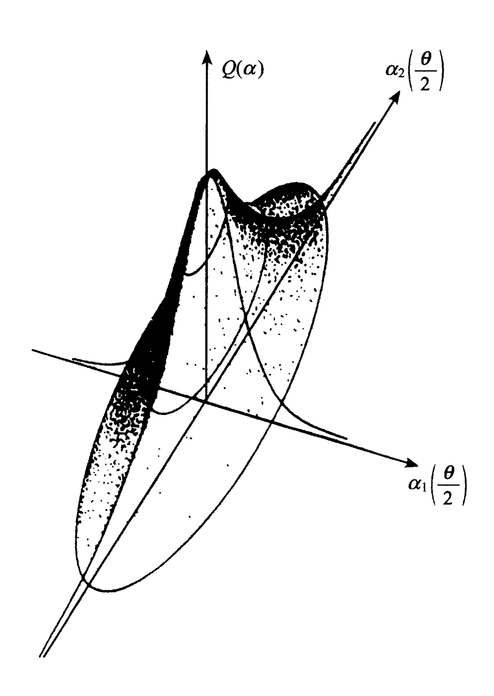



图 7.5.6　正交挤压相干态的 $Q$ 表示函数

即可得出

$$\chi_Q(\eta_1,\eta_2)=\exp\left\{2\mathrm{i}\left[\alpha_{01}\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)+\alpha_{02}\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta_2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]-\frac{1}{1+\mathrm{th}r}\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)^2-\frac{1}{1-\mathrm{th}r}\eta_2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right\}. \quad (7.5.41)$$

因此相应的 $\chi_P(\eta_1,\eta_2)$为

$$\chi_P(\eta_1,\eta_2)=\exp\left\{2\mathrm{i}\left[\alpha_{01}\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)+\alpha_{02}\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta_2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]+\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{th}r}\right)\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{1-\mathrm{th}r}\right)\eta_2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right\} \quad (7.5.42)$$

我们看到 $\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)$前的系数$\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{th}r}\right)$为正值,从而当 $\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)\rightarrow\pm\infty$时,$x_P$ 以 $\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{th}r}\right)\eta_1\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}$发散.这种发散函数的反傅里叶变换已没有意义(其奇异性超过 δ 函数的任何有限次微商),即挤压相干态的 $P$ 表示是不存在的.

(3) 光子数分布　我们先来计算挤压真空态$|0,\zeta\rangle$的光子数分布.

在前面我们已经求出$\langle\alpha|0,\zeta\rangle$,它即是$F_\zeta(\alpha,\alpha^*)$,而$\langle\alpha|0,\zeta\rangle$又可表示成

$$\langle\alpha\mid 0,\zeta\rangle=\sum_n\langle\alpha\mid n\rangle\langle n\mid 0,\zeta\rangle=\sum_n\frac{1}{\sqrt{n!}}(\alpha^*)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\langle n\mid 0,\zeta\rangle. \tag{7.5.43}$$

将上式与(7.5.37)式比较即得出

$$\frac{1}{(\mathrm{ch}r)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathrm{th}r)\alpha^{*2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]=\sum_n\frac{1}{\sqrt{n!}}(\alpha^*)^n\langle n\mid 0,\zeta\rangle. \tag{7.5.44}$$

再将上式左方的指数函数作幂级数展开,并比较$(\alpha^*)^n$的系数就得出挤压真空态在$|n\rangle$上的投影.

$$\langle n\mid 0,\zeta\rangle=\begin{cases}0,\text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ \sqrt{\dfrac{(2m)!}{\mathrm{ch}r}}\dfrac{(-1)^m}{2^m m!}(\mathrm{th}r)^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\text{当 } n \text{ 为偶数 } 2m \text{ 时}.\end{cases} \tag{7.5.45}$$

下面再来看一般的挤压相干态$|\alpha_0,\zeta\rangle$在光子数态上的投影.首先,仿(7.5.43)式将$\langle\alpha|\alpha_0,\zeta\rangle$表示成

$$\langle\alpha\mid\alpha_0,\zeta\rangle=\sum_n\langle\alpha\mid n\rangle\langle n\mid\alpha_0,\zeta\rangle=\sum_n\frac{1}{\sqrt{n!}}(\alpha^*)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\langle n\mid\alpha_0,\zeta\rangle. \tag{7.5.46}$$

而利用(7.5.33)和(7.5.37)式又得出

$$\langle\alpha\mid\alpha_0,\zeta\rangle=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}r}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\exp\left[\alpha^*\alpha_0-\frac{1}{2}\alpha_0^*\alpha_0-\frac{1}{2}(\mathrm{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\alpha^*-\alpha_0^*)^2\right]. \tag{7.5.47}$$

同前面一样将上两式比较,再利用幂级数展开式

$$\mathrm{e}^{2zu-u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{H}_n(z)u^n, \tag{7.5.48}$$

其中$\mathrm{H}_n(z)$为厄米多项式,即可得出

$$\langle n\mid\alpha_0,\zeta\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!\mathrm{ch}r}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{H}_n\left[\frac{\alpha_0+\alpha_0^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r}{\sqrt{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r}}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_0^*\alpha_0-\frac{1}{2}\alpha_0^{*2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r\right] \tag{7.5.49}$$

由此可见光子数分布$P_n=|\langle n|\alpha_0,\zeta\rangle|^2$是一个相当复杂的函数.当$Q(\alpha_1,\alpha_2)$等值线(椭圆)的长轴与短轴的比值$\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{th}r}{1-\mathrm{th}r}}=\mathrm{e}^r$比$|\alpha_0|$小得多时,$P_n$可近似表为(参见 Loudon and Knight, Journal of Modern Optics, **34**, 709, 1987)

$$\mathrm{P}_n = |\langle n \mid \alpha_0, \zeta\rangle|^2 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta n)^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(n-|\alpha_0|^2)^2}{2(\Delta n)^2}}, \tag{7.5.50}$$

其中 $\Delta n$ 为该态中光子数的方差,我们将在下面小字部分给出它的值.

首先求$\langle \alpha_0, \zeta | \hat{n} | \alpha_0, \zeta\rangle$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha_0, \zeta \mid \hat{n} \mid \alpha_0, \zeta\rangle &= \langle 0 \mid \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{D}^\dagger(\alpha_0)\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{D}(\alpha_0)\hat{S}(\zeta) \mid 0\rangle \\ &= \langle 0 \mid \hat{S}^\dagger(\zeta)(\hat{a}^\dagger + \alpha_0^*)(\hat{a} + \alpha_0)\hat{S}(\zeta) \mid 0\rangle \\ &= \langle 0 \mid \hat{S}^\dagger(\zeta)(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \alpha_0^*\alpha_0)\hat{S}(\zeta) \mid 0\rangle.\end{aligned} \tag{7.5.51}$$

最后一个等式利用了 $\hat{S}(\zeta)|0\rangle$中只含偶数个光子这一特性.再利用(7.5.14)式及 $\hat{S}(\zeta)$的幺正性等,可以算出

$$\langle \alpha_0, \zeta \mid \hat{n} \mid \alpha_0, \zeta\rangle = \mathrm{sh}^2 r + \alpha_0^*\alpha_0. \tag{7.5.52}$$

其次来求$\langle \alpha_0 \zeta | \hat{n}^2 | \alpha_0, \zeta\rangle$.仿上,将$\langle \hat{n}^2\rangle$化成

$$\langle \alpha_0, \zeta \mid \hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a} \mid \alpha_0, \zeta\rangle = \langle 0 \mid \hat{S}^\dagger(\zeta)(\hat{a}^\dagger + \alpha_0^*)(\hat{a} + \alpha_0)(\hat{a}^\dagger + \alpha_0^*)(\hat{a} + \alpha_0)\hat{S}(\zeta) \mid 0\rangle.$$

同样在$(\hat{a}^\dagger + \alpha_0^*)(\hat{a} + \alpha_0)(\hat{a}^\dagger + \alpha_0^*)(\hat{a} + \alpha_0)$展式中可只保留含偶数个 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 算符的项,再利用 $\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{S}(\zeta) = 1$ 以及(7.5.14)等式可求出

$$\begin{aligned}\langle \alpha_0, \zeta \mid \hat{n}^2 \mid \alpha_0, \zeta\rangle = {}&\mathrm{sh}^4 r + 2(\mathrm{sh}^2 r)(\mathrm{ch}^2 r) + 4\alpha_0^*\alpha_0(\mathrm{sh}^2 r) - (\alpha_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &+ \alpha_0^{*2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{ch}r)(\mathrm{sh}r) + (\alpha_0^*\alpha_0)^2 + (\alpha_0^*\alpha_0).\end{aligned} \tag{7.5.53}$$

由(7.5.52)和(7.5.53)式即得

$$(\Delta n)^2 = \alpha_0^*\alpha_0(\mathrm{ch}^2 r + \mathrm{sh}^2 r) - (\alpha_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \alpha_0^{*2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{ch}r)(\mathrm{sh}r) + 2(\mathrm{ch}^2 r)(\mathrm{sh}^2 r). \tag{7.5.54}$$

如果将 $\alpha_0$ 表示成

$$\alpha_0 = |\alpha_0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

则从以上结果即得出

$$\begin{aligned}(\Delta n)^2 - \langle n\rangle &= 2|\alpha_0|^2\left[\mathrm{sh}^2 r - \cos 2\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)(\mathrm{ch}r)(\mathrm{sh}r)\right] + (\mathrm{sh}^2 r)(\mathrm{ch}^2 r + \mathrm{sh}^2 r) \\ &= \frac{1}{2}|\alpha_0|^2(\mathrm{e}^r - \mathrm{e}^{-r})\left[\mathrm{e}^r - \mathrm{e}^{-r} - \cos 2\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)(\mathrm{e}^r + \mathrm{e}^{-r})\right] \\ &\quad + \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{2r} + \mathrm{e}^{-2r})(\mathrm{e}^r - \mathrm{e}^{-r})^2.\end{aligned} \tag{7.5.55}$$

上式后一项为挤压真空态的$(\Delta n)^2 - \langle n\rangle$,其值恒为正,即挤压真空态总为超泊松分布.前一项代表 $\alpha_0 \neq 0$ 时所增加的值,它与$|\alpha_0|^2$ 成正比,其值可能为正也可能为负,视 $\alpha_0$ 的相位角 $\varphi$ 与压缩方向角$\theta/2$ 的差值 $\psi \equiv \varphi - \dfrac{\theta}{2}$而定.前已提到 $\psi = 0$ 和$\dfrac{\pi}{2}$代表正压缩.当 $\psi$ 从 0 增大到$\dfrac{\pi}{2}$时,此项$[(\Delta n)^2 - \langle n\rangle]$从负值$(-|\alpha_0|^2(1 - \mathrm{e}^{-2r}))$增加到其最大值$|\alpha_0|^2(\mathrm{e}^{2r} - 1)$. $\psi$ 继续增加时又开始减小,以 $\pi$ 为周期变

化.

从(7.5.55)式可以得出:在 $\psi$ 的大部分范围,挤压态的光子数具有超泊松分布.光子数为亚泊松分布的范围由下式确定:

$$\cos 2\psi > \frac{(e^{r}-e^{-r})(4|\alpha|^{2}+e^{2r}+e^{-2r})}{4|\alpha|^{2}(e^{r}+e^{-r})}. \tag{7.5.56}$$

对给定的$|\alpha|^2$,当 $r$ 超过一定值后,上式右方将大于 1,这时亚泊松分布不再出现.

在§5.3 第一小节中曾提到:按早期量子论,单模光场的每个量子态将在 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面中覆盖一个面积 $\pi$.而在现代的量子理论中,按§5.3 的讨论,这种覆盖是通过一个浓度渐减.边界模糊的“斑”①来表示.若用浓度来表示覆盖度(即覆盖的百分比),则覆盖度的数值应即为 $\pi Q(\alpha)$,因对任一态$|A\rangle$,$\pi Q(\alpha)=|\langle\alpha|A\rangle|^2$.

如果在 $\alpha_1\alpha_2$ 平面中将每块面积乘上覆盖度代表实际被覆盖的面积.那么每个量子态实际覆盖的总面积即为$\int\pi Q(\alpha)\mathrm{d}^2\alpha=\pi$.因$\int Q(\alpha)\mathrm{d}^2\alpha=1$,这一结果与早期量子论的值相同.

但为了方便,我们仍可用一个边界分明、面积为 $\pi$ 的斑来表示它.斑的形状由覆盖度为常数(即 $Q$ 为常数)的曲线来确定.对于挤压相干态,按(7.5.40)式此曲线即为“长轴长度为$\frac{1}{1-\mathrm{th}r}$、方向与 $\alpha_1$ 轴夹角为$\frac{\theta}{2}$,短轴长度为$\frac{1}{1+\mathrm{th}r}$、方向与 $\alpha_1$ 轴夹角为$\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$”的椭圆.换句话说,挤压相干态可用 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面上的椭圆斑表示.

(4) 二阶相关度　对于具有确定偏振方向的单模光场,二阶相关度由(7.3.23)式表示,即

$$\gamma^{(2)}(\tau)=1+\frac{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2-\langle n\rangle}{\langle n\rangle^2}=1+\frac{(\Delta n)^2-\langle n\rangle}{\langle n\rangle^2}. \tag{7.5.57}$$

将(7.5.52)和(7.5.55)式代入后得出

$$\gamma^{(2)}(\tau)=1+\frac{8|\alpha_0|^2(e^{r}-e^{-r})\left[(e^{r}-e^{-r})-\cos 2\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)(e^{r}+e^{-r})\right]+2(e^{2r}+e^{-2r})(e^{r}-e^{-r})^2}{[4|\alpha_0|^2+(e^{r}-e^{-r})^2]^2}. \tag{7.5.58}$$

在正挤压情况,$\varphi-\frac{\theta}{2}=0$ 或 $\varphi-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$,于是 $\gamma^{(2)}(\tau)$简化为

① 这里的“斑”,包括环状的纹斑.从(5.5.49)式所给出的光子数态的 $Q(\alpha)$,即可得出它所对应的“斑”为环状的纹斑.参见后面的说明.

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{2(e^r - e^{-r})}{[4|\alpha_0|^2 + (e^r - e^{-r})]^2}[(e^r - e^{-r})(e^{2r} + e^{-2r}) + 8|\alpha_0|^2 e^r],$$

$$当\ \varphi - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}\ 时, \tag{7.5.59a}$$

和

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{2(e^r - e^{-r})}{[4|\alpha_0|^2 + (e^r - e^{-r})]^2}[(e^r - e^{-r})(e^{2r} + e^{-2r}) - 8|\alpha_0|^2 e^{-r}],$$

$$当\ \varphi - \frac{\theta}{2} = 0\ 时, \tag{7.5.59b}$$

其中(7.5.59a)式中的 $\gamma^{(2)}$ 恒大于 1. 而(7.5.59b)式中的 $\gamma^{(2)}$ 在 $|\alpha_0|^2$ 小于$\frac{1}{8}(e^{2r} - 1)(e^{2r} + e^{-2r})$才大于 1,在 $|\alpha_0|^2$ 大于$\frac{1}{8}(e^{2r} - 1)(e^{2r} + e^{-2r})$时将小于 1.

还有一个数 $F_n$,称为 Fano 因子,也是用来描述光场的统计性质的,其定义为

$$F_n = \frac{(\Delta n)^2}{\langle n \rangle}. \tag{7.5.60}$$

从(7.5.57)和(7.5.60)式立即得出 $F_n$ 与 $\gamma^{(2)}$ 的关系式为

$$\gamma^{(2)} - 1 = \frac{1}{\langle n \rangle}(F_n - 1). \tag{7.5.61}$$

当 $\gamma^{(2)} > 1$(或$<1$)时,同样也有 $F_n > 1$(或$<1$). 但 $F_n - 1$ 的值比 $\gamma^{(2)} - 1$ 的值大 $\langle n \rangle$倍,因而通常($\langle n \rangle > 1$ 时)$F_n$ 与 1 的差别更为明显.

**4. 挤压相干态的矢势和场强**

我们以行波模为例来计算单模挤压相干态"矢势和场强"的平均值和均方差. 我们将 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, t)$写成 $\boldsymbol{e}_{ks}\hat{A}(\boldsymbol{x}, t)$,则有

$$\langle \alpha, \zeta | \hat{A}(\boldsymbol{x}, t) | \alpha, \zeta \rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}} \langle \alpha, \zeta | (\hat{a}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + i\omega t}) | \alpha, \zeta \rangle. \tag{7.5.62}$$

利用(7.5.13)式及 $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$即得

$$\langle \alpha, \zeta | \hat{A}(\boldsymbol{x}, t) | \alpha, \zeta \rangle = \sqrt{\frac{8\pi\hbar c}{Vk}} |\alpha| \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t + \varphi), \tag{7.5.63}$$

与 $\hat{A}$在相干态$|\alpha\rangle$中的平均值一样. 对于 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t)$和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$,情况也一样.

挤压相干态与相干态的差别将在"矢势和场强"的均方差上表现出来. 利用$\langle \alpha, \zeta | \hat{a}^2 | \alpha, \zeta \rangle = \alpha^2 - \mathrm{ch}r\mathrm{sh}r e^{i\theta}$和(7.5.52)式即可得出

$$\langle\alpha,\zeta\mid\hat{A}^2(\boldsymbol{x},t)\mid\alpha,\zeta\rangle=\frac{4\pi\hbar c}{Vk}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2r+\mathrm{sh}^2r)-(\mathrm{ch}r)(\mathrm{sh}r)\cos2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\frac{\theta}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\mid\alpha\mid^2+\mid\alpha\mid^2\cos2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\varphi)\right].\qquad(7.5.64)$$

于是矢势的方差为

$$\Delta A(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{\pi\hbar c}{Vk}\right)^{1/2}\sqrt{\mathrm{e}^{2r}+\mathrm{e}^{-2r}-(\mathrm{e}^{2r}-\mathrm{e}^{-2r})\cos2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\frac{\theta}{2}\right)}.\qquad(7.5.65)$$

其值与 $\alpha$ 无关,只与压缩参数 $r$ 及 $\theta$ 有关.同样可以求出电场和磁场的期望值和方差.期望值同样与压缩参数无关,即等于在相干态 $|\alpha\rangle$ 中的值,而方差与 $\alpha$ 无关,

$$\Delta E(\boldsymbol{x},t)=\Delta B(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\sqrt{\mathrm{e}^{2r}+\mathrm{e}^{-2r}+(\mathrm{e}^{2r}-\mathrm{e}^{-2r})\cos2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\frac{\theta}{2}\right)}.\qquad(7.5.66)$$

(7.5.65)和(7.5.66)式中的根号部分也可改写成更加对称的形式:

$$\sqrt{\mathrm{e}^{2r}+\mathrm{e}^{-2r}+(\mathrm{e}^{2r}-\mathrm{e}^{-2r})\cos2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{2\left[\mathrm{e}^{2r}\cos^2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{e}^{-2r}\sin^2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\frac{\theta}{2}\right)\right]}.$$

当 $r=0$ 时,(7.5.65)和(7.5.66)式就化成相干态的结果.

从(7.5.63)式可以看出,当 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\varphi=n\pi$ 时, $|\langle\hat{A}(\boldsymbol{x},t)\rangle|$ 达到其最大值.这时 $A$ 的方差为

$$\Delta A=\left(\frac{2\pi\hbar c}{Vk}\right)^{1/2}\sqrt{\mathrm{e}^{2r}\sin^2\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{e}^{-2r}\cos^2\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)}.$$

由此可见当 $\alpha$ 的方位角 $\varphi$ 与压缩方向角 $\frac{\theta}{2}$ 相同时(即椭圆短轴与其中心的方向一致), $\Delta A$ 最小,而当 $\alpha$ 的方位角 $\varphi$ 与压缩方向角 $\frac{\theta}{2}$ 相差 $\pm\frac{\pi}{2}$ 时(即椭圆长轴与其中心方向一致), $\Delta A$ 最大. $\Delta E$ 和 $\Delta B$ 的情况与 $\Delta A$ 相类似,因为它们与 $\Delta A$ 的差别只是一个与角度无关的常量因子,即 $\Delta E=\Delta B=k\Delta A$.

## * §7.6 经典源与双光子的耦合　挤压相干态的生成

在上节中我们对挤压相干态的性质进行了讨论,但未涉及如何产生挤压相

* 由于授课时间限制,通常只介绍本节的前言部分,在时间充裕时讲到(7.6.15)式.

干态的问题.本节将转到这一问题的讨论.

在§5.6中,我们看到经典源与单光子相耦合的作用(发射或吸收一个光子)就将产生相干态光场.本节将说明经典源与二个光子(同一模中)相耦合的作用(即发射或吸收两个光子)所生成的光场就是挤压真空态,而如果初始光场为相干态,那么上述作用就将把它挤压成"挤压相干态".在进行此项讨论之前,我们先来看在薛定谔图象中挤压相干态的参数在自由情况下如何随时间变化.

**1. 薛定谔图象中的挤压相干态**

设 $t=0$ 时,光场由挤压相干态$|\alpha,\zeta\rangle$表示.在自由情况下,单模光场的哈密顿量为

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{7.6.1}$$

因此该光场随时间的演化可表示为

$$|t\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}|\alpha,\zeta\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle. \tag{7.6.2}$$

上式右方可以化成 $e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{D}(\alpha)e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{S}(\zeta)e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}|0\rangle$,这样我们只需求出算符 $\hat{D}(\alpha)$和 $\hat{S}(\zeta)$的演化就可以了.$\hat{D}(\alpha)$和 $\hat{S}(\zeta)$都由 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 构成,并可展开为 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的幂级数. 因此只需求出了 $e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{a}e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$ 和 $e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{a}^\dagger e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$ 就可得知 $\hat{D}(\alpha)$和$\hat{S}(\zeta)$的演化. $e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{a}e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$与作用图象中的$\hat{a}(t)$很相像,只是指数中的i换成了$-$i.这样就得出

$$e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{D}(\alpha)e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} = \exp[\alpha\hat{a}^\dagger e^{-i\omega t} - \alpha^*\hat{a}e^{i\omega t}],$$

$$e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{S}(\zeta)e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} = \exp\left[\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2e^{2i\omega t} - \frac{1}{2}\zeta\hat{a}^2e^{-2i\omega t}\right].$$

换句话说,变换的后果就是 $D(\alpha)$中的 $\alpha\to\alpha e^{-i\omega t}$, $\hat{S}(\zeta)$中 $\zeta\to\zeta e^{-2i\omega t}$. 于是(7.6.2)式就化作

$$|t\rangle = |\alpha e^{-i\omega t},\zeta e^{-2i\omega t}\rangle. \tag{7.6.3}$$

前面曾将 $\alpha$ 表成$|\alpha|e^{i\varphi}$,将 $\zeta$ 表成$re^{i\theta}$.这样,按上式将有

$$\varphi\to\varphi-\omega t,\qquad \frac{\theta}{2}\to\frac{\theta}{2}-\omega t, \tag{7.6.4}$$

即"误差扁圆(或状态椭圆)中心到原点的连线和短轴方向间"的夹角将不随时间而改变.中心与原点间的连线像一根旋转杆,而扁圆(或椭圆)像固定在此杆上一样,以频率 $\omega$ 旋转.这一图象我们在§7.5第1小节中就已提到.

**2. 经典源与双光子耦合的挤压作用**

由于挤压算符 $\hat{S}(\zeta)$的表达式 $e^{\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2-\frac{1}{2}\zeta\hat{a}^{\dagger 2}}$ 与"经典源-双光子"耦合的演化算

符的相似,人们预期通过这种耦合可能会生成挤压相干态.

在单模情况,薛定谔图象中光场以及“经典源与双光子耦合作用”的总哈密顿量为

$$\hat{H}=\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar[f^{*}(t)\hat{a}^{2}-f(t)\hat{a}^{\dagger 2}], \tag{7.6.5}$$

其中 $f(t)$ 和 $f^{*}(t)$ 代表经典源(包括耦合常数在内). 按 Yuen 文(Phys. Rev. A, **13**, 2226(1976)), 为使 $\hat{H}$ 的本征值具有下界(这是物理上所要求的), $|f(t)|$ 应小于 $\omega$. 上述 $\hat{H}$ 可用来描述经典相干光场的简并下转换过程或经典电流的双光子辐射过程. 当经典源与光场共振时,

$$f(t)=f\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}, \tag{7.6.6}$$

$f$ 为一与 $t$ 无关复参数. 这样, 在作用图象中, 就有

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar(f^{*}\hat{a}^{2}-f\hat{a}^{\dagger 2}), \tag{7.6.7}$$

为一个与 $t$ 无关的常量算符. 于是演化算符 $\hat{U}(t,0)$ 就简单地为

$$\hat{U}(t,0)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(I)}t}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(f^{*}\hat{a}^{2}-f\hat{a}^{\dagger 2})t}. \tag{7.6.8}$$

通过 $\hat{U}(t,0)$ 即可给出作用图象中态矢量的变化:

$$|t\rangle^{(I)}=\hat{U}(t,0)|t=0\rangle^{(I)}. \tag{7.6.9}$$

我们看到, 这时演化算符就是挤压算符. 如果令 $f_0$ 表示 $f$ 的绝对值, $\theta_f$ 表示它的辐角, 即

$$f=f_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_f} \tag{7.6.10}$$

则 $f_0t$ 相当 $\zeta$ 中的 $r$[参见(7.5.10)式], $\theta_f$ 相当于 $\zeta$ 中的 $\theta$. 当 $|t=0\rangle$ 为真空态 $|0\rangle$ 时, $|t\rangle^{(I)}$ 即为挤压真空态, 其挤压度 $r=f_0t$ 随着时间而线性增长. 若初始时为相干态 $|\alpha\rangle$ 时, 结果则为

$$|t\rangle^{(I)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}f^{*}t\hat{a}^{2}-\frac{1}{2}ft\hat{a}^{\dagger 2}}|\alpha\rangle=|\bar{\alpha}(t),\zeta(t)\rangle, \tag{7.6.11}$$

其中(取 $\alpha=|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$)

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(t)&=\alpha\mathrm{ch}(f_0t)-\alpha^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_f}\mathrm{sh}(f_0t)\\&=|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_f}{2}}\left[\mathrm{e}^{-f_0t}\cos\left(\varphi-\frac{\theta_f}{2}\right)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{f_0t}\sin\left(\varphi-\frac{\theta_f}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{7.6.12}$$

$$\zeta(t)=f_0t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_f}. \tag{7.6.13}$$

此结果表明, 在双光耦合作用下, 不仅光场状态从 $\alpha_1$-$\alpha_2$ 平面中的圆被挤压成椭

圆,而且其中心也挪动了位置.在正挤压的情况,若 $\varphi-\frac{\theta_f}{2}=0$,则有

$$|\bar{\alpha}(t)|=|\alpha|e^{-f_0t}, \tag{7.6.14}$$

即挤压的时间愈长,状态椭圆的中心距原点的距离将愈来愈小.而若 $\varphi-\frac{\theta_f}{2}=\frac{\pi}{2}$,则有

$$|\bar{\alpha}(t)|=|\alpha|e^{f_0t}, \tag{7.6.15}$$

即椭圆中心与原点的距离将愈来愈大.但若 $|\alpha|=0$,则无论何种情况,$|\bar{\alpha}(t)|$ 都为零.

如果初态不是相干态而是任一个具有 $P$ 表示的统计混合态,设其初始时密度算符为

$$\hat{\rho}^{(I)}(t=0)=\int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

则 $t$ 时刻的光场密度算符就变成

$$\hat{\rho}^{(I)}(t)=\int d^2\alpha P(\alpha)|\bar{\alpha}(t),\zeta(t)\rangle\langle\bar{\alpha}(t),\zeta(t)|. \tag{7.6.16}$$

其中 $\bar{\alpha}(t)$ 和 $\zeta(t)$ 仍由(7.6.12)和(7.6.13)式表示.

下面来考虑(7.6.5)式中的 $f(t)$ 为任意函数的情况.

为了求出这种情况的 $\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$,我们先来求 $\langle\beta|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$.由于相干态构成超完备集合,实际上只要知道了 $\langle\alpha|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$ 就可定出 $\langle\beta|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$(参见 §5.4 末尾处的讨论).因此下面就先来推求 $\langle\alpha|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$(参见 Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation 及(7.6.5)式下面所引的 Yuen 文).

在此情况,作用图象中的 $\hat{H}_{\text{int}}$ 为

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)=\frac{1}{i\hbar}[g^*(t)\hat{a}^2-g(t)\hat{a}^{\dagger 2}], \tag{7.6.17}$$

其中

$$g(t)=f(t)e^{2i\omega t}. \tag{7.6.18}$$

上式中的因子 $e^{2i\omega t}$ 是由于从薛定谔图象过渡到作用图象时从 $\hat{a}^{\dagger 2}$ 中得出来的.演化算符满足的方程为[参见(3.2.20)式]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,0)=\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0). \tag{7.6.19}$$

将上式两边都对 $|\alpha\rangle$ 态取矩阵元,即得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle=\langle\alpha|\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle. \tag{7.6.20}$$

为了计算 $\langle\alpha|\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$ 我们先来求 $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$ 和 $\langle\alpha|\hat{a}\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$,因一般 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$ 都是 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$ 的幂函数.显然

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle=\alpha^*\langle\alpha|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle, \tag{7.6.21}$$

而利用(7.5.35)第二式①

$$\langle\alpha\mid\hat{a}\,\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle=\langle\alpha\mid\hat{a}\,\hat{U}(t,0)\mid\beta\rangle\mid_{\beta=\alpha}=\left[\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle\alpha\mid\hat{U}(t,0)\mid\beta\rangle\right]_{\beta=\alpha},\tag{7.6.22}$$

再将

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\alpha\mid\hat{U}(t,0)\mid\beta\rangle\mid_{\beta=\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\alpha\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle-\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\gamma\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle\mid_{\gamma=\alpha},\tag{7.6.23}$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\gamma\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle=\frac{\partial}{\partial\alpha^*}[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}F(\alpha^*)^*]=-\frac{1}{2}\alpha\langle\gamma\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle\tag{7.6.24}$$

代入[其中 $F(\alpha^*)$为状态 $\hat{U}(t,0)|\gamma\rangle$的全纯表示,参见(5.3.14)式],即将(7.6.22)式化成

$$\langle\alpha\mid\hat{a}\,\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle=\left(\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle\alpha\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle.\tag{7.6.25}$$

这也是一个常用的公式.下面即可来求(7.6.20)式右方的$\langle\alpha|\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$.为此先把$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$写成 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$的幂函数并将此函数记作 $H(\hat{a}^\dagger,\hat{a},t)$.再通过 $\hat{a}$与 $\hat{a}^\dagger$ 的对易关系把上述函数化成正规编序的函数 $H^{(N)}(\hat{a}^\dagger,\hat{a},t)$.于是$\langle\alpha|\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$即为$\langle\alpha|H^{(N)}(\hat{a}^\dagger,\hat{a},t)\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$.由于 $H^{(N)}(\hat{a}^\dagger,\hat{a},t)$中的 $\hat{a}^\dagger$ 都排在 $\hat{a}$的左边,故它们作用到$\langle\alpha|$上即转化成 $\alpha^*$,剩下的 $\hat{a}$利用(7.6.25)式即转化成$\left(\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)$.这样就得出

$$\begin{aligned}\langle\alpha\mid\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle&=\langle\alpha\mid H^{(N)}(\hat{a}^\dagger,\hat{a},t)\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle\\&=H^{(N)}\left(\alpha^*,\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*},t\right)\langle\alpha\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle.\end{aligned}\tag{7.6.26}$$

再由于$\left[\alpha^*,\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right]=-1$,与$[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]$相同,故通过对易,又可把 $H^{(N)}\left(\alpha^*,\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*},t\right)$化成$H\left(\alpha^*,\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*},t\right)$.这样方程(7.6.20)就化成 $U(\alpha,\alpha^*,t)\equiv\langle\alpha|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$的偏微分方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha,\alpha^*,t)=H(\alpha^*,\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*},t)U(\alpha,\alpha^*,t).\tag{7.6.27a}$$

对于(7.6.17)式所给出的 $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)$, $H\left(\alpha^*,\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*},t\right)$等于$\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{2}\left[g^*(t)\left(\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)^2-g(t)\alpha^{*2}\right]$,于是(7.6.27a)式即为

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha,\alpha^*,t)=\frac{1}{2}\left[g^*(t)\left(\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)^2-g(t)\alpha^{*2}\right]U(\alpha,\alpha^*,t).\tag{7.6.27b}$$

---

① 我们不能从(7.5.35)式得出$\langle\alpha|\hat{a}\,\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle=\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle\alpha|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$因 $\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$与 $\alpha^*$有关,与(7.5.35)式中的$|f\rangle$不同.

这是 $t$ 和 $\alpha^*$ 的二阶非常系数的偏微分方程，如将它的解设为

$$U(\alpha,\alpha^*,t) = M(t)\mathrm{e}^{A(t)\alpha^*\alpha+B(t)\alpha^2+\frac{1}{2}C(t)\alpha^{*2}}, \tag{7.6.28}$$

代入(7.6.27b)式后即化出

$$\frac{1}{M(t)}\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha^*\alpha\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha^{*2}}{2}\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{1}{2}g^*(t)[\alpha^2(1+A(t))^2$$
$$+2\alpha^*\alpha C(t)(1+A(t))+\alpha^{*2}C^2(t)+C(t)]-\frac{1}{2}g(t)\alpha^{*2}.$$

由于上式中 $\alpha$ 与 $\alpha^*$ 为独立变量，故通过比较系数即得出

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) &= g^*(t)C(t)(1+A(t)),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t) &= \frac{1}{2}g^*(t)[1+A(t)]^2,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t) &= g^*(t)C^2(t)-g(t),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(t) &= \frac{1}{2}g^*(t)M(t)C(t).
\end{aligned} \tag{7.6.29}$$

初始条件为

$$M(0)=1,\qquad A(0)=B(0)=C(0)=0. \tag{7.6.30}$$

求解(7.6.29)式的顺序是，先从第三个方程求出 $C(t)$，然后代入第一和第四个方程求出 $A(t)$ 和 $M(t)$，有了 $A(t)$后再从第二个方程求出 $B(t)$.

第三个方程称为 Ricatti 方程，关于它的解可参见 Reid, Ricatti Differential Equations 和 Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations，等书.

在按上述步骤求出 $U(\alpha,\alpha^*,t)$以后，我们只要把其中的 $\alpha^*$ 换成 $\beta^*$ 再乘上$\langle\beta|\alpha\rangle$就可得出$\langle\beta|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$. 这是因为$\langle\beta|\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$在分出$\langle\beta|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta^*\beta-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha+\beta^*\alpha}$以后，就是 $\hat{U}$的正规核[参见§5.3 节(5.3.20)式]，它是 $\alpha$ 和$\beta^*$ 的双元全纯函数(不再含有 $\alpha^*$)，因此只要把 $U(\alpha,\alpha^*,t)$中的 $\alpha^*$ 换成 $\beta^*$ 就得出了 $U$ 的正规核. 这样从(7.6.28)式就得出

$$\langle\beta\mid\hat{U}(t,0)\mid\alpha\rangle = M(t)\exp\Big[-\frac{1}{2}(\beta^*\beta+\alpha^*\alpha)$$
$$+(A(t)+1)\beta^*\alpha+B(t)\alpha^2+\frac{1}{2}C(t)\beta^{*2}\Big]. \tag{7.6.31}$$

从此式又可得出 $\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$的全纯表示[按(5.3.14)式]

$$U_\alpha(\beta^*) = M(t)\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha+(A(t)+1)\beta^*\alpha+B(t)\alpha^2+\frac{1}{2}C(t)\beta^{*2}\Big]. \tag{7.6.32}$$

剩下的问题是考察 $\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$是否为挤压相干态，如果是，其挤压参数和中心位置是怎样的？为此我们将(7.6.32)与挤压相干态$|\alpha',\zeta\rangle$的全纯表示相比较. 由(7.5.47)，$|\alpha',\zeta\rangle$的全纯表示为

$$f(\beta^*) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}r}}\exp\Big[\beta^*\alpha'-\frac{1}{2}\alpha'^*\alpha'-\frac{1}{2}(\mathrm{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\beta^*-\alpha'^*)^2\Big], \tag{7.6.33}$$

“$r$ 与 $\theta$”为 $\zeta$ 的模和辐角,见(7.5.10)式.我们看到 $U_\alpha(\beta^*)$与 $f(\beta^*)$的指数都是 $\beta^*$ 的二次式.为使两者的指数相符,其中 $\beta^{*2}$的系数及 $\beta^*$ 的系数都必须彼此相等.从比较 $\beta^{*2}$的系数得出

$$-\frac{1}{2}(\text{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{2}C(t), \tag{7.6.34}$$

再从比较 $\beta^*$ 的系数得出

$$\alpha' + (\text{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\alpha'^* = [A(t)+1]\alpha. \tag{7.6.35}$$

从(7.6.34)式即可定出挤压参数 $r$ 和 $\theta$:若令

$$C(t) = |C(t)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_c(t)}. \tag{7.6.36}$$

即有

$$\text{th}r = |C(t)|, \qquad \theta = \theta_c(t) + \pi. \tag{7.6.37}$$

为了定出中心位置 $\alpha'$,我们先对(7.6.35)式取复共轭,然后将所得结果与(7.6.35)式联立以消去 $\alpha'^*$,就得出

$$\alpha' = \text{ch}^2 r[(A(t)+1)\alpha - \text{th}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(A^*(t)+1)\alpha^*]. \tag{7.6.38}$$

我们看到定出的参数 $\zeta$ 和 $\alpha'$都是 $t$ 的函数,即不仅中心位置 $\alpha'$随着时间变化,而且挤压参量 $\zeta$ 也随着时间变化.剩下的问题就是要比较 $U_\alpha(\beta^*)$与 $f(\beta^*)$指数中的常数项(指与 $\beta^*$ 无关的项).在作此比较时,应先把 $U_\alpha(\beta^*)$中的 $M(t)$和 $f(\beta^*)$中的$\frac{1}{\sqrt{\text{ch}r}}$都转移到指数中去.另外,态矢量$|\alpha',\zeta\rangle$与 $\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle$允许相差一个相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$.这样,我们只需验证 $-\frac{1}{2}[\ln(\text{ch}r)+\alpha'^*\alpha'+(\text{th}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\alpha'^{*2}]$的实部是否等于 $\ln M(t)-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha+B(t)\alpha^2$ 的实部.这是一个考验.验证结果表明的确两者对任何 $t$ 都相等(具体推导从略).这样就证明了:除了可能的相因子外,

$$\hat{U}(t,0)|\alpha\rangle = |\alpha'(t),\zeta(t)\rangle, \tag{7.6.39}$$

其中 $\alpha'(t)$和 $\zeta(t)$分别由(7.6.38)和(7.6.37)式确定($\zeta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$).

下面我们来看一个简单例子,即(7.6.5)式中的 $f(t)$为

$$f(t) = f\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_A t}, \qquad \omega_A \neq \omega, \tag{7.6.40}$$

即经典源与二个光子失谐的情况.这时(7.6.18)式中的 $g(t)$由下式表示:

$$g(t) = f\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Delta t}, \qquad \Delta = \omega - \omega_A, \tag{7.6.41}$$

$\Delta$ 即失谐量.于是 $C(t)$满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t) = f^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Delta t}C^2(t) - f\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Delta t}. \tag{7.6.42}$$

为了把(7.6.42)式化成常系数的方程,我们作变换

$$C(t) = \bar{C}(t)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Delta t}. \tag{7.6.43}$$

代入(7.6.42)式中即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{C}(t) = f^*\bar{C}^2(t) - 2\mathrm{i}\Delta\bar{C}(t) - f. \tag{7.6.44}$$

此方程在初条件 $\bar{C}(0)=0$ 下的解为

$$\bar{C}(t) = -\frac{f\sin\kappa t}{\kappa\cos\kappa t + \mathrm{i}\Delta\sin\kappa t}, \qquad \kappa = \sqrt{\Delta^2 - f^* f} \tag{7.6.45}$$

从而

$$C(t) = -\frac{f\sin\kappa t\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Delta t}}{\kappa\cos\kappa t + \mathrm{i}\Delta\sin\kappa t}. \tag{7.6.46}$$

这样,按(7.6.37)式,即可得出挤压参量 $r$ 和 $\theta$ 随时间的变化.

最后附带指出,除了挤压相干态以外,还有一种振幅挤压态.振幅由相位(辐角)和幅模组成,幅模也可用光子数 $n$ 来表示(参见§5.1).通常的振幅挤压态是指"$n$ 的方差比相干态的相应值要小、而相位的方差则比相干态的相应值要大"的状态,故即为光子数具有亚泊松分布的状态.

# 第八章　耗散与涨落的量子朗之万理论　简单的激光系统

在第六章中，我们考虑了最简单的开放系统，即与周围环境（真空或热光场）相互作用的单个原子或单模光场．在实际的光学系统中通常既含光场又含原子（原子集合，介质）．它们互相作用又分别与环境（或称为库）相作用，本章即研究这样的开放系统，并采用量子朗之万方程来处理．它与主方程处理方式不同的是：后者是在薛定谔图象或相互作用图象中建述（建立和表述）的，而朗之万方程则是建述在海森伯图象中，它的优点是便于表达两个或多个不同时刻算符的相关函数．

本章具体的研究对象是简单的激光系统．我们将介绍浸渐近似，讨论光子数饱和的机制、激光阈值、腔内场的强度、相位扩散和谱线宽度以及输出场的流强和涨落等一系列问题．在本章的最后一节，我们还将简单介绍 Scully-Lamb 的激光理论模型．除最后一节外，本章的量子理论都取海森伯图象．

## §8.1　量子阻尼振子问题　耗散与涨落

从布朗粒子的运动我们知道，液体（对布朗粒子来说，它就是周围环境）不仅会产生通常所知的流体阻力，还会产生一种无规的涨落力，它推动着粒子作无规的布朗运动．我们将看到，一般的开放系统也会出现类似的情况，它所受到的周围环境作用，一部分表现为"趋移"力（通常为耗散，但也可能是激励），另一部分则是无规的涨落力，又称为朗之万力．对于量子开放系统来说，这种无规涨落力出现的必然性，还可以从量子理论的基本原理来揭示．在本节中我们将就最简单的情况——量子阻尼振子，对此进行阐述．

### 1．量子阻尼振子的问题

作为对照，我们先来看经典的一维振子．为便于对比，我们用复振幅 $a(t)$ 和 $a^*(t)$ 来代替 $q(t)$ 和 $p(t)$：

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}}[m\omega_0 q(t) + \mathrm{i}p(t)], \\ a^*(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}}[m\omega_0 q(t) - \mathrm{i}p(t)]. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

我们在上式中引入常数 $\hbar$ 纯粹是为了与量子理论比较时的方便．

$a(t)$ 和 $a^*(t)$ 满足的方程即为

$$\dot{a}(t) = -\mathrm{i}\omega_0 a(t),$$
$$\dot{a}^*(t) = \mathrm{i}\omega_0 a^*(t). \tag{8.1.2}$$

当振子受到环境的阻尼力作用时，方程(8.1.2)即修改为

$$\dot{a}(t) = -\mathrm{i}\omega_0 a(t) - \frac{\kappa}{2}a(t),$$
$$\dot{a}^*(t) = \mathrm{i}\omega_0 a^*(t) - \frac{\kappa}{2}a^*(t). \tag{8.1.3}$$

上述方程的解就是

$$a(t) = a(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t-\mathrm{i}\omega_0 t}, \qquad a^*(t) = a^*(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t+\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{8.1.4}$$

这里并没有什么问题. 但是若直接过渡到量子振子就出现问题了. 在海森伯图象中，$a(t)$和 $a^*(t)$从 $c$ 数变成 $q$ 数，也就是算符 $\hat{a}(t)$和 $\hat{a}^\dagger(t)$. (8.1.3)式直接过渡的结果是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = -\mathrm{i}\omega_0\hat{a}(t) - \frac{\kappa}{2}\hat{a}(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}^\dagger(t) = \mathrm{i}\omega_0\hat{a}^\dagger(t) - \frac{\kappa}{2}\hat{a}^\dagger(t). \tag{8.1.5}$$

相应的解为

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t-\mathrm{i}\omega_0 t}, \qquad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t+\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{8.1.6}$$

此结果与(8.1.4)式完全对应. 问题出在从(8.1.6)式将得出

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = [\hat{a}(0), \hat{a}^\dagger(0)]\mathrm{e}^{-\kappa t},$$

从而不能保持$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)]$恒为 1. 这也意味着“$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)]$等于 $\mathrm{i}\hbar$ 并不恒成立”，违背了量子力学的基本原理.

如何解决这一问题?

基本的思路是：既然振子所受到的阻尼是它与库相互作用的结果，我们可先研究振子与库这个大系统，然后消去库的变量以得出振子的 $\hat{a}(t)$和 $\hat{a}^\dagger(t)$所满足的方程，由此考察在振动衰减下去的同时，如何还能保持$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)]$等于 1.

**2. 量子振子与库的作用**

如§6.4 所述，库通常是指一个稳定的大系统，有极多的自由度. 在受到扰动后能很快地将影响消散从而恢复原状. 一个光学系统可以同时与几个库相互作用.

我们回到上述量子阻尼振子. 假定与它作用的库是由无穷多个另外的谐振子组成，它们的频率具有广谱的分布，其吸收和发射算符分别为 $\hat{b}_\omega(t)$ 和 $\hat{b}_\omega^\dagger(t)$. 这样，系统与库的总哈密顿量将由三个部分组成：原振子的哈密顿量

$\hbar\omega_0\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$，库的哈密顿量 $\sum_\omega \hbar\omega\hat{b}_\omega^\dagger(t)\hat{b}_\omega(t)$ 和原振子与库的相互作用哈密顿量.在海森伯图象中

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar\sum_\omega[g_\omega\hat{a}(t)\hat{b}_\omega^\dagger(t) - g_\omega^*\hat{a}^\dagger(t)\hat{b}_\omega(t)]. \tag{8.1.7}$$

由上述 $\hat{H}$以及对易关系$[\hat{b}_\omega(t),\hat{b}_{\omega'}^\dagger(t)]=\delta_{\omega\omega'}$,即可求出运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = -\mathrm{i}\omega_0\hat{a}(t) - \sum_\omega g_\omega^*\hat{b}_\omega(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{b}_\omega(t) = -\mathrm{i}\omega\hat{b}_\omega(t) + g_\omega\hat{a}(t). \tag{8.1.8}$$

$\hat{a}^\dagger(t)$与 $\hat{b}_\omega^\dagger(t)$的方程为上式的厄米共轭.

我们可从 $\hat{a}(t)$和 $\hat{b}_\omega(t)$中分出迅变自由振动因子,即将它们改写成 $\hat{a}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$ 和 $\hat{b}_\omega(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.新的 $\hat{a}(t)$和 $\hat{b}_\omega(t)$(即分出 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$后的)将满足下述方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = -\sum_\omega g_\omega^* b_\omega(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{b}_\omega(t) = g_\omega\hat{a}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}. \tag{8.1.9}$$

这样,$\hat{a}(t)$和 $\hat{b}_\omega(t)$的变化完全由相互作用所引起,因而相应的图象也是一种相互作用图象,不过这是在海森伯图象的基础上所建立的作用图象,而通常的相互作用图象是在薛定谔图象的基础上建立的.

设振子与库开始作用时刻为 $t=0$,将(8.1.9)第二式两侧从 0 到 $t$ 积分,得

$$\hat{b}_\omega(t) = g_\omega\int_0^t\hat{a}(t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t'}\mathrm{d}t' + \hat{b}_\omega(0), \tag{8.1.10}$$

再代入到(8.1.9)式中即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = -\sum_\omega |g_\omega|^2\int_0^t\hat{a}(t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t'-t)}\mathrm{d}t' - \sum_\omega g_\omega^*\hat{b}_\omega(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}. \tag{8.1.11}$$

通常,库的谱值是密集的,我们可以引入谱密度 $\zeta(\omega)$把上式右方第一项对 $\omega$ 的求和化成积分.设库振子频谱范围为零到 $\Omega$,则有

$$-\sum_\omega |g_\omega|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t'-t)} = -\int_0^\Omega |g_\omega|^2\zeta(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\mathrm{d}\omega \equiv U(t-t'). \tag{8.1.12}$$

$U(\tau)$实即为§6.1 中所引入的关联函数,只是此处的库振子简化为标量振子.另外,在§6.1 节,$U(\tau)$给出薛定谔作用图象中状态的变化率与过去状态间的关联,而在这里它将给出算符的变化率与过去算符值之间的关联(见(8.1.14)式).如果

令

$$\hat{F}(t) \equiv - \sum g_\omega^* \hat{b}_\omega(0) e^{-i(\omega-\omega_0)t}, \tag{8.1.13}$$

则(8.1.11)式即可写成

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = \int_0^t U(t-t')\hat{a}(t')dt' + \hat{F}(t). \tag{8.1.14}$$

我们将说明,在通常的条件下,$\hat{F}(t)$就是我们所讨论例子中的涨落力.

库通常处于热平衡状态,故$\langle \hat{b}_\omega(0)\rangle_R = 0$. 设它的温度为 $T$,则按玻尔兹曼分布律,初始时它的密度算符可表为

$$\hat{\rho}_R(0) = \prod_\omega \hat{\rho}_\omega^{(T)}, \qquad \hat{\rho}_\omega^{(T)} = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}) \sum_n |n\rangle\langle n| e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}}, \tag{8.1.15}$$

其中 $k_B$ 为玻尔兹曼常数,$|n\rangle$为 $\hat{b}_\omega^\dagger(0)\hat{b}_\omega(0)$的本征态(本征值为 $n$),$\hat{\rho}_\omega^{(T)}$ 中的$(1-e^{-\hbar\omega/k_B T})$为归一化因子(参见(5.4.33)式)."振子与库"总体的初始密度算符$\hat{\rho}_{total}(0)$即为振子密度算符 $\hat{\rho}(0)$与 $\hat{\rho}_R(0)$的外积

$$\hat{\rho}_{total}(0) = \hat{\rho}(0)\hat{\rho}_R(0).$$

由于是采用海森伯图象,故 $\hat{\rho}_{total}$并不随 $t$ 变化(注意,$\hat{\rho}_{total}$代表的是状态,而不是力学量),振子和库在 $t$ 时刻的力学量算符应通过它们的运动方程用 $\hat{a}(0)$、$\hat{a}^\dagger(0)$、$\hat{b}_\omega(0)$和 $\hat{b}_\omega^\dagger(0)$表示出来后,再通过 $\hat{\rho}_{total}(0)$来求它们的期望值和各种相关函数.

由于 $\hat{F}(t)$和它的厄米共轭 $\hat{F}^\dagger(t)$已用 $\hat{b}_\omega(0)$或 $\hat{b}_\omega^\dagger(0)$表示出来(见(8.1.13)式),它们的期望值和相关函数为$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\rangle$、$\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle$等即可求出. 由于$\hat{F}$和 $F^\dagger$ 只与库有关,故取平均可只对库(用 $R$ 表示)自由行进行. 首先,

$$\langle \hat{F}(t)\rangle = \langle \hat{F}(t)\rangle_R = 0, \qquad \langle \hat{F}^\dagger(t)\rangle = \langle \hat{F}^\dagger(t)\rangle_R = 0, \tag{8.1.16}$$

其次,它们各自的相关函数亦不难看出等于零

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\rangle_R = \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle_R = 0, \tag{8.1.17}$$

只是 $\hat{F}(t)$与 $\hat{F}^\dagger(t')$间的相关函数不为零:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle_R &= \sum_{\omega,\omega'} g_\omega g_{\omega'}^* \langle \hat{b}_\omega(0)\hat{b}_{\omega'}^\dagger(0)\rangle_R e^{-i(\omega-\omega_0)t + i(\omega'-\omega_0)t'} \\
&= \sum_\omega |g_\omega|^2(\bar{n}_\omega + 1) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} \\
&= \int_0^\Omega |g_\omega|^2(\bar{n}_\omega + 1)\zeta(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} d\omega \\
&\equiv - U_1(t-t'),
\end{aligned} \tag{8.1.18a}$$

其中 $\bar{n}_\omega = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T})\sum_n n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$代表温度为 $T$ 时频率为$\omega$ 振子数的期望值,亦即 §6.4 第一小节中的 $\bar{n}_T(\omega)$. 同样可得

$$\langle \hat{F}^{\dagger}(t)\hat{F}(t')\rangle_R = \int_0^{\Omega} |g_\omega|^2 \bar{n}_\omega \zeta(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)(t-t')} d\omega \equiv - U_2(t-t'). \tag{8.1.18b}$$

不难看出,这里的 $U_1(t-t')$ 和 $U_2(t-t')$ 亦分别与(6.4.12)式中的 $U_1(t-t')$ 和 $U_2(t-t')$ 相对应. 当 $\bar{n}_\omega$ 可以忽略时(对于重要的积分频域), $U_1(\tau)$ 即化为(8.1.12)式所定义的 $U(\tau)$ 而 $U_2(\tau)$ 化为零.

在马尔可夫近似成立的情况下(关联时间趋于零),有

$$U(t-t') = -\kappa\delta(t-t'), \qquad t' \geqslant 0, \tag{8.1.19}$$

其中(我们略去了 $\kappa$ 的虚部,该虚部代表频移 $\delta\omega$. 但这里求出的值并不可靠. 也可认为 $\delta\omega$ 已并入 $\omega_0$ 中)

$$\kappa = 2\pi |g_{\omega_0}|^2 \zeta(\omega_0),$$

(参见§6.1第1小节). 当 $\bar{n}_\omega$ 不可忽略时,结果则为

$$U_1(t-t') = -\kappa(\bar{n}_{\omega_0}+1)\delta(t-t'), \qquad t' \geqslant 0, \tag{8.1.20a}$$

$$U_2(t-t') = -\kappa\bar{n}_{\omega_0}\delta(t-t'), \qquad t' \geqslant 0. \tag{8.1.20b}$$

(8.1.16)式告诉我们, $\hat{F}(t)$ 为平均值等于零的涨落,而(8.1.18)和(8.1.20)式进一步表明, $\hat{F}(t)$ 和 $\hat{F}^{\dagger}(t)$ 的瞬时"绝对值"为无穷大,但极快地,无规地变化,以致 $t$ 与 $t'$ 只要有极少的差, $\hat{F}(t')$ 与 $\hat{F}^{\dagger}(t)$ 乘积的期望值就为零. 按照

$$\int_0^t \delta(t-t')dt' = \frac{1}{2} \tag{8.1.21}$$

的规则,(8.1.14)式在马尔可夫近似下化为

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = -\frac{1}{2}\kappa\hat{a}(t) + \hat{F}(t), \tag{8.1.22}$$

并且 $\hat{F}(t)$ 与 $\hat{F}^{\dagger}(t')$ 之间具有 $\delta(t-t')$ 型的相关函数. 在本章随后的各节中我们将限于讨论马尔可夫近似成立的情况.

(8.1.22)与(8.1.5)第一式相比,少了 $-i\omega_0\hat{a}(t)$ 的项(这是由于我们从 $\hat{a}(t)$ 分出了 $e^{-i\omega_0 t}$ 因子),但多了一个新项 $\hat{F}(t)$,即涨落项.

从(8.1.10)和(8.1.11)式可以看出,阻尼项(即(8.1.11)式右方第一项)来自振子对库作用(即(8.1.10)式右方的第一项)的回返作用,其值与振子的 $\hat{a}$ 相关,并正比于耦合常数 $g_\omega$ 绝对值的平方(表明是两次作用的结果),而涨落项(即(8.1.11)式右方第二项)是原来的库量子对振子的作用,它与耦合常数一次方成正比.

### 3. 量子理论的自洽性

在我们以上的处理中,量子振子的基本对易关系 $[\hat{a}(t), \hat{a}^{\dagger}(t)] = 1$ 不会被破

坏,因为振子和库合起来是一个哈密顿系统,所有的算符都按总体的哈密顿量 $\hat{H}_T$ 作幺正性的演化,于是有

$$[\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)] = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_T t}[\hat{a}(0),\hat{a}^\dagger(0)]e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_T t}.$$

从$[\hat{a}(0),\hat{a}^\dagger(0)]=1$立即得出任何时刻的$[\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)]$都等于1.

但如何从消去了库变量的朗之万方程(该方程中含有阻尼项)直接印证这一量子理论的基本关系未被破坏?

下面就来回答这一问题.我们将通过求解朗之万方程来证明$[\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)]$总等于1.为此,令

$$\hat{a}(t) = \hat{A}(t)e^{-\frac{\kappa}{2}t}, \tag{8.1.23}$$

代入朗之万方程(8.1.22)后,即将它化为

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \hat{F}(t)e^{\frac{1}{2}\kappa t}. \tag{8.1.24}$$

由上式解出

$$\hat{A}(t) = \hat{A}(0) + \int_0^t \hat{F}(t')e^{\frac{1}{2}\kappa t'}dt', \tag{8.1.25}$$

代回(8.1.23)式右方并注意到$\hat{A}(0)=\hat{a}(0)$,即求出$\hat{a}(t)$的解为

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-\frac{\kappa}{2}t} + \int_0^t \hat{F}(t')e^{-\frac{\kappa}{2}(t-t')}dt'. \tag{8.1.26}$$

我们看到$\hat{a}(t)$中除了衰减的项外,多了一个由涨落贡献的项.将(8.1.26)及其共轭式代入$[\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)]$即得

$$\begin{aligned}[\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)] &= [\hat{a}(0),\hat{a}^\dagger(0)]e^{-\kappa t} + \int_0^t [\hat{a}(0),\hat{F}^\dagger(t')]e^{-\frac{\kappa}{2}(2t-t')}dt' \\ &\quad + \int_0^t [\hat{F}(t'),\hat{a}^\dagger(0)]e^{-\frac{\kappa}{2}(2t-t')}dt' \\ &\quad + \int_0^t dt'\int_0^t dt''[\hat{F}(t'),\hat{F}^\dagger(t'')]e^{-\frac{\kappa}{2}(2t-t'-t'')}.\end{aligned} \tag{8.1.27}$$

由于$\hat{F}^\dagger(t') = -\sum g_\omega \hat{b}_\omega^\dagger(0)e^{i(\omega-\omega_0)t}$而$\hat{b}_\omega^\dagger(0)$与$\hat{a}(0)$互相对易,故

$$[\hat{a}(0),\hat{F}^\dagger(t')] = 0,$$

同样$[\hat{F}(t'),\hat{a}(0)]$也等于零.于是(8.1.27)就化为

$$[\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)] = e^{-\kappa t} + \int_0^t dt'\int_0^t dt''[\hat{F}(t'),\hat{F}^\dagger(t'')]e^{-\frac{\kappa}{2}(2t-t'-t'')}, \tag{8.1.28}$$

即除了衰减项$e^{-\kappa t}$,还有由涨落贡献的第二项,下面进一步来对它处理.

利用$\hat{F}(t)$的定义式(8.1.13)及其共轭式即得

$$[\hat{F}(t'),\hat{F}^{\dagger}(t'')] = \sum_{\omega,\omega'} g_{\omega}g_{\omega'}^{*}[\hat{b}_{\omega}(0),\hat{b}_{\omega'}^{\dagger}(0)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t'+\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)t''}$$

$$= \sum_{\omega}|g_{\omega}|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t'-t'')} = -U(t'-t''), \quad (8.1.29)$$

其中 $U(t'-t'')$由(8.1.12)式所定义.在马尔可夫近似下(因(8.1.22)式是马尔可夫近似下的方程),按(8.1.19)式,上式化为

$$[\hat{F}(t'),\hat{F}^{\dagger}(t'')] = \kappa\delta(t'-t''). \quad (8.1.30)$$

代回(8.1.28)式右方第二项并对 $t''$积分,即将该项化为

$$\int_0^t \kappa\mathrm{e}^{-\kappa(t-t')}\mathrm{d}t' = 1-\mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

这样(8.1.28)式右方第二项除了 1 以外又出来个$(-\mathrm{e}^{-\kappa t})$正好把第一项 $\mathrm{e}^{-\kappa t}$消掉.最后得出

$$[\hat{a}(t),\hat{a}^{\dagger}(t)] = 1. \quad (8.1.31)$$

这就直接证明了,考虑了涨落项贡献的 $\hat{a}(t)$((8.1.26)式)的确保持基本对易式(8.1.31)成立.

将方程(8.1.22)对库取平均后,即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{a}(t)\rangle_R = -\frac{1}{2}\kappa\langle\hat{a}(t)\rangle_R.$$

由此解出

$$\langle\hat{a}(t)\rangle_R = \hat{a}(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa t}. \quad (8.1.32)$$

上式中的$\langle\hat{a}(t)\rangle_R$ 仍是一个算符,因为只对库作了平均,并未对振子的密度算符求迹.(8.1.32)式表明将衰减到零的是$\langle\hat{a}(t)\rangle_R$ 而不是 $\hat{a}(t)$本身.换句话说,振子原来的振幅 $\hat{a}(0)$将衰减到零,最后剩下的是无规的运动(如(8.1.26)右方第二式所示).这一情况与有初速的花粉粒子在液体中的布朗运动相似.

在以上的讨论中,我们设定了库由一系列振子所构成.实际上所得的结果具有较普遍的意义.只要我们接受布朗运动的概念,在阻尼振子的方程里加上无规力(即朗之万力)$\hat{F}(t)$,就将得出方程(8.1.22);再认识到像 $-\frac{1}{2}\kappa\hat{a}(t)$这样的阻尼力(它只与该时刻的 $\hat{a}$相关,与较早时刻的 $\hat{a}$无关)是马尔可夫近似下的结果,相应的无规力也应具有马尔可夫过程的特点即 $\hat{F}(t')$与 $\hat{F}^{\dagger}(t)$之间具有 δ 函数型的相关函数①:

$$\langle\hat{F}^{\dagger}(t)\hat{F}(t')\rangle = Q_1\delta(t-t'), \qquad \langle\hat{F}(t)\hat{F}^{\dagger}(t')\rangle = Q_2\delta(t-t'),$$

① 因此(8.1.33)式也称为马尔可夫型的相关函数.

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\rangle = Q_3\delta(t-t'), \qquad \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle = Q_4\delta(t-t'), \tag{8.1.33}$$

就可以通过一般性的考虑确定出 $Q_1$、$Q_2$、$Q_3$ 和 $Q_4$. 所得的结果将与(8.1.17)、(8.1.18)和(8.1.20)式完全一样,证明如下.首先,

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R = \left\langle \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt}\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\frac{d\hat{a}(t)}{dt}\right\rangle_R.$$

将(8.1.22)式及其共轭式代入后即化出

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R = -\kappa\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R + \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle_R. \tag{8.1.34}$$

再将(8.1.22)式的解(8.1.26)代入上式右方第二项,并注意到初始的 $\hat{a}(0)$ 与库无关,从而 $\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{a}(0)\rangle_R = \langle \hat{F}^\dagger(t)\rangle_R\hat{a}(0) = 0$,即得出

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R &= \int_0^t \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t')\rangle_R e^{-\frac{\kappa}{2}(t-t')}dt' \\ &= \int_0^t Q_1\delta(t-t')e^{-\frac{\kappa}{2}(t-t')}dt' = \frac{1}{2}Q_1.\end{aligned} \tag{8.1.35a}$$

上式最后结果中的因子$\frac{1}{2}$,是根据(8.1.21)式所述的规则得出的.同样可求出

$$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle_R = \frac{1}{2}Q_1. \tag{8.1.35b}$$

为了确定 $Q_1$ 的值,将(8.1.35)式代回(8.1.34)式,结果为

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R = -\kappa\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R + Q_1. \tag{8.1.36}$$

此式的解为

$$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R = \left[\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0)\rangle_R - \frac{Q_1}{\kappa}\right]e^{-\kappa t} + \frac{Q_1}{\kappa}. \tag{8.1.37}$$

当$t\to\infty$时,$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R$ 将达到其稳恒值 $Q_1/\kappa$. 由于库具有温度 $T$,$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R$ 的稳恒值即为温度 $T$ 时的热平衡值 $\bar{n}_{\omega_0}$,这样就得出了

$$Q_1 = \kappa\bar{n}_{\omega_0}. \tag{8.1.38}$$

用同样的方法可求出

$$Q_2 = \kappa(\bar{n}_{\omega_0}+1), \qquad Q_3 = Q_4 = 0. \tag{8.1.39}$$

果然与(8.1.17)、(8.1.18)和(8.1.20)式一致.

值得指出的是:我们是用稳恒情况来定出常数 $Q_i$ 的,但这并不意味着所定出

的值只适用于稳恒情况. 因(8.1.33)式对稳恒和不稳恒都适用,其中的 $Q_i$ 为相同的参数.

我们看到,在以上推导中热力学定律起了重要的作用. 它告诉我们,振子与库作用的最后结果一定趋向热平衡,而在热平衡时,振子的$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R$ 只与温度 $T$ 有关,与库的具体构成无关. 再由热平衡时由阻尼力和涨落力引起的$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R$ 的变化要相互抵消,就可得出阻尼系数 $\kappa$ 与涨落力关联函数中的 $Q$ 以及 $\bar{n}_\omega$ 之间的关系(它通常被称作耗散-涨落关系).

**4. $\hat{a}^\dagger(t)$与 $\hat{a}(t')$之间的相关函数**

我们来考虑在振子达到稳恒情况后 $\hat{a}^\dagger(t)$与 $\hat{a}(t')$间的相关函数. 为去掉解中的暂态项我们把振子与库的起始作用时间推到 $-\infty$. 这时(8.1.26)式化为

$$\hat{a}(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{F}(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, \tag{8.1.40}$$

上述 $\hat{a}(t)$对库的平均值$\langle \hat{a}(t)\rangle_R$ 恒为零. 我们将看到$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle_R$ 只是$t-t'$的函数,其值随$|t-t'|$增加而指数下降.

由(8.1.40)式及其共轭式即得

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle_R &= \int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{t'}\mathrm{d}\tau'\langle \hat{F}^\dagger(\tau)\hat{F}(\tau')\rangle_R \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-\tau+t'-\tau')} \\ &= \kappa\bar{n}_{\omega_0}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{t'}\mathrm{d}\tau'\delta(\tau-\tau')\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-\tau+t'-\tau')}.\end{aligned}$$

下一步积分时,需要区别两种情况分别处理:当 $t'>t$ 时,应先对 $\tau'$积分以保证 δ 函数的零点出现在积分区之内,再对 $\tau$ 积分,得出的最后结果为 $\bar{n}_{\omega_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t'-t)}$;当 $t'<t$ 时则应先对 $\tau$ 积分,最后得出的结果为 $\bar{n}_{\omega_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-t')}$. 合起来可表示成

$$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle_R = \bar{n}_{\omega_0}\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|}. \tag{8.1.41}$$

上式表明 $\hat{a}^\dagger$ 与 $\hat{a}$的相关时间可用 $2/\kappa$ 来标志. 这意味着,虽然 $\hat{a}$也是作无规的涨落性运动$\langle \hat{a}(t)\rangle_R=0$,但它改变得并不是那么快,当$|t-t'|=\dfrac{2}{\kappa}$时,$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle$才降到$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle$的$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

对振子来说,更直观的是坐标和动量两个量. 我们来看 $\hat{q}(t)$与 $\hat{q}(t')$之间以及 $\hat{p}(t)$及 $\hat{p}(t')$之间的相关函数. 由(8.1.1)式,

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger), \tag{8.1.42}$$

于是有

$$\langle \hat{q}(t)\hat{q}(t')\rangle_R = \frac{\hbar}{2m\omega_0}[\langle \hat{a}(t)\hat{a}(t')\rangle_R + \langle \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t')\rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t')\rangle_R].$$

仿前不难求出

$$\langle \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t')\rangle_R = (\bar{n}_{\omega_0} + 1)e^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|},$$

$$\langle \hat{a}(t)\hat{a}(t')\rangle_R = \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t')\rangle_R = 0, \tag{8.1.43}$$

于是得出

$$\langle \hat{q}(t)\hat{q}(t')\rangle_R = \frac{\hbar}{m\omega_0}(\bar{n}_{\omega_0} + \frac{1}{2})e^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|} \equiv \langle \hat{q}^2\rangle_S e^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|}, \tag{8.1.44a}$$

同样可得

$$\langle \hat{p}(t)\hat{p}(t')\rangle_R = m\hbar\omega_0(\bar{n}_{\omega_0} + \frac{1}{2})e^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|} \equiv \langle \hat{p}^2\rangle_S e^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|}. \tag{8.1.44b}$$

其中$\langle \hat{q}^2\rangle_S$和$\langle \hat{p}^2\rangle_S$分别代表稳恒时$\hat{q}^2$和$\hat{p}^2$的期望值.我们看到,坐标的相关时间和动量的相关时间都“是”$\frac{2}{\kappa}$,即完全由阻尼系数决定,与$\bar{n}_{\omega_0}$无关(虽然涨落力的强度与$\bar{n}_{\omega_0}$有关).

一阶相关函数的一个重要应用是计算一个随机涨落量的谱分布.对于随机涨落的变量,通常需要的不是它本身的谱,而是所谓的强度谱或称功率谱.这种谱可用一阶相关函数来计算(参见§8.5节).我们将前面从$\hat{a}^\dagger(t)$和$\hat{a}(t')$中分出的自由振荡因子$e^{i\omega_0 t}$和$e^{-i\omega_0 t'}$补回到相关函数中,即有

$$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle_R = \bar{n}_{\omega_0} e^{-\frac{\kappa}{2}|t-t'|+i\omega_0(t-t')}. \tag{8.1.45}$$

根据后文中的(8.5.32)式,强度谱分布为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t')\rangle_R e^{-i\omega(t-t')}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0)\rangle_R e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{8.1.46}$$

将(8.1.45)式代入后即可求出

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{n}_{\omega_0} e^{-\frac{\kappa}{2}|\tau|-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau = \bar{n}_{\omega_0}\frac{\kappa}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{1}{4}\kappa^2}. \tag{8.1.47}$$

如所预计,谱宽等于阻尼系数$\kappa$.(8.1.46)式通常称作威纳-亨钦定理.在§8.5中我们会再见到它.

# §8.2 开放光学系统的量子朗之万方程

我们在本节中将考察多能级原子与单模光场相互耦合的系统,并假设此系统不仅有内部(即原子与光场之间)的相互作用,还同周围环境相作用.除了本章序言中所提到的与腔外的真空场或热光场相作用以外,原子还可能与广谱的抽运源相作用,与腔内可能存在的其他气体分子相碰撞或与周围介质中的声子相作用等.单模光场也可能与腔内其他气体分子,腔壁上原子相作用等等.这些与所研究系统作用着的广谱环境将统称为库.库可能具有确定的温度也可能不具有确定的温度(例如抽运源).

在本节中,我们对库采用一个简单的模型,即它由大量的谐振子构成,这些谐振子的频率同样具有广谱分布.在广谱条件下,朗之万方程中的阻尼项(和抽运项)以及涨落力项的关联函数常可作马尔可夫近似.

我们将先考虑未耦合的"原子和光场"分别与它们各自的库的相互作用.然后再计入原子与光场间的耦合,这时所得出的就是激光的量子朗之万方程.

与上节一样,我们采用的是海森伯图象.在§1.1中已经指出,海森伯图象中的一个态矢量可看作是代表一个过程,并可通过该过程在某个任意时刻 $t_0$ 的情况来标志.当我们求某个算符 $\hat{L}(t)$ 在该态的期望值(或求 $\hat{L}(t)$ 作用到该态上的结果)时,原则上就需要通过该算符的运动方程(海森伯方程)将它用 $t_0$ 时刻系统的算符表示出来,然后作用到态矢量上.

### 1. 原子和单模光场与各自库的作用

先来看单模光场.在激光问题中,光场的耗散主要是通过半透镜向外的输出.这一效应可通过腔场与腔外真空场各个模之间的耦合来描述.在马尔可夫近似下,腔场的吸收算符 $\hat{a}$ 满足下述朗之万方程(与§8.1节中的阻尼振子相似):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = -\mathrm{i}\omega\hat{a}(t) - \frac{\kappa}{2}\hat{a}(t) + \hat{F}(t). \tag{8.2.1}$$

我们已将与库作用所产生的频移 $\delta\omega$ 并入到 $\omega$ 之中.

涨落力 $\hat{F}$ 和它的厄米共轭 $\hat{F}^\dagger$ 之间的关联函数为

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t')\rangle_R &= \kappa\bar{n}(T)\delta(t-t'), \\ \langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle_R &= \kappa[\bar{n}(T)+1]\delta(t-t'). \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

上式左边的脚标 $R$ 代表库. $\bar{n}(T)$ 实际为频率为 $\omega$ 的热光子数.在可见光频率情况, $\bar{n}(T)$ 通常很小,例如 $T=300\mathrm{K}$ 时, $\bar{n}(T)\approx10^{-33}$.故可忽略不计.至于 $\hat{F}$ 与 $\hat{F}$ 之间以及 $\hat{F}^\dagger$ 与 $\hat{F}^\dagger$ 之间的关联函数,都为零:

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t')\rangle_R = \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle_R = 0. \tag{8.2.3}$$

需要指出的是,在§8.1第二小节导出形式如(8.2.1)的朗之万方程[其中阻尼项简单地就等于$-\frac{1}{2}\kappa\hat{a}(t)$],实际上与假定了库由大量谐振子所构成相关.若单模光场的库是由具有广谱频率分布的一系列二能级原子所组成,结果就不直接了当了①.这时总哈密顿可设为

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\sum_k \omega_k\hat{\sigma}_3^{(k)} + \hbar\sum_k (g_k^*\hat{\sigma}_-^{(k)}\hat{a}^\dagger + g_k\hat{\sigma}_+^{(k)}\hat{a}), \tag{8.2.4}$$

其中$\hat{\sigma}_\pm$和$\hat{\sigma}_3$的意义如(6.1.3)式所示.不难得出$\hat{a}(t)$与$\hat{\sigma}_-^{(k)}$的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) &= -\mathrm{i}\omega_0\hat{a}(t) - \mathrm{i}\sum_k g_k^*\hat{\sigma}_-^{(k)}(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_-^{(k)}(t) &= -\mathrm{i}\omega_k\hat{\sigma}_-^{(k)}(t) + \mathrm{i}g_k\hat{a}(t)\hat{\sigma}_3^{(k)}(t). \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

从(8.2.5)式第二式可求出$\hat{\sigma}_-^{(k)}(t)$的积分表示式

$$\hat{\sigma}_-^{(k)}(t) = \hat{\sigma}_-^{(k)}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t} + \mathrm{i}g_k\int_0^t \hat{a}(t')\hat{\sigma}_3^{(k)}(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(t-t')}\mathrm{d}t'. \tag{8.2.6}$$

将上式代入(8.2.5)第一式中即得出

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = &-\mathrm{i}\omega_0\hat{a}(t) + \sum_k |g_k|^2\int_0^t \hat{a}(t')\hat{\sigma}_3^{(k)}(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(t-t')}\mathrm{d}t' \\ &- \mathrm{i}\sum_k g_k^*\hat{\sigma}_-^{(k)}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}. \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

(8.2.7)式右方第二、三项分别代表阻尼项和涨落项.我们看到在此阻尼项中仍含有库算符,化不成$-\frac{1}{2}\kappa\hat{a}(t)$的形式.以上只是提醒注意,实际上对$\hat{a}(t)$的朗之万方程仍都采用(8.2.1)式.

下面再来看一个多能级原子所满足的朗之万方程.设原子有$n$个能级,$\hat{\alpha}_j$和$\hat{\alpha}_j^\dagger$分别为$j$能级原子的吸收和发射算符.如果库仍采用谐振子模型,则可得出:库的作用将贡献阻尼项、频移项、抽运项和涨落力项(朗之万力项).具体地说,在原子能级迁移算符$\hat{\sigma}_{jk}$的方程中将出现阻尼项、频移项和涨落力项、而在原子布居数算符$\hat{N}_j$的方程中,出现的是阻尼项、抽运项和涨落力项.原子能级迁移算符$\hat{\sigma}_{jk}(j\neq k)$和布居数算符$\hat{N}_j$的定义为

$$\hat{\sigma}_{jk} = \hat{\alpha}_j^\dagger\hat{\alpha}_k, \qquad \hat{N}_j = \hat{\alpha}_j^\dagger\alpha_j. \tag{8.2.8}$$

它们满足的朗之万方程分别如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_{jk}(t) = \mathrm{i}(\omega_{jk} + \Delta\omega_{jk})\hat{\sigma}_{jk}(t) - \gamma_{jk}\hat{\sigma}_{jk}(t) + \hat{\Gamma}_{jk}(t), \quad j\neq k, \tag{8.2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}_j(t) = \sum_{(l\neq j)} w_{jl}\hat{N}_l(t) - \gamma_j\hat{N}_j(t) + \hat{\Gamma}_{jj}(t), \tag{8.2.10}$$

其中$w_{kj}$表示从能级$j$到能级$k$的跃迁率(由于库的作用所引致的).(8.2.9)式中

① 例如:Sargent, Scully and Lamb, Laser Physics, §19.2.

的 $\omega_{jk}$ 和 $\gamma_{jk}$ 分别为

$$\omega_{jk} = \frac{1}{\hbar}(E_j - E_k), \qquad \gamma_{jk} = \frac{1}{2}\Big[\sum_{l(\neq j)} w_{lj} + \sum_{l(\neq k)} w_{lk}\Big] + \gamma_{jk}^p, \tag{8.2.11}$$

$\gamma_{jk}^p$ 为退位相效应所引起的弛豫. 它是库振子与原子间的弹性散射(原子在散射前后能级未变)所引起的(参见§6.4 第五小节). 至于(8.2.10)式中的 $\gamma_j$,它与跃迁率的关系为

$$\gamma_j = \sum_{l(\neq j)} w_{lj}, \tag{8.2.12}$$

即由能级 $j$ 到其他能级的跃迁率的和. 于是 $\gamma_{jk}$ 亦可表示成

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{2}(\gamma_j + \gamma_k) + \gamma_{jk}^p. \tag{8.2.13}$$

由于 $\gamma_{jk}^p = \gamma_{kj}^p$,故有 $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$. 在一些文献中,$\gamma_j + \gamma_k$ 称为纵向弛豫系数而 $\gamma_{jk}^p$ 称为横向弛豫系数,由 $\gamma_{jk}^p$ 所引起的谱线增宽常称为碰撞增宽. 另外,由于 $\sum_{j=1}^{n} N_j = 1$,故由(8.2.10)式所表示的 $n$ 个方程中只有 $n-1$ 个是独立的.

下面将从另外的角度来对 $\gamma_{jk}^p$ 的导出作出说明. 当原子与库量子发生弹性散射时,原子相位将发生附加的无规变化. 若设 $\mathrm{d}\tau$ 时间内所有发生的弹性散射导致的相位无规变化记为 $\delta\omega(\tau)\mathrm{d}\tau$,则在 0 到 $t$ 时间内总的无规相位变化即为

$$\Delta\phi = \int_0^t \delta\omega(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.2.14}$$

在海森伯图象中,$\hat{\sigma}_{jk}$ 本有一个相位因子 $e^{-i(\omega_{jk}+\Delta\omega_{jk})t}$,现在将增加一个因子 $e^{-i\int_0^t \delta\omega_{jk}(\tau)\mathrm{d}\tau}$. 我们来指明这个因子的平均值 $\langle e^{-i\int_0^t \delta\omega_{jk}(\tau)\mathrm{d}\tau}\rangle$ 就是 $e^{-\gamma_{jk}^p t}$ 为此将其中指数函数作幂展开①:

$$\langle e^{-i\int_0^t \delta\omega_{jk}(\tau)\mathrm{d}\tau}\rangle = \langle 1 - i\int_0^t \delta\omega_{jk}(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}\tau_1\int_0^{\tau}\mathrm{d}\tau_2\,\delta\omega_{jk}(\tau_1)\delta\omega_{jk}(\tau_2)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(-i)^n\int_0^t \mathrm{d}\tau_1\cdots\int_0^t \mathrm{d}\tau_n\,\delta\omega_{jk}(\tau_1)\delta\omega_{jk}(\tau_2)\cdots\delta\omega_{jk}(\tau_n) + \cdots\rangle. \tag{8.2.15}$$

既然 $\delta(\omega)$ 是无规地涨落性变化,故有

$$\langle\delta\omega_{jk}(\tau)\rangle = 0. \tag{8.2.16}$$

在 $\delta\omega$ 的关联函数为马尔可夫型并满足高斯统计的情况下,$\langle\delta\omega_{jk}(\tau_1)\delta\omega_{jk}(\tau_2)\rangle$ 可写成

① 参见 Sargent, Scully and Lamb, Laser Physics, §7.3.

$$\langle \delta\omega_{jk}(\tau_1)\delta\omega_{jk}(\tau_2)\rangle = 2\gamma_{jk}^{p}\delta(\tau_1 - \tau_2), \tag{8.2.17a}$$

同时还有

$$\langle \delta\omega_{jk}(\tau_1)\delta\omega_{jk}(\tau_2)\cdots\delta\omega_{jk}(\tau_{2n-1})\rangle = 0, \tag{8.2.17b}$$

$$\langle \delta\omega_{jk}(\tau_1)\delta\omega_{jk}(\tau_2)\cdots\delta\omega_{jk}(\tau_{2n})\rangle = (2\gamma_{jk}^{p})^n \sum \delta(\tau_{l1} - \tau_{l2})\delta(\tau_{l3} - \tau_{l4})\cdots\delta(\tau_{2n-1} - \tau_{2n}).$$

最后一式中的$\sum$是对$2n$个$\tau_S$的各种配对求和.这样,(8.2.15)式右方第$2n$项就化为

$$\frac{1}{(2n)!}(-1)^n(2\gamma_{jk}^{p})^n \sum \int_0^t \mathrm{d}\tau_1 \cdots \int_0^t \mathrm{d}\tau_{2n}\delta(\tau_{l1} - \tau_{l2})\cdots\delta(\tau_{2n-1} - \tau_{2n})$$

此式求和号中每一项的积分值皆为$t^n$,项数为$\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$(将$2n$个$\tau_S$排队,然后顺序分成$n$对.$2n$个$\tau_S$排队的总数为$(2n)!$ 但这样计算配对的数目有重复.一是来自每对内部两个$\tau$的交换,二是来自$n$个配对的排列.故需将$(2n)!$ 除以$2^n n!$).这样第$2n$项的值应为$\dfrac{1}{n!}(-\gamma_{jk}^{p}t)^n$.于是(8.2.15)式化为

$$\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_0^t \delta\omega_{jk}(\tau)\mathrm{d}\tau}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\gamma_{jk}^{p})^n = \mathrm{e}^{-\gamma_{jk}^{p}t}. \tag{8.2.18}$$

这就完成了从“无规相位改变因子”到衰减因子的转化.

原子的涨落力项与光子的相比有一个复杂的情况,即它不仅含有库振子的算符还会含有原子的算符.通过简单的二能级原子的情况即可显示这一结论(参见下面第三小节).不过,涨落力项的具体构成对我们并不那么重要.重要的是它们对库的平均值以及相互之间的相关函数.根据涨落力项的定义,它们对库的平均值应为零

$$\langle \hat{\Gamma}_{jk}(t)\rangle_R = 0, \tag{8.2.19}$$

而在马尔可夫近似下,它们之间的相关函数为

$$\langle \hat{\Gamma}_{jk}(t)\hat{\Gamma}_{j'k'}(t')\rangle = \hat{G}_{jkj'k'}(t)\delta(t - t'), \tag{8.2.20}$$

在(8.2.19)和(8.2.20)式中$j$和$k$可以相等也可以不相等.$j'$与$k'$情况也一样.值得指出的是,$\hat{G}_{jk,j'k'}$现在为算符,而且与$t$有关.关于$\hat{G}_{jk,j'k'}(t)$的表达式,对本书要用到的二能级原子情况,结果将在下文中给出.至于一般多能级情况,在 Louisell 书 Quantum Statistical Properties of Radiation 和 Haken 的 Laser Theory 一书中都有讨论,读者可以参考.

## 2. 二能级原子朗之万方程的推导

当我们从具体的原子-库相互作用来推导原子的朗之万方程时,将面临一个问题即如何分离出涨落力项.本小节将用最简单的库模型来说明这种分离的办法.设二能级原子与库振子相互作用的哈密顿量为

$$\hat{H}_{S-R}(t) = \hbar\left[\sum_{\omega} g_{\omega}\hat{\sigma}_{-}(t)\hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t) + \sum_{\omega} g_{\omega}^{*}\hat{\sigma}_{+}(t)\hat{b}_{\omega}(t)\right], \quad (8.2.21)$$

并用 $\hat{\sigma}(t)$代表海森伯图象中二能级原子三个基本算符(参见§6.1 第 1 小节) $\hat{\sigma}_3(t)$和$\hat{\sigma}_{\pm}(t)$中的任一个,它满足的方程即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\sigma}(t), \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3(t)\right] - \mathrm{i}\sum_{\omega} g_{\omega}\hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t)[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{-}(t)]$$
$$- \mathrm{i}\sum_{\omega} g_{\omega}^{*}[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{+}(t)]\hat{b}_{\omega}(t), \quad (8.2.22)$$

其中$\frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3(t)$代表自由原子的哈密顿量(见(6.1.8)式).

库振子的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{b}_{\omega}(t) = -\mathrm{i}\omega\hat{b}_{\omega}(t) - \mathrm{i}g_{\omega}\hat{\sigma}_{-}(t). \quad (8.2.23)$$

从上式得出 $\hat{b}_{\omega}(t)$的积分表达式

$$\hat{b}_{\omega}(t) = \hat{b}_{\omega}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}g_{\omega}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{\sigma}_{-}(t')\mathrm{d}t', \quad (8.2.24)$$

然后代入(8.2.22)式,即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\hat{\sigma}(t), \omega_0\sigma_3(t)] - \sum_{\omega}|g_{\omega}|^2[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{+}(t)]\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{\sigma}_{-}(t')\mathrm{d}t'$$
$$+ \sum_{\omega}|g_{\omega}|^2\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{\sigma}_{+}(t')\mathrm{d}t'[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{-}(t)]$$
$$- \mathrm{i}\sum_{\omega} g_{\omega}^{*}[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{+}(t)]\hat{b}_{\omega}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\sum_{\omega} g_{\omega}\hat{b}_{\omega}^{\dagger}(0)[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{-}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \quad (8.2.25)$$

仿照 §8.1,将上式右方第二、三项中的求和$\sum_{\omega}$ 化成积分$\int \mathrm{d}\omega\eta(\omega)$,其中 $\eta(\omega)$ 代表单位频谱内的振子状态数(即振子的态密度),并将$\int |g_{\omega}|^2\eta(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\mathrm{d}\omega$ 近似表成 $\gamma_0\delta(t-t')$[参照 §8.1 中的(8.1.12)、(8.1.19)式]即可将(8.2.25)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\hat{\sigma}(t), \omega_0\hat{\sigma}_3(t)] - \frac{\gamma_0}{2}[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{+}(t)]\hat{\sigma}_{-}(t) + \frac{\gamma_0}{2}\hat{\sigma}_{+}(t)[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{-}(t)]$$
$$+ [\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{+}(t)]\hat{\beta}(t) - \hat{\beta}^{\dagger}(t)[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}_{-}(t)], \quad (8.2.26)$$

其中频移项已包含在 $\omega_0$ 中,$\gamma_0 = 2\pi\eta(\omega_0)|g_{\omega_0}|^2$,以及

$$\hat{\beta}(t) = -\mathrm{i}\sum_{\omega} g_{\omega}^{*}\hat{b}_{\omega}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \quad (8.2.27)$$

$\hat{\beta}(t)$和 $\hat{\beta}^\dagger(t)$代表库噪音,在库具有温度 $T$ 而且马尔可夫近似成立的情况下,它们具有性质

$$\langle\hat{\beta}(t)\rangle_R = \langle\hat{\beta}^\dagger(t)\rangle_R = 0, \qquad \langle\hat{\beta}(t)\hat{\beta}(t')\rangle_R = \langle\hat{\beta}^\dagger(t)\hat{\beta}^\dagger(t')\rangle_R = 0,$$
$$\langle\hat{\beta}^\dagger(t)\hat{\beta}(t')\rangle_R = \gamma_0\bar{n}_0(T)\delta(t-t'), \tag{8.2.28}$$
$$\langle\hat{\beta}(t)\hat{\beta}^\dagger(t')\rangle_R = \gamma_0(\bar{n}_0(T)+1)\delta(t-t').$$

其中 $\bar{n}_0(T)$为频率等于 $\omega_0$ 的库振子的平均值.(8.2.26)式也称为朗之万方程,不过其中最后两项并不就是涨落力项,因为它们对库取期望值不为零.我们将论证

$$\begin{aligned}
&[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)]\hat{\beta}(t) - \hat{\beta}^\dagger(t)[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_-(t)] = -\frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}_0(T) \\
&\times[[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)],\hat{\sigma}_-(t)] - \frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}_0(T)[[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_-(t)],\hat{\sigma}_+(t)] + \hat{\Gamma}_\sigma(t) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}_0(T)[2\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_-(t) + 2\hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_+(t) - \hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t) \\
&\quad - \hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}_+(t) - \hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}(t)] + \hat{\Gamma}_\sigma(t)
\end{aligned} \tag{8.2.29}$$

其中 $\hat{\Gamma}_\sigma(t)$才是涨落力项,它满足(见下文,(8.2.32)式后)

$$\langle\hat{\Gamma}_\sigma(t)\rangle_R = 0. \tag{8.2.30}$$

将(8.2.29)式代入(8.2.26)式即得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}(t) = &-\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_0[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_3(t)] + \frac{1}{2}\gamma_0(\bar{n}_0+1)[2\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_-(t) \\
&- \hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t) - \hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}(t)] \\
&+ \frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}_0[2\hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_+(t) \\
&- \hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}_+(t) - \hat{\sigma}_-(t)\hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}(t)] + \hat{\Gamma}_\sigma(t).
\end{aligned} \tag{8.2.31}$$

这就是通常形式的原子朗之万方程.上式中正比于 $\bar{n}_0$ 的项,如(8.2.29)式所示都是从(8.2.26)式右方后两项分出来的.如果取 $\hat{\sigma}$分别为 $\hat{\sigma}_+$,$\hat{\sigma}_-$和 $\hat{\sigma}_3$,即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_+(t) = \mathrm{i}\omega_0\hat{\sigma}_+(t) - \gamma_0(\bar{n}_0+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_+(t) + \hat{\Gamma}_+(t), \tag{8.2.32a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_-(t) = -\mathrm{i}\omega_0\hat{\sigma}_-(t) - \gamma_0(\bar{n}_0+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_-(t) + \hat{\Gamma}_-(t), \tag{8.2.32b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_3(t) = -\gamma_0 - 2\gamma_0(\bar{n}_0+\frac{1}{2})\hat{\sigma}_3(t) + \hat{\Gamma}_3(t). \tag{8.2.32c}$$

如果对上式取期望值,结果即为(6.4.21)式.说明两者是相洽的.

我们看到,朗之万方程中的参数可以从(频率为 $\omega_0$ 的)库振子的平均数 $\bar{n}_0$,态

密度 $\eta(\omega_0)$以及库振子与原子的耦合常数$|g_{\omega_0}|^2$来确定.

下面按照 Gardinal 和 Collett 论文①的精神来论证(8.2.29)式.我们将从下面两点出发:

(1) 方程(8.2.26)中的 $\hat{\beta}(t)$和 $\hat{\beta}^\dagger(t)$可以看作是外力.由于这组方程(对应于 $\hat{\sigma}$取$\hat{\sigma}_\pm$和 $\hat{\sigma}_3$)构成完备方程组,当我们从初值逐步计算各个 $\hat{\sigma}(t)$时,可以看出 $\hat{\sigma}(t)$中只含有 $t'\leqslant t$ 的"外力"$\hat{\beta}(t')$和 $\hat{\beta}^\dagger(t')$.在马尔可夫情况,$t'>t$ 的"$\hat{\beta}(t')$和 $\hat{\beta}^\dagger(t')$"与 $t'\leqslant t$ 的算符互不相关,因此将有:

$$\langle\hat{\beta}(t')\hat{\sigma}(t)\rangle = \langle\hat{\sigma}(t)\hat{\beta}(t')\rangle_R = 0,$$

$$\langle\hat{\beta}^\dagger(t')\hat{\sigma}(t)\rangle = \langle\hat{\sigma}(t)\hat{\beta}^\dagger(t')\rangle_R = 0, \quad 当\ t' > t\ 时. \tag{8.2.33}$$

此式将称为"因果性条件".

(2) (8.2.28)后两式给出:$\langle\hat{\beta}^\dagger(t)\hat{\beta}(t')\rangle_R$ 和$\langle\hat{\beta}(t)\hat{\beta}^\dagger(t')\rangle_R$ 是奇异的.当我们从 $\hat{\beta}^\dagger(t)\hat{\beta}(t')$和$\hat{\beta}(t)\hat{\beta}^\dagger(t')$分出 $\gamma_0\bar{n}_0\delta(t-t')$和 $\gamma_0(\bar{n}_0+1)\delta(t-t')$后,剩下的部分将不再是奇异的,即若令

$$\hat{\beta}^\dagger(t)\hat{\beta}(t') = \gamma_0\bar{n}_0\delta(t-t') + \hat{\Delta}(t,t'),$$

$$\hat{\beta}(t)\hat{\beta}^\dagger(t') = \gamma_0(\bar{n}_0+1)\delta(t-t') + \hat{\Delta}'(t-t'),$$

则 $\hat{\Delta}$和 $\hat{\Delta}'$都不奇异.至于 $\hat{\beta}(t)\hat{\beta}(t')$和 $\hat{\beta}^\dagger(t)\hat{\beta}^\dagger(t')$则不含 $\delta$ 函数型的部分,本身就是非奇异的.

从以上两条,即可来求$[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)]\hat{\beta}(t)$与$[\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_+(t-\epsilon)]\hat{\beta}(t)$的差,其中 $\epsilon$ 为正无穷小.首先我们写出$[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)]$所满足的朗之万方程,并将它写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)] = \hat{L}_{(\sigma\sigma_+)}, \tag{8.2.34}$$

上式中的 $\hat{L}_{(\sigma\sigma_+)}$即为用$[\hat{\sigma},\hat{\sigma}_+]$代替(8.2.26)式右方中的 $\hat{\sigma}$所得出的表达式(因为当 $\hat{\sigma}$取 $\hat{\sigma}_3$、$\hat{\sigma}_+$、$\hat{\sigma}_-$时,$[\hat{\sigma},\hat{\sigma}_+]$化为 $2\hat{\sigma}_+$、0、$-\hat{\sigma}_3$).从(8.2.34)式即得出

$$[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)] - [\hat{\sigma}(t-\epsilon)\hat{\sigma}_+(t-\epsilon)] = \int_{t-\epsilon}^{t}\hat{L}_{(\sigma\sigma_+)}(t')\mathrm{d}t'.$$

于是有

$$[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)]\hat{\beta}(t) - [\hat{\sigma}(t-\epsilon)\hat{\sigma}_+(t-\epsilon)]\hat{\beta}(t) = \int_{t-\epsilon}^{t}\hat{L}_{(\sigma\sigma_+)}(t')\hat{\beta}(t)\mathrm{d}t'. \tag{8.2.35}$$

由于上式右方的积分间隔 $\epsilon$ 为无穷小,故只有被积函数中含有 $\delta$ 函数型的奇异项才有贡献.而按(8.2.26)式给出的 $\hat{L}_{(\sigma\sigma_+)}$只有 $\hat{L}_{(\sigma\sigma_+)}(t')\hat{\beta}(t)$中的最后一项 $-\hat{\beta}^\dagger(t')[[\hat{\sigma}(t'),\hat{\sigma}_+(t')],\hat{\sigma}_-(t')].\hat{\beta}(t)$才有此可能.在略去不重要的部分后,它即化成 $-\gamma_0\bar{n}_0\delta(t-t')[[\hat{\sigma}(t'),\hat{\sigma}_+(t')],\hat{\sigma}_-(t')]$.代入(8.2.35)式并对 $t'$积分后即得出

$$[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)]\hat{\beta}(t) - [\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_+(t-\epsilon)]\hat{\beta}(t) = -\frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}_0[[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_+(t)],\hat{\sigma}_-(t)]. \tag{8.2.36}$$

---

① 见 Phys.Rev. A,**31**,3761(1985).

上式右方的因子$\frac{1}{2}$是因为积分上限正好等于 $t$(而不是大于 $t$)的缘故.

同样可以求出

$$\hat{\beta}^{\dagger}(t)[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_{-}(t)]-\hat{\beta}^{\dagger}(t)[\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_{-}(t-\epsilon)]=\frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}_0[[\hat{\sigma}(t),\hat{\sigma}_{-}(t)],\hat{\sigma}_{+}(t)], \tag{8.2.37}$$

按(8.2.33)式,$\hat{\beta}^{\dagger}(t)[\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_{+}(t-\epsilon)]$和$[\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_{+}(t-\epsilon)]\hat{\beta}(t)$对库的平均值等于零,故从(8.2.36)和(8.2.37)式即得出所要的结果即(8.2.29)中的第一等式,并给出

$$\hat{\Gamma}_{\sigma}(t)=[\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_{+}(t-\epsilon)]\hat{\beta}(t)-\hat{\beta}^{\dagger}(t)[\hat{\sigma}(t-\epsilon),\hat{\sigma}_{-}(t-\epsilon)], \tag{8.2.38}$$

它的期望值为零,故代表涨落力.我们看到,正如(8.2.18)式下面所述,涨落力项含有原子的算符.

下面来看看涨落力之间的相关函数:首先看$\langle\hat{\Gamma}_{-}(t)\hat{\Gamma}_{+}(t')\rangle_R$.按(8.2.38)式,

$$\langle\hat{\Gamma}_{-}(t)\hat{\Gamma}_{+}(t')\rangle_R=\langle\hat{\sigma}_3(t-\epsilon)\hat{\beta}(t)\hat{\beta}^{\dagger}(t')\hat{\sigma}_3(t'-\epsilon)\rangle_R. \tag{8.2.39a}$$

由于较早时刻的 $\hat{\sigma}_3$ 与较晚时刻的 $\hat{\beta}$(或 $\hat{\beta}^{\dagger}$)无关联,在高斯统计满足的情况下,上式就化为$\langle\hat{\sigma}_3(t-\epsilon)\hat{\sigma}_3(t'-\epsilon)\rangle_R\langle\hat{\beta}(t)\hat{\beta}^{\dagger}(t')\rangle_R$.这样就得出[利用(8.2.28)式]

$$\langle\hat{\Gamma}_{-}(t)\hat{\Gamma}_{+}(t')\rangle_R=\gamma_0(\bar{n}_0+1)\delta(t-t'). \tag{8.2.39b}$$

类似地有

$$\langle\hat{\Gamma}_{+}(t)\hat{\Gamma}_{-}(t')\rangle_R=\gamma_0\bar{n}_0\delta(t-t'), \tag{8.2.40a}$$

$$\langle\hat{\Gamma}_{+}(t)\hat{\Gamma}_3(t')\rangle_R=-2\gamma_0\bar{n}_0\langle\hat{\sigma}_{+}(t)\rangle_R\delta(t-t'), \tag{8.2.40b}$$

$$\langle\hat{\Gamma}_{-}(t)\hat{\Gamma}_3(t')\rangle_R=2\gamma_0(\bar{n}_0+1)\langle\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle_R\delta(t-t'), \tag{8.2.40c}$$

$$\langle\hat{\Gamma}_3(t)\hat{\Gamma}_3(t')\rangle_R=2\gamma_0(2\bar{n}_0+1+\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle_R)\delta(t-t'), \tag{8.2.40d}$$

$$\langle\hat{\Gamma}_{+}(t)\hat{\Gamma}_{+}(t')\rangle_R=\langle\hat{\Gamma}_{-}(t)\hat{\Gamma}_{-}(t')\rangle_R=0. \tag{8.2.40e}$$

值得提起的是,上式中$\langle\hat{\sigma}_{\pm}\rangle_R$ 和$\langle\hat{\sigma}\rangle_R$ 仍然是原子状态空间中的算符,只是对库作了平均.

在下一小节中,将给出简单激光系统的联立朗之万方程组,并通过"原子算符间的对易关系不被破坏"这一原则性要求来导出涨落力之间的相关函数.我们将看到上述(8.2.39)和(8.2.40)式与该处的结果是相洽的.

### 3. 简单激光系统的联立方程组

激光的产生是光学发展中的一个里程碑,它使人类摆脱了仅只使用混杂光场的限制,开始使用准相干光场①.从物理上看,相干光场与混杂光场的本质差别在

---

① 参见§5.5第6小节.

于它的强度恒定，光子数的涨落只来自光子发射的散粒效应. 对此我们已在(7.3.25)式下面作过说明. 激光理论的发展还揭示出，在非平衡态系统中，亦可能出现类似于相变的现象. 随后并发现在其他一些系统中也会出现这种非平衡相变，从而开辟了非平衡统计物理的一个新领域.

在这一小节中，我们将给出由二能级(或三能级)原子集合与单模光场所构成的激光系统的完全方程组. 为确定起见，我们将考虑非相干抽运(如通过放电过程，而不是通过相干光场来抽运)，并只考虑原子只有均匀增宽①及光场为行波模的情况(行波模可通过环形腔来实现).

行波模与原子相作用的特点是：各个原子与光场的耦合常数的绝对值相等，差别只在于相因子. 这时第 $\mu$ 个原子与光场的耦合常数 $g^{(\mu)}$ 可以写成 $ge^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}$，其中 $\boldsymbol{x}^{(\mu)}$ 为第 $\mu$ 个原子的坐标. 在均匀增宽情况，各个原子的振动频率和谱线宽度都相同.

在此问题中，$N$ 个原子和单模光场构成一个系统，它们之间有相互作用，其哈密顿量用 $\hat{H}_{\text{int}}$ 表示. 另外，原子和光场还与各自的库相作用. 在原子为二能级情况下，

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\sum_{\mu}[g^{(\mu)}\hat{\sigma}_{+}^{(\mu)}\hat{a} + g^{(\mu)*}\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)}\hat{a}^{\dagger}], \qquad g^{(\mu)} = ge^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}. \tag{8.2.41}$$

于是对于系统的每一个算符 $\hat{S}$，在 $\frac{d}{dt}\hat{S}$ 中将包含两部分，其一是 $\frac{1}{i\hbar}[\hat{S}(t), \hat{H}_0(t) + \hat{H}_{\text{int}}(t)]$，其二即为与库相作用的部分. 场和原子算符方程的具体结果如下：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{a}(t) &= -\left(i\omega + \frac{\kappa}{2}\right)\hat{a}(t) - ig^{*}\sum_{\mu}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)}(t) + \hat{F}(t), \\
\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)}(t) &= -(i\omega_0 + \gamma)\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)} + ige^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\sigma}_{3}^{(\mu)}(t)\hat{a}(t) + \hat{\Gamma}_{-}^{(\mu)}(t), \\
\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_{3}^{(\mu)}(t) &= p - \gamma_3\hat{\sigma}_{3}^{(\mu)}(t) - 2i[ge^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\sigma}_{+}^{(\mu)}(t)\hat{a}(t) \\
&\qquad - g^{*}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)}(t)\hat{a}^{\dagger}(t)] + \hat{\Gamma}_{3}^{(\mu)}(t).
\end{aligned} \tag{8.2.42}$$

$\hat{\sigma}_{+}^{(\mu)}$ 的方程可从 $\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)}$ 的方程取厄米共轭得出. 上式中的 $\gamma, \gamma_3$ 和 $p$ 用第一小节中的 $w_{jk}$ 和 $\gamma_{jk}^{p}$ 表示的结果是

$$\gamma_3 = w_{21} + w_{12}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\gamma_3 + \gamma_{12}^{p}, \quad p = w_{21} - w_{12}, \tag{8.2.43}$$

其中 $p$ 代表净抽运率. (8.2.42)式中原子与库相互作用所贡献的部分与(8.2.32)

---

① 即假定原子的运动可以忽略，从而没有多普勒效应所引起的原子集体谱线的非均匀增宽.

式是相洽的，只是这里考虑了退相干效应(见(8.2.11)式)和激光器抽运库的作用．当 $\bar{n}_0 \neq 0$ 时，第二小节中的热库也具有从能级 1 到能级 2 的抽运作用，只是其净抽运率 $p = w_{21} - w_{12}$ 为负值．例如在(8.2.32c)式中 $\gamma_0 = -p, \gamma_0(2\bar{n}_0 + 1) = \gamma_3$，于是按(8.2.43)式即有

$$w_{21} = \frac{1}{2}(\gamma_3 + p) = \bar{n}_0 \gamma_0, \qquad w_{12} = \frac{1}{2}(\gamma_3 - p) = \gamma_0(\bar{n}_0 + 1). \qquad (8.2.44)$$

在此情况下，从能级 1 到能级 2 的抽运率 $w_{21}$ 与热光的吸收相联系．

原子涨落力 $\hat{\Gamma}_{\pm}^{(\mu)}$ 和 $\hat{\Gamma}_3^{(\mu)}$ 之间的相关函数也可以通过下述原则性的要求"朗之万方程应保持原子算符 $\hat{\sigma}_{\pm}, \hat{\sigma}_3$ 之间的对易关系不变"推导出来(推导参见下文)，结果为

$$\langle \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t') \rangle_R = \hat{G}_{+-}^{(\mu)}(t)\delta(t-t'), \quad \hat{G}_{+-}^{(\mu)}(t) = \gamma + \frac{p}{2} + \left(\gamma - \frac{\hat{\gamma}_3}{2}\right)\langle \hat{\sigma}_3^{(\mu)}(t) \rangle_R,$$

$$\langle \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t') \rangle_R = \hat{G}_{-+}^{(\mu)}(t)\delta(t-t'), \quad \hat{G}_{-+}^{(\mu)}(t) = \gamma - \frac{p}{2} - \left(\gamma - \frac{\gamma_3}{2}\right)\langle \hat{\sigma}_3^{(\mu)}(t) \rangle_R,$$

$$\langle \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t') \rangle_R = \langle \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t') \rangle_R = 0,$$

$$\langle \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t') \rangle_R = \hat{G}_{3+}^{(\mu)}(t)\delta(t-t'), \quad \hat{G}_{3+}^{(\mu)}(t) = (\gamma_3 - p)\langle \hat{\sigma}_+^{(\mu)}(t) \rangle_R,$$

$$\langle \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}(t') \rangle_R = \hat{G}_{+3}^{(\mu)}(t)\delta(t-t'), \quad \hat{G}_{+3}^{(\mu)}(t) = -(\gamma_3 + p)\langle \hat{\sigma}_+^{(\mu)}(t) \rangle_R,$$

$$\langle \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}(t') \rangle_R = \hat{G}_{33}^{(\mu)}(t)\delta(t-t'), \quad \hat{G}_{33}^{(\mu)}(t) = 2[\gamma_3 - p\langle \hat{\sigma}_3^{(\mu)}(t) \rangle_R].$$

$$(8.2.45)$$

至于 $\langle \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t') \rangle_R$ 和 $\langle \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t) \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}(t') \rangle_R$ 则可从(8.2.45)后两式取厄米共轭得出，不再单列．不难验证：当取 $p = -\gamma_0, \gamma_3 = \gamma_0(2\bar{n}+1), \gamma = \frac{1}{2}\gamma_0(2\bar{n}+1)$ 时，从(8.2.45)式即可得出(8.2.40)式．如前指出，(8.2.45)式右方的 $\langle \hat{\sigma}_{\pm}^{(\mu)} \rangle_R$ 和 $\langle \hat{\sigma}_3^{(\mu)} \rangle_R$ 仍为原子态空间中的算符．

(8.2.45)式的推导举例如下：由(8.2.42)第二式及其厄米共轭式，可得

$$\frac{d}{dt}[\hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)}] = \left(\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_+^{(\mu)}\right)\hat{\sigma}_-^{(\mu)} + \hat{\sigma}_+^{(\mu)}\left(\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_-^{(\mu)}\right) = [(i\omega_0 - \gamma)\hat{\sigma}_+^{(\mu)} - ig_\mu^* \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_3^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}]\hat{\sigma}_-^{(\mu)} + \hat{\sigma}_+^{(\mu)}[-(i\omega_0 + \gamma)\hat{\sigma}_-^{(\mu)} + ig_\mu \hat{\sigma}_3^{(\mu)} \hat{a} + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}], \qquad (8.2.46a)$$

$$\frac{d}{dt}[\hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_+^{(\mu)}] = \left(\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_-^{(\mu)}\right)\hat{\sigma}_+^{(\mu)} + \hat{\sigma}_-^{(\mu)}\left(\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_+^{(\mu)}\right) = [-(i\omega_0 + \gamma)\hat{\sigma}_-^{(\mu)} + ig_\mu \hat{\sigma}_3^{(\mu)} \hat{a} + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}]\hat{\sigma}_+^{(\mu)} + \hat{\sigma}_-^{(\mu)}[(i\omega_0 - \gamma)\hat{\sigma}_+^{(\mu)} - ig_\mu^* \hat{\sigma}_3^{(\mu)} \hat{a}^\dagger + \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}]. \qquad (8.2.46b)$$

将(8.2.46a)与(8.2.46b)式相减，在"对易关系 $[\hat{\sigma}_+^{(\mu)}, \hat{\sigma}_-^{(\mu)}] = \hat{\sigma}_3^{(\mu)}, [\hat{\sigma}_3^{(\mu)}, \hat{\sigma}_\pm^{(\mu)}] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm^{(\mu)}$ 保持

不被破坏”的要求下.即化出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_3^{(\mu)} = -2\gamma\hat{\sigma}_3^{(\mu)} + 2\mathrm{i}(g_\mu^* \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(\mu)} - g_\mu \hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{a}) + (\hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)})$$
$$- (\hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_+^{(\mu)}). \tag{8.2.47}$$

将此式与(8.2.42)第三式即原来的 $\hat{\sigma}_3^{(\mu)}$ 方程相比较就得到

$$(\hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)}) - (\hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_+^{(\mu)}) = (2\gamma - \gamma_3)\hat{\sigma}_3 + p + \hat{\Gamma}_3^{(\mu)}. \tag{8.2.48a}$$

这是第一个结果.再将(8.2.46a)与(8.2.46b)式相加,并利用“$\hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)} + \hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_+^{(\mu)} = 1$ 和 $\hat{\sigma}_3^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)} + \hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_3^{(\mu)} = 0$ 保持成立的条件”即得出

$$(\hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)}) + (\hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_+^{(\mu)}) = 2\gamma. \tag{8.2.48b}$$

将(8.2.48)两式相加或相减再对库平均即得出

$$\langle \hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)} \rangle_R = \gamma + \left(\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3\right)\langle \hat{\sigma}_3 \rangle_R + \frac{1}{2}p, \tag{8.2.49a}$$

$$\langle \hat{\sigma}_-^{(\mu)} \hat{\Gamma}_+^{(\mu)} + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)} \hat{\sigma}_+^{(\mu)} \rangle_R = \gamma - \left(\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3\right)\langle \hat{\sigma}_3 \rangle_R - \frac{1}{2}p. \tag{8.2.49b}$$

证明的最后一步是要将上式左方的值与 $\hat{G}_{+-}^{(\mu)}$ 和 $\hat{G}_{-+}^{(\mu)}$ 联系起来,为此从(8.2.42)式求出 $\hat{\sigma}_-^{(\mu)}$ 的积分表达式:

$$\hat{\sigma}_-^{(\mu)}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega_0+\gamma)(t-t')}[\mathrm{i}g_\mu \hat{\sigma}_3^{(\mu)}(t')\hat{a}(t') + \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t')]\mathrm{d}t' + \hat{\sigma}_-^{(\mu)}(0)\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega_0+\gamma)t}. \tag{8.2.50}$$

将上式两侧从左方乘上 $\hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)$,再对库作平均.由于 $\hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)$不可能与比它早的 $\hat{\sigma}_3^{(\mu)}(t')\hat{a}(t')$ 相关,它与 $\hat{\sigma}_3^{(3)}(t)\hat{a}(t)$的相关只是一个有限数,故上式积分中的第一项对$\langle \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)\hat{\sigma}_-^{(\mu)}(t)\rangle_R$ 的贡献为零.积分中第二项对$\langle \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)\hat{\sigma}_-^{(\mu)}(t)\rangle_R$ 的贡献为$\frac{1}{2}\hat{G}_{+-}^{(\mu)}(t)$.(8.2.50)式右方最后一项的贡献亦为零.于是得

$$\langle \hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)\hat{\sigma}_-^{(\mu)}(t)\rangle_R = \frac{1}{2}\hat{G}_{+-}^{(\mu)}(t). \tag{8.2.51a}$$

同样,将(8.2.50)式两侧从右方乘上 $\hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)$再对库平均,可求出

$$\langle \hat{\sigma}_-^{(\mu)}(t)\hat{\Gamma}_+^{(\mu)}(t)\rangle = \frac{1}{2}G_{-+}^{(\mu)}(t). \tag{8.2.51b}$$

用类似的方法还可求出

$$\langle \hat{\sigma}_+^{(\mu)}(t)\hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t)\rangle_R = \frac{1}{2}\hat{G}_{+-}^{(\mu)}(t). \tag{8.2.51c}$$

$$\langle \hat{\Gamma}_-^{(\mu)}(t)\hat{\sigma}_+^{(\mu)}(t)\rangle_R = \frac{1}{2}\hat{G}_{-+}^{(\mu)}(t). \tag{8.2.51d}$$

将(8.2.51)诸式代入(8.2.49)式,即得出(8.2.45)第一、二式,举例证毕.

有了(8.2.42)第二、三式,我们就可写出原子集合的朗之万方程.为了吸收掉 $g_\mu$ 中的相因子,我们定义原子集合的算符为

$$\hat{\Sigma}_{-}=\sum_{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\sigma}_{-}^{(\mu)},\qquad \hat{\Sigma}_{+}=\sum_{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\sigma}_{+}^{(\mu)},\tag{8.2.52}$$
$$\hat{\Sigma}_{3}=\sum_{\mu}\hat{\sigma}_{3}^{(\mu)}.$$

不难验证,即使在 $\hat{\Sigma}_{\pm}$ 的定义中引入了相位因子 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}$,$\hat{\Sigma}_{\pm}$ 和 $\hat{\Sigma}_{3}$ 仍然满足通常自旋算符的对易关系:

$$[\hat{\Sigma}_{3},\hat{\Sigma}_{+}]=2\hat{\Sigma}_{+},\quad [\hat{\Sigma}_{3},\hat{\Sigma}_{-}]=-2\hat{\Sigma}_{-},\quad [\hat{\Sigma}_{+},\hat{\Sigma}_{-}]=\hat{\Sigma}_{3}.\tag{8.2.53}$$

将方程(8.2.42)第二式乘上因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}$ 然后对 $\mu$ 求和、对第三式直接求和,就得出“二能级原子激光”的朗之万方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t)=-(\mathrm{i}\omega+\kappa/2)\hat{a}(t)-\mathrm{i}g^{*}\hat{\Sigma}_{-}(t)+\hat{F}(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_{-}(t)=-(\mathrm{i}\omega_{0}+\gamma)\hat{\Sigma}_{-}(t)+\mathrm{i}g\hat{\Sigma}_{3}(t)\hat{a}(t)+\hat{\Gamma}_{-}(t),\tag{8.2.54}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_{3}(t)=Np-\gamma_{3}\hat{\Sigma}_{3}(t)-2\mathrm{i}[g\hat{\Sigma}_{+}(t)\hat{a}(t)-g^{*}\hat{a}^{\dagger}(t)\hat{\Sigma}_{-}(t)]+\hat{\Gamma}_{3}(t),$$

其中 $N$ 为原子总数,$\hat{\Gamma}_{-}$ 和 $\hat{\Gamma}_{3}$ 分别为

$$\hat{\Gamma}_{-}(t)=\sum_{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}^{(\mu)}}\hat{\Gamma}_{-}^{(\mu)}(t),\qquad \hat{\Gamma}_{3}(t)=\sum_{\mu}\hat{\Gamma}_{3}^{(\mu)}(t).\tag{8.2.55}$$

它们之间的相关函数为

$$\langle\hat{\Gamma}_{+}(t)\hat{\Gamma}_{-}(t)\rangle_{R}=\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}^{(\mu)}-\boldsymbol{x}^{(\mu')})}\langle\hat{\Gamma}_{+}^{(\mu)}(t)\hat{\Gamma}_{-}^{(\mu')}(t')\rangle_{R}.$$

在不同原子的库互不关联的情况下,$\langle\hat{\Gamma}_{+}^{(\mu)}(t)\hat{\Gamma}_{-}^{(\mu')}(t')\rangle_{R}=\delta_{\mu\mu'}\hat{G}_{+-}^{(\mu)}(t)\delta(t-t')$,于是得出

$$\langle\hat{\Gamma}_{+}(t)\hat{\Gamma}_{-}(t')\rangle_{R}=\hat{G}_{+-}(t)\delta(t-t'),$$
$$\hat{G}_{+-}(t)=\mathrm{N}(\gamma+\frac{1}{2}p)+(\gamma-\frac{1}{2}\gamma_{3})\langle\hat{\Sigma}_{3}(t)\rangle_{R},\tag{8.2.56a}$$

同样可得出

$$\langle\hat{\Gamma}_{-}(t)\hat{\Gamma}_{+}(t')\rangle_{R}=\hat{G}_{-+}(t)\delta(t-t'),$$
$$\hat{G}_{-+}(t)=N\left(\gamma-\frac{1}{2}p\right)-\left(\gamma-\frac{1}{2}\gamma_{3}\right)\langle\hat{\Sigma}_{3}(t)\rangle_{R},\tag{8.2.56b}$$
$$\langle\hat{\Gamma}_{3}(t)\hat{\Gamma}_{3}(t')\rangle_{R}=\hat{G}_{33}(t)\delta(t-t'),\quad \hat{G}_{33}(t)=2[N\gamma_{3}-p\langle\hat{\Sigma}_{3}(t)\rangle_{R}],\tag{8.2.56c}$$
$$\langle\hat{\Gamma}_{3}(t)\hat{\Gamma}_{+}(t')\rangle_{R}=\hat{G}_{3+}(t)\delta(t-t'),\quad \hat{G}_{3+}(t)=(\gamma_{3}-p)\langle\hat{\Sigma}_{+}(t)\rangle_{R},\tag{8.2.56d}$$
$$\langle\hat{\Gamma}_{+}(t)\hat{\Gamma}_{3}(t')\rangle_{R}=\hat{G}_{+3}(t)\delta(t-t'),\quad \hat{G}_{+3}(t)=-(\gamma_{3}+p)\langle\hat{\Sigma}_{+}(t)\rangle_{R}.\tag{8.2.56e}$$

(8.2.54)第一式表示,激光模是与集体原子算符 $\hat{\Sigma}_{\pm}$ 相耦合,这表明原子对激光模的辐射和吸收是一种集体行为,但原子与库的作用仍是一种独自的行为①. 光场涨落力的相关函数仍由(8.2.2)式表示.

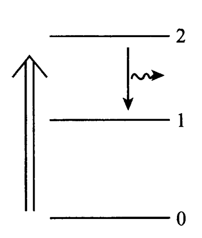



图 8.2.1 三能级原子激光的运作图

最后简单提一下三能级原子的激光方程. 二能级原子的激光的缺点是实现原子布居数的反转比较困难. 故通常采用三能级或四能级原子来产生激光. 三能级原子激光的运作如图8.2.1 所示. 激光发射能级为 2 和 1,能级 0 为基态. 如果设三个能级宇称依次为 +, −, +. 则从 0 到 2 的抽运可通过碰撞机制来实现(光抽运禁戒). 设 $w_{10}=0$,光场仍为行波模,这时(8.2.54)前两式仍成立,只是 $\gamma$ 的表达式要加上$\frac{1}{2}(w_{02}+w_{01})$. 现在原子布居数中只有两个是独立的,因为

$$\hat{N}_0+\hat{N}_1+\hat{N}_2=N.$$

通过此式消去 $\hat{N}_0$,就得出两个工作能级(1 与 2)布居数的朗之万方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}_1 &= w_{12}\hat{N}_2-\gamma_1\hat{N}_1+\mathrm{i}(g\hat{\Sigma}_+\hat{a}-g^*\hat{a}^{\dagger}\hat{\Sigma}_-)+\hat{\Gamma}_{11};\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}_2 &= w_{20}N+(w_{21}-w_{20})\hat{N}_1-(\gamma_2+w_{20})\hat{N}_2-\mathrm{i}(g\hat{\Sigma}_+\hat{a}-g^*\hat{a}^{\dagger}\hat{\Sigma}_-)+\hat{\Gamma}_{22}.\end{aligned}\tag{8.2.57}$$

其中 $\gamma_1=w_{21}+w_{01}$, $\gamma_2=w_{12}+w_{02}$. (8.2.54)第一、二式(其中 $\hat{\Sigma}_3$ 仍代表 $\hat{N}_2-\hat{N}_1$, $\hat{\Sigma}_-=\hat{\Sigma}_{12}$)与(8.2.57)式合起来就构成三能级原子的激光系统的完全方程组. 至于 $\hat{\Sigma}_{23}$ 和 $\hat{\Sigma}_{31}$ 的方程,对此处研究的激光过程并无影响(参见 Haken, Laser Theory(Ⅱ.3.16)式下的说明). 故不再列出.

# §8.3 浸渐近似 激光的量子速率方程

在上一节中已得出二能级原子激光的朗之万方程组. 我们接下去的工作就是从这一方程组出发,来对激光过程进行研究.

方程组(8.2.54)是一组非线性的算符联立方程. 解析求解十分困难,需要作近似处理. 浸渐近似就是一个重要的常用的近似. 按照 Haken 书中所述②它在阈以下和阈以上一个相当宽广的范围都能适用.

在(8.2.54)三个方程中,$\hat{\Sigma}_-$ 的弛豫时间最短(即 $\gamma>>\gamma_3$、$k$),浸渐近似将对它的变化方程进行. 在对 $\hat{\Sigma}_{\pm}$ 的变化作了浸渐近似以后,即可导出激光的量子速率方程. 它是光子数算符 $\hat{n}$ 的变化率和原子反转数算符 $\hat{\Sigma}_3$ 变化率的联立方程组. 在仔细地分离出涨落力项以后,在此联立方程中不仅含有受激辐射项和吸收项,还有

① 如果原子的抽运和耗散过程也是集体行为,那就成为 Haake 等所讨论的超辐射激光器. 参见附录 G.

② Haken, Laser Theory, ch. Ⅸ.2.

自发辐射项.它们是研究激光的重要理论工具.在下一节中我们将在它的基础上来阐明光子数饱和的机制并给出激光的阈值和光子数及原子反转数的平均值.

在讨论浸渐近似以前,我们先看一个假想的情况,即原子反转数被保持为固定值时光场的变化.这一考察对我们理解后续的讨论有帮助.

**1. 原子反转数固定时光场的演化**

我们考虑原子与激光模共振的情况.这时有

$$\omega = \omega_0.$$

从(8.2.54)式可以看出,$\hat{a}(t)$和$\hat{\Sigma}_-(t)$除了演化以外还以高频$\omega_0$振动.为了分出这种迅变的振动,我们将原来的$\hat{a}(t)$和$\hat{\Sigma}_\pm(t)$改写成$\hat{a}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$和$\hat{\Sigma}_\pm(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t}$.这样所定义的$\hat{a}(t)$和$\hat{\Sigma}_\pm(t)$就只有演化,它们和$\hat{\Sigma}_3(t)$($\hat{\Sigma}_3$原来就只有演化而没有高频振荡)满足的方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}(t) = -\frac{1}{2}\kappa\hat{a}(t) - \mathrm{i}g^*\hat{\Sigma}_-(t) + \hat{F}(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_-(t) = -\gamma\hat{\Sigma}_-(t) + \mathrm{i}g\hat{\Sigma}_3(t)\hat{a}(t) + \hat{\Gamma}_-(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_3(t) = \mathrm{N}p - \gamma_3\hat{\Sigma}_3(t) - 2\mathrm{i}[g\hat{\Sigma}_+(t)\hat{a}(t) - g^*\hat{a}^\dagger(t)\hat{\Sigma}_-(t)] + \hat{\Gamma}_3(t). \tag{8.3.1}$$

上式中的$\hat{F}(t)$和$\hat{\Gamma}_-(t)$亦为原来的$\hat{F}(t)$和$\hat{\Gamma}_-(t)$分出因子$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$以后的值.这一改动并不影响相关函数(8.2.2)和(8.2.56).

从(8.3.1)第一式得

$$\hat{\Sigma}_- = \frac{\mathrm{i}}{g^*}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a} + \frac{1}{2}\kappa\hat{a} - \hat{F}\right), \tag{8.3.2}$$

将它代入(8.3.1)第二式中即化出$\hat{a}$所满足二阶方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\hat{a} + \left(\frac{1}{2}\kappa + \gamma\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a} + \left(\frac{1}{2}\kappa\gamma - |g|^2\hat{\Sigma}_3\right)\hat{a} = \hat{F}_c, \tag{8.3.3}$$

其中$\hat{F}_c$为涨落力,满足$\hat{F}_c = \gamma\hat{F} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{F} - \mathrm{i}g^*\hat{\Gamma}_-$,$\langle\hat{F}_c\rangle = 0$.

在本小节中我们的目的是考察原子反转数的大小对光场演化的影响,因此上式中的$\hat{\Sigma}_3$将看成是一个给定的参数$\Sigma_3$.于是(8.3.3)式就成为$\hat{a}$的线性常系数的常微分方程.为了对该方程的解有一个直观的理解,我们可把$\hat{a}$比拟成一个位移矢量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{m}_1 + a_2\boldsymbol{m}_2$,其中$\boldsymbol{m}_1$与$\boldsymbol{m}_2$为两个基矢.分量$a_1$和$a_2$可比拟成$\hat{a}$的厄米部分$\frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$和反厄米部分$\frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$.同样涨落力算符也可比拟成矢量

$\boldsymbol{F}_c = F_{c1}\boldsymbol{m}_1 + F_{c2}\boldsymbol{m}_2$. 在这种比拟下，$a_1$ 和 $a_2$ 满足的微分方程即为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}a_j + \left(\frac{\kappa}{2} + \gamma\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_j + \left(\frac{1}{2}\kappa\gamma - |g|^2\Sigma_3\right)a_j = F_{cj}, j = 1,2. \tag{8.3.4}$$

$\boldsymbol{a}$ 可视为一个布朗粒子的位移矢量，该粒子是在常规力$(|g|^2\Sigma_3 - \frac{1}{2}\kappa\gamma)\boldsymbol{a}$ 和涨落力 $\boldsymbol{F}_c$ 作用下运动①. 此常规力并可表示为势函数 $V$ 的负梯度：

$$V(a) = \frac{1}{4}(\kappa\gamma - 2|g|^2\Sigma_3)a^2, \tag{8.3.5}$$

其中 $a$ 代表 $\boldsymbol{a}$ 的数值. 我们不难写出方程(8.3.4)的一般解. 为此令 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 代表下述代数方程的根：

$$\alpha^2 - \left(\frac{1}{2}\kappa + \gamma\right)\alpha + \left(\frac{1}{2}\kappa\gamma - |g|^2\Sigma_3\right) = 0, \tag{8.3.6}$$

它们的值为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4}\left[(2\gamma + \kappa) - \sqrt{(2\gamma - \kappa)^2 + 16|g|^2\Sigma_3}\right], \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4}\left[(2\gamma + \kappa) + \sqrt{(2\gamma - \kappa)^2 + 16|g|^2\Sigma_3}\right]. \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

(8.3.4)式的一般解可表示为该方程的一个特解与相应的齐次方程通解的和，即

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{c}_1\mathrm{e}^{-\alpha_1 t} + \boldsymbol{c}_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^t\left[\mathrm{e}^{-\alpha_1(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-\alpha_2(t-\tau)}\right]\boldsymbol{F}_c(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8.3.8}$$

其中 $\boldsymbol{c}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_2$ 可用振子在 $t=0$ 时的位移 $\boldsymbol{a}(0)$和速度$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\right|_{t=0}$表示出来.

下面分两种情况来讨论：

(1) 小 $\Sigma_3$ 的情形. 具体判据是

$$\Sigma_3 < \frac{1}{2|g|^2}\kappa\gamma \equiv \Sigma_3^{(\mathrm{th})}. \tag{8.3.9a}$$

就腔模来说，此式的物理意义是原子集合的净受激辐射率(指受激辐射率减去吸收率)小于腔场的损耗率. 这是因为$\frac{2|g|^2}{\gamma}N_2 n$(其中 $n$ 代表光子数)代表 $N_2$ 个上能

---

① 这里所说的涨落力和常规力实际都是单位质量所受的力. 原子反转数 $\Sigma_3$ 和原子-光子耦合常数$|g|^2$ 的乘积对应加速力，而阻尼系数的乘积$(\frac{1}{2}\kappa)\gamma$ 对应减速力.

级原子的受激辐射率①,而$\frac{2|g|^2}{\gamma}N_1 n$ 代表$N_1$ 个下能级光子的吸收率.净受激辐射率即为两者之差$\frac{2|g|^2}{\gamma}\Sigma_3 n$.腔场光子的损耗率为 $n\kappa$.令两者比值小于1,在消去 $n$ 后即得出(8.3.9a)式.

在此情况,运动方程(8.3.4)式中的常规力是弹性恢复力.在任一坐标轴方向,势函数 $V$ 随位移 $a_j$ 的变化都如图8.3.1所示.因此模拟布朗粒子的运动将是在涨落力驱动下的阻尼振动.无论初值如何,最后都是在势函数的谷底(即 $\boldsymbol{a}=0$ 处)附近作涨落性运动.

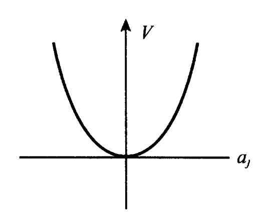



图8.3.1　小 $\Sigma_3$ 情况下的势函数

不难证明,这时 $\mathrm{Re}\alpha_1$ 和 $\mathrm{Re}\alpha_2$ 都是正值,从而(8.3.8)式右方前两项都是衰减的函数.(8.3.8)式右方最后一项就是涨落力驱动下阻尼振动的表达式,它是0到 $t$ 时段内各个小间隔 $\mathrm{d}\tau$ 的涨落力驱动结果的和.我们将把势函数的谷底(即 $\boldsymbol{a}=0$ 点)称作运动的“稳恒点”.

(2) 大 $\Sigma_3$ 的情形.其条件为

$$\Sigma_3 > \Sigma_3^{(\mathrm{th})} \equiv \frac{1}{2|g|^2}\kappa\gamma, \tag{8.3.9b}$$

对应于原子集合的净受激辐射率大于腔场的损耗率.在此情况下,模拟粒子的势函数 $V$ 如图8.3.2所示.从这个势函数不难看出,粒子的位移 $a_j$ 将愈变愈大.不存在任何“稳恒点”.

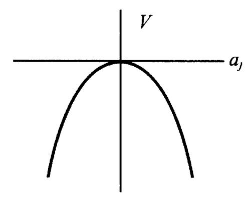



图8.3.2　大 $\Sigma_3$ 情况下的势函数

在 $\boldsymbol{a}(t)$的解(8.3.8)中,这时的 $\alpha_1$ 已变成负实数.

以上的讨论是将原子反转数 $\Sigma_3$ 取为固定的参数.实际情况 $\Sigma_3$ 并非如此.$\Sigma_3$ 将按(8.3.1)第三式而变化.如果在 $a^2$ 小时它比 $\Sigma_3^{(\mathrm{th})}$ 大、使得 $V$ 在小距离处相似于图8.3.2中的形状,而当 $a^2$ 增加时它逐渐变小,最后小于 $\Sigma_3^{(\mathrm{th})}$,即在远处又相似于图形8.3.1,那么 $a^2$ 将获得一个非零的稳恒值.激光系统正好具有这样

---

① 单个原子的受激辐射率 $w=\frac{1}{T}|\langle f|\hat{S}|i\rangle|^2=2\pi|g|^2 n\delta(\omega-\omega_0)$.当原子辐射频率有一个宽度时,如(8.1.47)式所示,相当于 $\omega_0$ 有一个虚部 $\mathrm{i}\gamma$.于是要将 $\delta(\omega-\omega_0)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{(\omega-\omega_0)^2+\epsilon^2}$中$\epsilon$ 换成$\gamma$(参见(4.1.37)式上面一段小字).当 $\omega=\omega_0$ 时即得出受激辐射率为$\frac{2|g|^2}{\gamma}n$.

的饱和机制.

**2. 浸渐近似**

在本节引言中已经谈到,此近似在激光阈上下一个相当宽广的范围内都能适用.例如对通常的氦氖激光,在阈值处光子数的典型值为 $10^4$,在 Haken 的 Laser Theory 书 § Ⅵ.2 中,指出对于气体(激光器)浸渐近似适用的范围可从光子数值 $10^2$ 到 $10^8$.

为了说明什么是浸渐近似(adiabatic approximation),先看这样情况:即 $\hat{a}$ 与 $\hat{\Sigma}_3$ 为常量.这时若不考虑 $\hat{\Sigma}_-$ 所受的涨落力,则 $\hat{\Sigma}_-$ 在经过一段弛豫时间以后将达到一个稳恒值

$$\hat{\Sigma}_- = \frac{\mathrm{i}}{\gamma} g \hat{\Sigma}_3 \hat{a}. \tag{8.3.10}$$

它是在令(8.3.1)第二式中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_-(t)$ 和 $\hat{\Gamma}_-(t)$ 为零以后所得到的结果.

如果,$\hat{a}$ 和 $\hat{\Sigma}_3$ 虽然在变化,但在 $\hat{\Sigma}_-$ 的弛豫时间($\approx\frac{1}{\gamma}$)内改变很小.那么在每一时刻,$\hat{\Sigma}_-$ 都将近似地与该时刻的 $\hat{a}$ 和 $\hat{\Sigma}_3$ 达到一种随衡状态,即 $\hat{\Sigma}_-(t)\approx \frac{\mathrm{i}}{\gamma} g\hat{\Sigma}_3(t)\hat{a}(t)$.在考虑了涨落力后,结果为

$$\hat{\Sigma}_-(t) \approx \frac{\mathrm{i}}{\gamma} g \hat{\Sigma}_3(t)\hat{a}(t) + \hat{\zeta}_-(t). \tag{8.3.11}$$

上式中的 $\hat{\zeta}_-(t)$ 代表 $\hat{\Gamma}_-$ 中滤去高频成分后剩下的部分并除以 $\gamma$(参见下文).以上的近似处理就是浸渐近似.它的成立,要求退相位率 $\gamma_{12}^p \gg \gamma_3$[参见(8.2.43)式,当然也要 $\gamma\gg\kappa$]以及方程之间的有效耦合比较弱(参见下文的推导).(8.3.11)式在 $\hat{\zeta}_-(t)\approx\frac{1}{\gamma}\hat{\Gamma}_-(t)$ 的情况下[参见(8.3.16)式]就是浸渐近似的结果.

(8.3.11)式的导出如下.首先从(8.3.1)式写出 $\hat{\Sigma}_-(t)$ 的积分表达式

$$\hat{\Sigma}_-(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}[\mathrm{i}g\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}(\tau) + \hat{\Gamma}_-(\tau)]\mathrm{d}\tau + \hat{\Sigma}_-(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{8.3.12}$$

上式积分中的第一项的贡献主要来自上限 $t$ 的附近,即从 $t$ 到以下一、二个 $1/\gamma$ 的时区.若在此时区内 $\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}(\tau)$ 变化很小(条件即为 $\gamma\gg\gamma_3,\gamma\gg\kappa$.前一条件的实现要求 $\gamma_{12}^p\gg\gamma_3$),可将它取为 $t$ 时刻的值提到积分号外面来,于是有

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\mathrm{i}g\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}(\tau)\mathrm{d}\tau \approx \frac{\mathrm{i}g}{\gamma}\hat{\Sigma}_3(t)\hat{a}(t)(1-\mathrm{e}^{-\gamma t}).$$

除了过程刚开始的短暂时间以外,上式右方以及(8.3.12)中含 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 的项可以略去,

这样就导出(8.3.11),其中

$$\hat{\zeta}_{-}(t)=\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\hat{\Gamma}_{-}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.3.13}$$

以上式可看出,$\hat{\Gamma}_{-}(t)$中高频部分(频率比 $\gamma$ 大的部分)已通过积分而被滤去.这一论断也可从 $\hat{\zeta}_{-}$ 和它的共轭算符 $\hat{\zeta}_{+}$ 之间的相关函数来印证. $\langle\hat{\zeta}_{+}(t)\hat{\zeta}_{-}(t')\rangle$可像§8.1第四小节那样来计算.结果为

$$\langle\hat{\zeta}_{+}(t)\hat{\zeta}_{-}(t')\rangle_{R}=\frac{1}{2\gamma}\hat{G}_{+-}\left(\frac{t+t'}{2}\right)\mathrm{e}^{-\gamma|t-t'|}. \tag{8.3.14}$$

这表明,高频成分已被滤去($\hat{\zeta}$的相关函数已不是 $\delta$ 函数型而是指数衰减型.前者的谱为白谱,后者的谱为洛伦兹型).

但对于在 $1/\gamma$ 范围变化小的缓变函数,$\mathrm{e}^{-\gamma|t-t'|}$近似等效于$\frac{2}{\gamma}\delta(t-t')$,其中$\frac{2}{\gamma}$代表曲线 $\mathrm{e}^{-\gamma|t-t'|}$下的面积.于是对于缓变函数,上述相关函数可近似表为

$$\langle\hat{\zeta}_{+}(t)\hat{\zeta}_{-}(t')\rangle_{R}=\frac{1}{\gamma^{2}}\hat{G}_{+-}(t)\delta(t-t'). \tag{8.3.15}$$

此式等价于

$$\hat{\zeta}_{-}(t)=\frac{1}{\gamma}\hat{\Gamma}_{-}(t). \tag{8.3.16}$$

这样,(8.3.11)式就等于原来的方程(8.3.1)的第二式在略去$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_{-}$后所导出的值.也就是浸渐近似的结果.由此可见,浸渐近似也就是随衡态近似,好似热力学中的准静态过程.

下面再就线性联立方程的情况(这种情况可以精确求解)对浸渐近似的结果与精确的结果进行具体比较,以考察浸渐近似应用的条件.设原方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{y}_{1}(t)&=-\gamma_{1}\hat{y}_{1}(t)-\mathrm{i}g_{1}\hat{y}_{2}(t)+\hat{F}_{1}(t),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{y}_{2}(t)&=-\gamma_{2}\hat{y}_{2}(t)+\mathrm{i}g_{2}\hat{y}_{1}(t)+\hat{F}_{2}(t),\end{aligned} \tag{8.3.17}$$

其中 $\hat{F}_{1}(t)$和 $\hat{F}_{2}(t)$为涨落力,$g_1$ 和 $g_2$ 为实数.设 $\gamma_2$ 较大,我们对(8.3.17)第二式作浸渐近似.这时化出 $\hat{y}_{1}(t)$的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{y}_{1}(t)=-\left(\gamma_{1}-\frac{g_{1}g_{2}}{\gamma_{2}}\right)\hat{y}_{1}(t)+\left[\hat{F}_{1}(t)-\frac{\mathrm{i}g_{2}}{\gamma_{2}}\hat{F}_{2}(t)\right]. \tag{8.3.18}$$

其解即为

$$\hat{y}_{1}(t)=\hat{y}_{1}(0)\mathrm{e}^{-\left(\gamma_{1}-\frac{g_{1}g_{2}}{\gamma_{2}}\right)t}+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\left(\gamma_{1}-\frac{g_{1}g_{2}}{\gamma_{2}}\right)(t-\tau)}\left[\hat{F}_{1}(\tau)-\frac{\mathrm{i}g_{2}}{\gamma_{2}}\hat{F}_{2}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{8.3.19}$$

我们来将上述浸渐近似的解与精确解进行比较.首先,从(8.3.17)第一式,将 $y_2$ 用 $y_1$ 及其

微商$\frac{d}{dt}y_1$表示出来

$$\hat{y}_2(t) = \frac{i}{g_1}\left(\frac{d}{dt}y_1 + \gamma_1 y_1 - F_1\right), \tag{8.3.20}$$

代入(8.3.17)第二式后即得出 $\hat{y}_1(t)$满足的二阶微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{y}_1(t) + (\gamma_1 + \gamma_2)\frac{d}{dt}\hat{y}_1(t) + (\gamma_1\gamma_2 - g_1 g_2)\hat{y}_1(t) = \frac{d\hat{F}_1(t)}{dt} + \gamma_2\hat{F}_1(t) - ig\hat{F}_2(t). \tag{8.3.21}$$

它的解可写成

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(t) = {} & \hat{c}_1 e^{-\alpha_1 t} + \hat{c}_2 e^{-\alpha_2 t} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^t [e^{-\alpha_1(t-\tau)} - e^{-\alpha_2(t-\tau)}](\hat{F}_1(\tau) - \frac{ig_2}{\gamma_2}\hat{F}_2(\tau))d\tau \\ & - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^t [\alpha_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} - \alpha_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)}]\hat{F}_1(\tau)d\tau,\end{aligned} \tag{8.3.22}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) - \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_1)^2 + g_1 g_2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_1)^2 + g_1 g_2},$$

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}[(\alpha_2 - \gamma_1)\hat{y}_1(0) - ig_1\hat{y}_2(0)], \hat{c}_2 = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}[(\alpha_1 - \gamma_1)\hat{y}_1(0) - ig_1\hat{y}_2(0)]. \tag{8.3.23}$$

在

$$\gamma_2 >> \gamma_1, \qquad \gamma_2^2 >> 4|g_1 g_2| \tag{8.3.24}$$

的条件下,(8.3.23)式中的 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 可近似成

$$\alpha_1 \approx \gamma_1 - \frac{g_1 g_2}{\gamma_2}, \qquad \alpha_2 \approx \gamma_2. \tag{8.3.25}$$

这时(8.3.22)式中的 $\hat{c}_2 e^{-\alpha_2 t}$ 为迅衰项,$\hat{c}_1 e^{-\alpha_1 t}$ 为缓衰项. 含积分的项为涨落力驱动的项. 在 $\hat{y}_1(t)$中出现迅衰项是由于两个方程互相耦合的结果,因由(8.3.23)和(8.3.24)式可化出 $\hat{c}_2 \approx \frac{g_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[\frac{g_2}{\gamma_2}\hat{y}_1(0) + i\hat{y}_2(0)\right]$,它与 $g_1$ 成正比. 此迅衰项的系数在(8.3.24)式的条件下又为一个小量,故可略去. 至于积分项中含 $e^{-\alpha_2(t-\tau)}$ 的项不仅实际积分域很小(由于被积函数很快衰减到零),而且系数值也是小量($\frac{\gamma_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{ig_2}{\gamma_2}$的绝对值很小, $-\frac{\gamma_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\hat{F}_1(\tau)$与$\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\hat{F}_1(\tau)$又互相抵消),故亦可略去. 另一项 $\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\alpha_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}\hat{F}_1(\tau)$,也因为系数小可以略去. 这样(8.3.22)式就化为浸渐近似的结果(8.3.19)式. 由此可见浸渐近似成立的条件是:不仅要 $\gamma_2$ 比 $\gamma_1$ 大得多,还要求 $\gamma_2^2$ 比两个耦合常数的乘积的四倍大得多[亦即(8.3.24)式].

如果上述分析能分别用到(8.3.1)第一和第二式之间以及第二和第三式之间,则浸渐近似的条件应即为

$$\gamma >> \frac{1}{2}\kappa, \qquad \gamma^2 >> 4|g|^2\Sigma_3,$$

和

$$\gamma >> \gamma_3, \qquad \gamma^2 >> 8|g|^2 n,$$

这意味着光子数 $n$ 和反转数 $\Sigma_3$ 均不能太大,粗略地说,原子数目不能太多.

## 3. 量子速率方程

利用浸渐近似式(8.3.11)从(8.3.1)第一式中消去 $\hat{\Sigma}_-$ 即得出①

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a} = -\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{|g|^2}{\gamma}\hat{\Sigma}_3\right)\hat{a} + \hat{F}_a, \tag{8.3.26a}$$

$$\hat{F}_a = \hat{F} - \frac{\mathrm{i}g^*}{\gamma}\hat{\Gamma}_- . \tag{8.3.26b}$$

再利用$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{n} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}^\dagger\right)\hat{a} + \hat{a}^\dagger\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}\right)$即可得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{n} = -\left(\kappa - \frac{2|g|^2}{\gamma}\hat{\Sigma}_3\right)\hat{n} + (\hat{F}_a^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{F}_a). \tag{8.3.27}$$

但上式中的$(\hat{F}_a^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{F}_a)$并不就是涨落力,因$\langle\hat{F}_a^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{F}_a\rangle_R \neq 0$(参见下文).

从(8.3.26a)式可得 $\hat{a}$ 的积分表示式

$$\hat{a}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)}\left[\frac{|g|^2}{\gamma}\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}(\tau) + \hat{F}_a(\tau)\right]\mathrm{d}\tau + \hat{a}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t}. \tag{8.3.28}$$

于是按(8.3.26b)式

$$\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{F}_a(t)\rangle = \langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle_R - \mathrm{i}\frac{g^*}{\gamma}\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{\Gamma}_-(t)\rangle_R. \tag{8.3.29}$$

我们可利用(8.3.28)式的共轭式来对上式右方进行计算,其中第一项等于[略去了含 $\hat{a}^\dagger(0)$的瞬态项]

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)}\left[\frac{|g|^2}{\gamma}\langle\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}^\dagger(\tau)\hat{F}(t)\rangle_R + \langle\hat{F}_a^\dagger(\tau)\hat{F}(t)_R\rangle\right]\mathrm{d}\tau.$$

由于 $\tau < t$ 的 $\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}^\dagger(\tau)$与 $\hat{F}(t)$不相关,而 $\hat{\Sigma}_3(t)\hat{a}^\dagger(t)$与 $\hat{F}(t)$的相关值是有限值,故上式第一项等于零.上式第二项

$$\langle\hat{F}_a^\dagger(\tau)\hat{F}(t)\rangle_R = \langle[\hat{F}^\dagger(\tau) + \frac{\mathrm{i}g}{\gamma}\hat{\Gamma}_+(\tau)]\hat{F}(t)\rangle_R = \langle\hat{F}^\dagger(\tau)\hat{F}(t)\rangle_R$$
$$= \kappa\bar{n}_T\delta(t-\tau).$$

这样就得出

$$\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle_R = \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_T. \tag{8.3.30}$$

再来看(8.3.29)式中第二项.同样,$\tau < t$ 时的 $\hat{\Sigma}_3(\tau)\hat{a}^\dagger(\tau)$与 $\hat{\Gamma}_-(t)$不相关,而 $\hat{\Sigma}_3(t)\hat{a}^\dagger(t)$与 $\hat{\Gamma}_-(t)$的相关值为有限值,因而有

$$-\mathrm{i}\frac{g^*}{\gamma}\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{\Gamma}_-(t)\rangle_R = -\mathrm{i}\frac{g^*}{\gamma}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)}\langle\hat{F}_a^\dagger(\tau)\hat{\Gamma}_-(t)\rangle_R\mathrm{d}\tau$$

---

① (8.3.26)式也称为 $\hat{a}$的速率方程.

$$= \frac{|g|^2}{2\gamma^2}\mathrm{N}\left(\gamma + \frac{1}{2}p\right) + \frac{|g|^2}{2\gamma^2}\left(\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3\right)\langle\hat{\Sigma}_3(t)\rangle_R . \tag{8.3.31}$$

最后来看(8.3.27)式中的$\langle\hat{F}_a^\dagger\hat{a}\rangle$项.利用(8.3.28)式同样可得出

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}_a^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle_R &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)}\langle\hat{F}_a^\dagger(t)\hat{F}_a(\tau)\rangle_R \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \left[\langle\hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(\tau)\rangle_R + \frac{|g|^2}{\gamma^2}\langle\hat{\Gamma}_+(t)\hat{\Gamma}_-(\tau)\rangle_R\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_T + \frac{|g|^2}{2\gamma^2}\mathrm{N}\left(\gamma + \frac{1}{2}p\right) + \frac{|g|^2}{2\gamma^2}\left(\gamma - \frac{1}{2}\gamma_3\right)\langle\hat{\Sigma}_3(t)\rangle_R\end{aligned} \tag{8.3.32}$$

从(8.2.43)式可以看出 $p$ 恒小于$\gamma_3$,故在

$$\gamma >> \frac{1}{2}\gamma_3 \tag{8.3.33}$$

条件下即化出

$$\langle\hat{F}_a^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}_a(t)\rangle_R = \kappa\bar{n}_T + \frac{2|g|^2}{\gamma}\langle\hat{N}_2\rangle_R , \tag{8.3.34}$$

其中 $\hat{N}_2 = \frac{1}{2}(N + \hat{\Sigma}_3)$.

以上讨论表明 $\hat{F}_a^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}_a(t)$在分出 $\kappa\bar{n}_T + \frac{2|g|^2}{\gamma}\hat{N}_2$ 以后剩下的才是涨落力 $\hat{F}_n$.将此结果代入(8.3.27)式即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{n} = -\kappa(\hat{n} - \bar{n}_T) + \frac{2|g|^2}{\gamma}(\hat{\Sigma}_3\hat{n} + \hat{N}_2) + \hat{F}_n . \tag{8.3.35}$$

此式就是光子数变化的量子速率方程.$\hat{F}_n$ 为涨落力,它可写成(参考§8.2第二小节)

$$\hat{F}_n(t) = \hat{a}^\dagger(t-\epsilon)\left[\hat{F}(t) - \frac{\mathrm{i}g^*}{\gamma}\hat{\Gamma}_-(t)\right] + \left[\hat{F}^\dagger(t) + \frac{\mathrm{i}g}{\gamma}\hat{\Gamma}_+(t)\right]\hat{a}(t-\epsilon), \tag{8.3.36}$$

此式右方也就是 $\hat{F}_a^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{F}_a - \kappa\bar{n}_T - \frac{2|g|^2}{\gamma}\hat{N}_2$.

(8.3.35)式右方的$\frac{2|g|^2}{\gamma}\hat{\Sigma}_3\hat{n}$代表净受激辐射项[参见(8.3.9a)式下],而 $\frac{2|g|^2}{\gamma}\hat{N}_2$ 代表自发辐射项.在光频区段,如(8.2.2)式下所述,$\bar{n}_T$ 可以略去不计.

值得提出的是,在§4.1 中求自发辐射率(即爱因斯坦 $A$ 系数)时,我们是在保持初态不变的条件下计算无穷长时间间隔的平均辐射率.在这里我们看到,当 $\gamma$ 很大,使浸渐近似成立时,$\frac{2|g|^2}{\gamma}$即为瞬时的自发辐射率(参见 p.354 的注①).

光子数的速率方程的优点是具有明显的物理意义,但是它不包含光场相位变化的信息,因此有时我们还需回到 $\hat{a}$ 的速率方程(8.3.26),例如在研究激光模光场的谱宽时(参见§8.6).

另外,通常的速率方程理论是用于广谱的辐射,但从以上讨论我们看到,当原子的辐射谱宽 $\gamma$ 很大的情况下,即使辐射到单模腔场,也可以得出速率方程.

下面再来考察原子反转算符 $\hat{\Sigma}_3$ 的方程.将 $\hat{\Sigma}_-$ 随着"$\hat{\Sigma}_3$ 和 $\hat{a}$"变化的公式(8.3.11)式及其共轭式代入(8.3.1)的第三式,并将 $\hat{\zeta}_\pm(t)$ 用 $\frac{1}{\gamma}\hat{\Gamma}_\pm(t)$ 代入,即可化出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_3(t) = Np - \left[\gamma_3 + \frac{4|g|^2}{\gamma}\hat{n}(t)\right]\hat{\Sigma}_3(t) + \hat{\Gamma}_3(t)$$
$$+ \frac{2\mathrm{i}}{\gamma}[g^*\hat{a}^\dagger(t)\hat{\Gamma}_-(t) - g\hat{\Gamma}_+(t)\hat{a}(t)]. \tag{8.3.37}$$

同样上式最后一项并非就是涨落力,因为它对库取平均时并不为零.

利用 $\hat{a}(t)$ 的积分表达式(8.3.28),仿照前面的论证可得

$$-\frac{2\mathrm{i}g}{\gamma}\langle\hat{\Gamma}_+(t)\hat{a}(t)\rangle_R = -\frac{2\mathrm{i}g}{\gamma}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)}\langle\hat{\Gamma}_+(t)\hat{F}_a(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau$$
$$= -\frac{2|g|^2}{\gamma^2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)}\langle\hat{\Gamma}_+(t)\hat{\Gamma}_-(\tau)\rangle_R\mathrm{d}\tau.$$

同样,在 $\gamma \gg p/2$ 和 $\gamma \gg \gamma_3/2$ 的条件下,可得出

$$-\frac{2\mathrm{i}g}{\gamma}\langle\hat{\Gamma}_+(t)\hat{a}(t)\rangle_R = -\frac{2|g|^2}{\gamma}\langle\hat{N}_2(t)\rangle_R. \tag{8.3.38a}$$

上式的厄米共轭亦为同样的值:

$$\frac{2\mathrm{i}g^*}{\gamma}\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{\Gamma}_-(t)\rangle_R = -\frac{2|g|^2}{\gamma}\langle\hat{N}_2(t)\rangle_R. \tag{8.3.38b}$$

将(8.3.38)式代回到(8.3.37)式中即化出原子反转数的量子速率方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\Sigma}_3(t) = \mathrm{N}p - \left[\gamma_3 + \frac{4|g|^2}{\gamma}\hat{n}(t)\right]\hat{\Sigma}_3(t) - \frac{4|g|^2}{\gamma}\hat{N}_2(t) + \hat{\Gamma}_{3c}(t), \tag{8.3.39}$$

其中 $\hat{\Gamma}_{3c}(t)$ 为涨落力,它可由下式表达:

$$\hat{\Gamma}_{3c}(t) = \hat{\Gamma}_3(t) + \frac{2\mathrm{i}}{\gamma}[g^*\hat{a}^\dagger(t)\hat{\Gamma}_-(t) - g\hat{\Gamma}_+(t)\hat{a}(t)] + \frac{4|g|^2}{\gamma}\hat{N}_2(t). \tag{8.3.40}$$

它也可写成 $\hat{\Gamma}_3(t) + \frac{2\mathrm{i}}{\gamma}[g^*\hat{a}^\dagger(t-\epsilon)\hat{\Gamma}_-(t) - g\hat{\Gamma}_+(t)\hat{a}(t-\epsilon)]$,从而表明

$\langle \hat{\Gamma}_{3c}(t) \rangle_R = 0.$

(8.3.39)式就是原子反转数变化的量子速率方程,其右方第一项和第二项内前项意义明显,第二项内后项与第三项分别为受激辐射和自发辐射的贡献,与(8.3.35)式中的项相比,除符号相反外,数值上还大了一倍.这是因为辐射不仅使 $N_2$ 值减少还使 $N_1$ 值增加,从而使 $N_2 - N_1$ 的数值改变翻了一倍.

## §8.4 激光的半经典理论 光子数的饱和、阈值和稳恒态

上节中得出的量子速率方程仍然是非线性的联立算符方程,对它们求解仍是不易.本节的半经典理论是,保持"光子和原子能级"的量子概念,但把光子数和原子布 居反转数等当作 $c$ 数来处理.并略去方程中的涨落力项.如果光子数和原子反转数的涨落为一级小量.则这样求出的结果就等于略去二级小量后的算符期望值(一级小量取期望值后为零.并参见(8.4.1)式下的说明).

我们将阐明光子数饱和的概念并显示激光的生成相当于发生了(非平衡态的)二级相变.本节还将给出阈值(对应于相变点)、状态的稳恒值和它的演化.

### 1. 光子数的饱和状态的二级相变

在作了半经典近似后,得出的 $c$ 数速率方程为(在光频段,$\bar{n}_T$ 数值太小,可以略去):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n &= -\kappa n + \frac{2\,|\,g\,|^2}{\gamma}(\Sigma_3 n + N_2), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma_3 &= \mathrm{N}p - \gamma_3 \Sigma_3 + \frac{4\,|\,g\,|^2}{\gamma}(\Sigma_3 n + N_2), \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

其中 $N_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{N} + \Sigma_3)$,因而上述方程中只有两个独立变量 $n$ 和 $\Sigma_3$.(8.4.1)式也相当于对量子速率方程取期望值,并把 $\langle \hat{\Sigma}_3 \hat{n} \rangle$ 近似成 $\langle \hat{\Sigma}_3 \rangle \langle \hat{n} \rangle$ 亦即略去二级小量 $\langle \Delta\hat{\Sigma}_3 \Delta\hat{n} \rangle$ 后的结果.

从上式可以看出,自发辐射项具有启动激光过程的作用.如果没有自发辐射项,则从(8.4.1)第一式即得出 $n$ 将永远保持为零(在初始时 $n=0$ 的情况下),$\Sigma_3$ 则在达到 $\Sigma_3^{(R)} = \frac{\mathrm{N}p}{\gamma_3}$ 时就保持不变.另外,自发辐射对阈以下的光场亦非常重要.但在阈以上稍远处,它的作用除了上述启动光子增长以外就不大了,通常可将它略去①.

---

① 对于阈值以下,考虑自发辐射后的结果见(8.4.18)式以下的讨论.

下面我们来看略去自发辐射项后的(8.4.1)式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n = -\left(\kappa - \frac{2|g|^2}{\gamma}\Sigma_3\right)n,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma_3 = \mathrm{N}p - \left(\gamma_3 + \frac{4|g|^2}{\gamma}n\right)\Sigma_3. \tag{8.4.2}$$

并设“$t=0$ 时，$n$ 不严格为零”，以替代自发辐射的效果(启动作用).

从(8.4.2)第一式我们看到，当 $\Sigma_3 > \frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 时，光子数 $n$ 将增加，而当光子增大到一定限度时，由(8.4.2)第二式又可看到原子反转数将减少. 通过这种负反馈作用，$n$ 不会无限制地增长下去，而是趋于有限的稳恒值 $n_s$(详情参见下文). 这就是光子数饱和的机制.

为了更清楚地显示 $n$ 增加时 $\Sigma_3$ 的变化，我们来看 $\gamma_3$ 也足够地大使(8.4.2)第二式也可以做浸渐近似的情况. 此近似成立的具体条件是

$$\gamma_3 \gg \kappa, \qquad \gamma_3^2 \gg \frac{8|g|^4}{\gamma^2}n\Sigma_3. \tag{8.4.3}$$

上述条件也常能满足. 作浸渐近似的结果，$\Sigma_3(t)$将随着 $n(t)$而变化：

$$\Sigma_3(t) = \frac{\Sigma_3^{(R)}}{1+n(t)/n_{\mathrm{sat}}}, \tag{8.4.4}$$

其中

$$\Sigma_3^{(R)} = \frac{Np}{\gamma_3}, \qquad n_{\mathrm{sat}} = \frac{\gamma\gamma_3}{4|g|^2}. \tag{8.4.5}$$

(8.4.4)式表明，当 $n(t)\approx 0$(即初始时)，$\Sigma_3(t)$最大并等于 $\Sigma_3^{(R)}$. $\Sigma_3^{(R)}$ 代表通过库的作用(即通过抽运和弛豫，没有原子-光场耦合)所生成的原子反转. 在激光文献中常称为未饱和的反转数. 随着腔场光子数的增长，由于净受激辐射率随之增大，$\Sigma_3$ 将减少. 当 $n$ 增大到使 $\Sigma_3$ 等于 $\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 时，从(8.4.2)第一式就可看出 $n$ 即停止增长. 这时的光子数即为稳恒时的 $n_s$. 从 $\Sigma_3 = \frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 和(8.4.4)式即得出(在 $\frac{\mathrm{N}p}{\gamma_3} \geqslant \frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 条件下，否则 $n_s=0$)

$$n_s = \frac{\gamma_3}{2\kappa}\left(\frac{\mathrm{N}p}{\gamma_3} - \frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}\right). \tag{8.4.6}$$

(8.4.4)式中的 $n_{\mathrm{sat}}$ 是标志饱和效应的一个常数(因当 $n(t) \ll n_{\mathrm{sat}}$ 时，$\Sigma_3(t)$ 维持在 $\Sigma_3^{(R)}$ 附近)，通常称为光子饱和参数. 它与原子总数 N 以及抽运率 $p$ 都无

关.对于氦氖激光器,$n_{sat}\approx 10^8$(这里只是给出 $n_{sat}$ 量级的概念,并不是说本节的简单理论就完全适用于氦氖激光器).至于 $n_s$ 的值,则与 $N$ 和 $p$ 有关.在通常的工作情况,$n_s$ 要比 $n_{sat}$ 小得甚多.

(8.4.6)式又可表示为

$$n_s = n_{sat}(\eta - 1), \tag{8.4.7}$$

其中

$$\eta = \frac{2Np\,|g|^2}{\kappa\gamma\gamma_3} \equiv \frac{p}{p^{(th)}}, \qquad p^{(th)} \equiv \frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2N\,|g|^2}. \tag{8.4.8}$$

$\eta$ 称为抽运参数,$p^{(th)}$ 代表 $p$(产生激光)的阈值.以氦氖激光器的 $n_s$ 来计算,只要 $\eta=1.1$,$n_s$ 就将达到 $10^7$,比阈值处的光子数就要大三个量级.

在 $\Sigma_-$ 和 $\Sigma_3$ 都作了浸渐近似后,剩下的就是 $a$ 的运动方程(8.3.4)式.下面仍暂采用§8.3中布朗粒子的图象.图8.3.1和8.3.2曾给出 $\Sigma_3$ 保持不变情况下布朗粒子的等效势函数.在那里没有考虑饱和效应的作用,换句话说,只适用于 $a^2 \ll n_{sat}$ 的情况[参见(8.4.4)式,其中 $n$ 对应成 $a^2$].在考虑饱和效应后应该用(8.4.4)式代入(8.3.4)式第三项中,这样即得出布朗粒子的常规力为

$$f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{|g|^2 \Sigma_3^{(R)} n_{sat}}{n_{sat} + a^2} - \frac{1}{2}\kappa\gamma\right)\boldsymbol{a} = \left(\frac{N\,|g|^2 p\gamma}{\gamma\gamma_3 + 4\,|g|^2 a^2} - \frac{1}{2}\kappa\gamma\right)\boldsymbol{a}, \tag{8.4.9}$$

其中 $a$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的数值.代回(8.3.4)式即可看见,该式已成为 $\boldsymbol{a}$ 的非线性方程.

此常规力可表示为下述势 $V(a)$ 的负梯度,

$$V(a) = \frac{1}{4}\kappa\gamma\left[a^2 - \frac{\gamma_3}{2\kappa}\Sigma_3^{(R)}\ln\left(1 + \frac{2\kappa}{\gamma_3}\frac{1}{\Sigma_3^{(th)}}a^2\right)\right], \tag{8.4.10}$$

上式中 $\Sigma_3^{(th)}$ 由(8.3.9)式所示.在原点附近即 $a^2 \ll \frac{\gamma_3}{2\kappa}\Sigma_3^{(th)}$ 时,$V(a)$ 可近似表为

$$V(a) \approx \frac{1}{4}(\kappa\gamma - 2\,|g|^2\Sigma_3^{(R)})a^2 \tag{8.4.11a}$$

(8.4.11a)式右方与(8.3.5)式右方相同.而对于远矩离(即 $a$ 大时),不论 $\Sigma_3^{(R)}$ 的大小如何,(8.4.10)式右方方括号中的第二项与第一项相比都可略去,于是

$$V(a) \approx \frac{1}{4}\kappa\gamma a^2. \tag{8.4.11b}$$

图8.4.1画出了 $\Sigma_3^{(R)} \leqslant \frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 亦即 $p \leqslant \frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2N|g|^2}$ 两种情况下的势函数.曲线Ⅰ与图8.3.1相比,定性上无改变,但曲线Ⅱ与图8.3.2相比就发生了质的变化,曲

线Ⅱ在经过了一段距离的下降后，变得向上翘起，形一个环形低谷(横轴 $a$ 实际代表二维的轴)，从而使得模拟的布朗振子在阻尼力和涨落力的作用下在谷的附近作无规的涨落运动.这就对应于激光情况下光子数的饱和涨落.

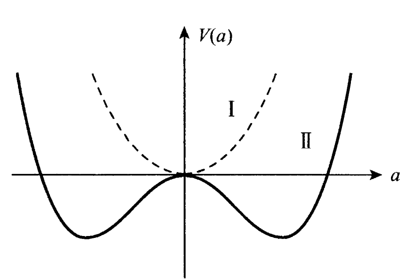



图 8.4.1　模拟振子的势函数

曲线Ⅰ为 $\Sigma_3^{(R)}<\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 即 $p<\frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2N|g|^2}$ 情况

曲线Ⅱ为 $\Sigma_3^{(R)}>\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 即 $p>\frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2N|g|^2}$ 情况

从以上讨论我们看到，$\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 仍具有临界值的意义(故仍用 $\Sigma_3^{(\mathrm{th})}$ 表示)：当 $\Sigma_3^{(R)}$ 从零变到 $\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 亦即 $p$ 从零变到 $\frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2N|g|^2}$ 时，势函数的极小值始终位于原点，而当 $\Sigma_3^{(R)}$ 超过 $\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 时，极小值移到了

$$|a_s| = \left[\frac{\gamma_3}{2\kappa}(\Sigma_3^{(R)} - \Sigma_3^{(\mathrm{th})})\right]^{1/2} = \left[\frac{N}{2\kappa}(p - p^{(\mathrm{th})})\right]^{1/2}, \tag{8.4.12}$$

其中脚标 $s$ 代表稳恒值.(8.4.12)式可通过对 $V(a)$ 的微商来导出.

下面我们回到激光的语言.(8.4.12)式表明，在阈以上当抽运 $p$ 增大时，$a_s$ 随着增大.总起来稳恒(未考虑涨落)光子数 $n^{(s)}$(亦即 $a_s^2$)为

$$n^{(s)} = \begin{cases} 0,\text{当 } p < p^{(\mathrm{th})} \text{ 时}, \\ \frac{\gamma_3}{2\kappa}(\Sigma_3^{(R)} - \Sigma_3^{(\mathrm{th})}) = \frac{N}{2\kappa}(p - p^{(\mathrm{th})}) \equiv n_s,\text{当 } p > p^{(\mathrm{th})} \text{ 时}. \end{cases} \tag{8.4.13}$$

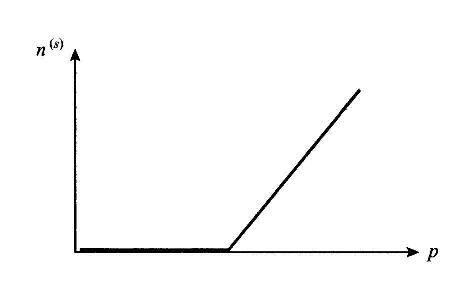



图 8.4.2　稳恒光子数 $n^{(s)}$ 随抽运率 $p$ 的变化

我们看到 $n^{(s)}$ 随 $p$ 的变化如图 8.4.2 所示，在 $p = p^{(\mathrm{th})}$ 处有一个转折点①，这也就是我们把 $\frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2N|g|^2}$ 称作 $p$ 的阈值(以及把 $\frac{\kappa\gamma}{2|g|^2}$ 称作 $\Sigma_3$ 的阈值)的原因.这表明只有足够强的抽运以产生足够大的原子反转才能产生激光.

在阈以上，$n^{(s)}$ 与原子总数 N 以及($p - p^{(\mathrm{th})}$)成正比，与 $\kappa$ 成反比.(8.4.13)第二式

---

① 这是略去了自发辐射的结果，否则在 $p^{(\mathrm{th})}$ 以下光子数不完全为零.转折也有一定的圆滑度.

也就是(8.4.6)或(8.4.7)式.以上讨论使我们对(8.4.6)式有更进一步的了解.

值得指出的是,图 8.4.2 中的曲线类似于二级相变中"序参量"随状态参量的变化曲线.图 8.4.1 中的势函数也与朗道二级相变理论中的自由能变化曲线相仿.正是这一原因,激光的生成也被称为非平衡态的二级相变.阈值就是相变点.

从(8.4.8)式我们看到三个阻尼常数 $\kappa,\gamma,\gamma_3$ 愈大,抽运阈值 $p^{(\text{th})}$ 就愈高;而原子总数 $N$ 和耦合常数 $|g|$ 愈大,阈值 $p^{(\text{th})}$ 就愈低.这些结果从物理上看都是合理的.另外,由于 $|g|^2$ 中含有因子 $\frac{1}{V}$,故 $p^{(\text{th})}$ 实际与原子密度 $\mathrm{N}/V$ 成反比.

当腔场频率 $\omega$ 与原子跃迁频率 $\omega_0$ 失谐时,阈值还要增高一个失谐因子 $\frac{1}{\gamma^2}[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2]/\gamma^2$.当失谐达到 $\gamma$ 的量级时,阈值将明显增加.

下面来看原子物理量的稳恒值.

反转数的稳恒值 $\Sigma_3^{(S)}$ 可通过将(8.4.13)式代入(8.4.4)式求出.结果为

$$\Sigma_3^{(S)}=\begin{cases}\dfrac{Np}{\gamma_3}\equiv\Sigma_3^{(R)}, & p<p^{(\text{th})},\\[2ex] \dfrac{\kappa\gamma}{2\,|\,g\,|^2}\equiv\Sigma^{(\text{th})}, & p>p^{(\text{th})}.\end{cases}\tag{8.4.14}$$

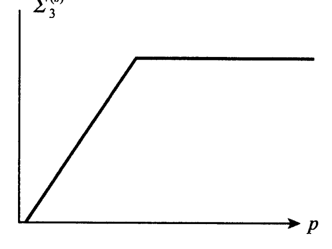



图 8.4.3　稳恒时原子布居数差 $\Sigma_3^{(s)}$ 随抽运率 $p$ 的变化

它随 $p$ 的变化如图 8.4.3 所示.后一结果也可从(8.4.2)第一式直接得出.

我们看到,情况与图 8.4.2 的曲线相反,在阈值以下,$\Sigma_3^{(S)}$ 随 $p$ 直线上升,在到达阈值后即转折成水平直线.这是因为在阈以上 $n_s/n_{\text{sat}}=\eta-1$[见(8.4.7)式],从而(8.4.4)右方化为 $\frac{1}{\eta}\hat{\Sigma}_3^{(R)}=\frac{\mathrm{N}p^{(\text{th})}}{\gamma_3}$,即 $\hat{\Sigma}_3^{(R)}$ 中的 $p$ 已由常数 $\eta p^{(\text{th})}$ 代替.

原子的另一个物理量 $\Sigma_-$ 的情况有所不同.按照(8.3.10)式,在 $c$ 数化以后即得

$$\Sigma_-^{(S)}=\frac{\mathrm{i}}{\gamma}g\hat{\Sigma}_3^{(s)}a_s.\tag{8.4.15}$$

$a_s$ 的绝对值是确定的(见(8.4.12)式)但它的相位并不确定.为从物理上说明这一点,我们回到模拟的布朗振子的位势 $V$.设振子的坐标 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2$,其中 $\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$ 为平面中两个基矢.则 $V$ 可表为 $a_1$ 和 $a_2$ 的函数.$V(a_1,a_2)$ 的立体图形即为图 8.4.1 中的曲线绕纵轴旋转 $2\pi$ 的结果.在阈以上,$V(a_1,a_2)$ 立体图中出现的是一个环形的谷.振子的径向运动受到"谷壁"的限制,只能在谷底附近作涨落性运动,但它的"周向运动"则没有受到限制,在涨落力作用下,它可以沿周向漂移.对应

到腔模 $a$,就是它的相位在不断漂移.我们可把 $a^{(s)}$ 表示成①

$$a^{(s)}=\begin{cases}0, & \text{当 } p<p^{(\text{th})} \text{ 时},\\ [n_{\text{sat}}(\eta-1)]^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\equiv a_s, & \text{当 } p>p^{(\text{th})} \text{ 时},\end{cases}\tag{8.4.16}$$

其中 $\phi$ 即为在 0 到 $2\pi$ 范围内漂移的、数值不确定相位.

相应地,$\Sigma_-^{(s)}$ 可表示为

$$\Sigma_-^{(s)}=\begin{cases}0, & \text{当 } p<p^{(\text{th})} \text{ 时},\\ \dfrac{\mathrm{i}g\kappa}{2\ |g|^2}\sqrt{n_{\text{sat}}(\eta-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, & \text{当 } p>p^{(\text{th})} \text{ 时}.\end{cases}\tag{8.4.17}$$

在阈值以上"$a^{(s)}$ 和 $\Sigma_-^{(s)}$"的绝对值与 $p$ 的关系都是由因子$\sqrt{p-p^{(\text{th})}}$表示,因为$\sqrt{n_{\text{sat}}(\eta-1)}$正比于$\sqrt{p-p^{(\text{th})}}$.

在第五章和第六章中我们曾看到振幅为确定值的(不是按某种概率分布的)经典光场与量子光场中的相干态有某种对应关系.按此,(8.4.16)第二式中 $a_s$ 将对应于激光中的相干成分.该式的结果表明,在阈以下,光场的相干成分为零,而在阈值以上其相干成分为"相位不确定"的非零值.

在以上计算中我们略去了自发辐射和涨落力.当计入它们以后,稳恒光子数将有一个分布,犹如等效振子在势 $V$ 的极小点附近有涨落着的位移一样.该分布如图 8.4.4 所示.数值结果见§8.7 中的讨论.

最后我们来看一下,在这个简单的激光模型中,稳恒时原子集合的物理量 $\Sigma_3^{(s)}$ 和 $\Sigma_\pm^{(s)}$ 与原子总数 $N$ 的关系.从(8.4.14)式我们看到在阈以下,$\Sigma_3^{(s)}$ 与 $N$ 成正比,但达到阈值以后,其值完全由阻尼常数和耦合常数决定,与 $N$ 无关.阻尼常数 $\kappa$ 和 $\gamma$ 愈大,反转数愈大,而耦合常数愈大,反转数将愈小.

$\Sigma_\pm^{(s)}$ 正比于原子集合的极化②.(8.4.17)式表明:在阈以下,原子集合的极化为零,在阈以上,总极化的相干成分正比于$\sqrt{N-\dfrac{\kappa\gamma\gamma_3}{2p|g|^2}}$.我们看到即使在 $p\gg p^{(\text{th})}$ 即 $N\gg\dfrac{\kappa\gamma\gamma_3}{2p|g|^2}$情况下,它也只是与$\sqrt{N}$成正比而不是与 $N$ 成比[顺带提醒,$\Sigma_\pm^{(s)}$ 的大小并不由原子的反转数完全决定,它还与光场 $a_s$ 及参数 $g$,$\gamma$ 有关,参见(8.4.15)式.这一情况与经典物理学中介质的极化值与电场成正比相类似].

在本小节的最后,我们来给出在计入自发辐射后,阈以下的光子数.当我们从

---

① 同样是在忽略自发辐射的条件下.

② 原子集合的极化算符为 $\boldsymbol{P}\Sigma_\pm^{(s)}$,其中 $\boldsymbol{P}=\int \boldsymbol{p}(x)\mathrm{d}^3x$.关于单个原子的极化算符参见(6.1.9)式的注.

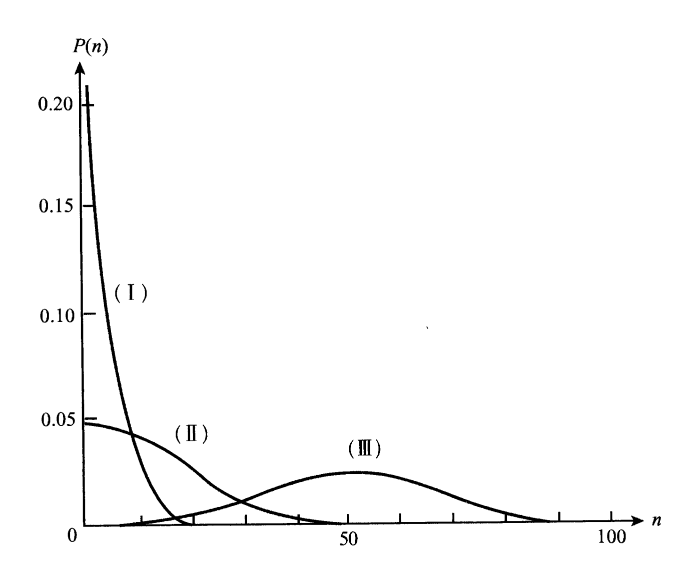



图 8.4.4 在考虑了自发辐射和涨落力作用后，稳恒时光子数的分布

(Ⅰ)阈 20%以下,(Ⅱ)阈值处.(Ⅲ)阈 20%以上

(8.4.1)式浸渐地消去 $\Sigma_3$ 后,得出光子数 $n$ 的变化方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n = -\kappa n + \frac{2\kappa n_{\text{spon}}^{(H)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p}{\gamma_3}-\frac{1}{2n_{\text{sat}}}\right)}{1+\frac{1}{n_{\text{sat}}}\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \kappa n_{\text{spon}}^{(H)}, \tag{8.4.18}$$

其中

$$n_{\text{spon}}^{(H)} = \frac{|g|^2}{\kappa\gamma}N, \tag{8.4.19}$$

代表 $N/2$ 个(总数一半)处在上能级的原子在腔的衰期 $1/\kappa$ 时间内所自发辐射的光子(即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n = -\kappa n + \frac{|g|^2}{\gamma}N$ 的稳恒解).在阈以下,$n/n_{\text{sat}} \ll 1$(对氦氖激光的例子,在阈值处,$n/n_{\text{sat}} \approx 10^{-4}$),因而(8.4.18)式右方第二项的分母可取为 1.这样该方程即化为线性方程.在略去相对量级为 $1/n_{\text{sat}}$ 的小量以后,即得出阈以下稳恒时的光子数为

$$n^{(s)} = \frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{1-\eta+n_{\text{spon}}^{(H)}/n_{\text{sat}}}. \tag{8.4.20}$$

下面进一步考虑分母中 $n_{\text{spon}}^{(H)}/n_{\text{sat}}$ 的略去问题.通常把**阈区的范围**定义为 $|\eta-1| < 2\sqrt{n_{\text{spon}}^{(H)}/n_{\text{sat}}}$,而按(8.4.8)式,$n_{\text{spon}}^{(H)}$ 也可表示为

$$n_{\text{spon}}^{(H)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\gamma^3}\right)_{\eta=1}^{-1} = \frac{1}{2}\frac{\gamma_3}{p^{(\text{th})}}. \tag{8.4.21}$$

其量级为1.当 $n_{\text{sat}}\approx10^8$ 时,在阈区以下,$1-\eta>2\times10^{-4}$,因此(8.4.20)式分母中的$\frac{n_{\text{spon}}^{(H)}}{n_{\text{sat}}}$(其值$\approx10^{-8}$)与$(1-\eta)$相比可以略去.这样就得出在阈区以下

$$n^{(s)} = \frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{1-\eta}. \tag{8.4.22}$$

我们来说明这一结果的物理意义.(8.4.22)式分子 $n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2$ 实际上代表阈以下情况"上能级的原子"在$\frac{1}{\kappa}$(它代表光子在腔内停留的时间)时段内所自发辐射的光子数,因为这时 $\Sigma_3 = N\frac{p}{\gamma_3} = \frac{1}{2}N\frac{\eta}{n_{\text{spon}}^{(H)}}$,相应地,上能级原子数 $N_2 = \frac{1}{2}(N+\Sigma_3) = \frac{1}{2}N\left(1+\frac{\eta}{2n_{\text{spon}}^{(H)}}\right)$.它们在 $1/\kappa$ 时间内自发辐射的光子数即为$\frac{2|g|^2}{\kappa\gamma}N_2 = n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2$.这表明即使在阈以下,自发辐射的光子也获得了受激放大①.放大倍数即为$1/(\eta-1)$.需要强调的是,自发辐射的受激放大与激光的生成是两个不同的概念.前者的光场中无相干成分,后者却有,从前者到后者要经历一个(非平衡态的)相变.

从(8.4.18)式也可以计算在阈值处的 $n^{(s)}$.令$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=0$,$p^{(\text{th})} = \frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2\text{N}|g|^2}$,即可求出其值为

$$n^{(s)} = \sqrt{n_{\text{sat}}\left(n_{\text{spon}}^{(H)} + \frac{1}{2}\right)}. \tag{8.4.23}$$

由此可得在阈值处 $n^{(s)}\approx10^4$.更准确的计算结果为上式的$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$($\approx0.8$)倍.出现误差的原因在于:为导出(8.4.1)式所作的近似(见该式下的说明),在阈值处由于大项相消已不是好的近似.

## 2. 光子数和原子反转数的演化

我们回到阈以上的情况,并先来研究光子数 $n(t)$的演化.将(8.4.4)式代入(8.4.2)式第一式以浸渐消去 $\Sigma_3$ 后得出

---

① 因为若无受激辐射的贡献.则稳恒时应有 $\gamma \dot{n}^{(s)} = \frac{2|g|^2}{\gamma}N_2$,于是 $n^{(s)}$ 将等于$\frac{2|g|^2}{\kappa\gamma}N_2 = n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n=-\left(\kappa-\frac{1}{2}\frac{Np}{n+n_{\mathrm{sat}}}\right)n. \tag{8.4.24}$$

此方程可化成(利用表 8.4.1 诸式)

$$\frac{n+n_{\mathrm{sat}}}{\kappa n(n_s-n)}\mathrm{d}n=\mathrm{d}t, \tag{8.4.25}$$

上式左边系数可改写成两项 $f_1/n+f_2/(n_s-n)$,其中

$$f_1=\frac{1}{\kappa(\eta-1)},\qquad f_2=\eta f_1.$$

于是方程(8.4.25)即可积出,结果可表示为

$$\frac{n(t)}{[n_s-n(t)]^{\eta}}=A\mathrm{e}^{\kappa(\eta-1)t}, \tag{8.4.26}$$

其中 $A$ 为积分常数,可由初值 $n(0)$定出.

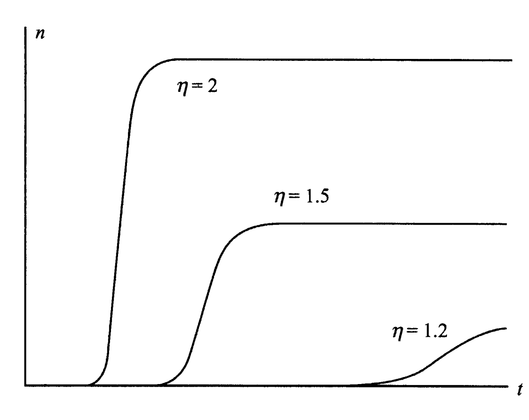



图 8.4.5　阈以上光子数随时间的演化

当 $\eta>1$ 时,(8.4.26)式右方随 $t\to\infty$而趋于∞,由此得出 $n(\infty)=n_s$,而当$\eta<1$时,右方随 $t\to\infty$而趋于零,从而 $n(t)\to 0$. 这些结果与前一致.

对于每个时刻 $t$,从(8.4.26)式可以解出 $n(t)$的值,图 8.4.5 给出几个不同 $\eta$ 值的结果. 值得提醒的是,初值 $n(0)$须取为一个小数,不能为零. 否则定出的 $A$ 亦将为零. 这样无论是 $\eta<0$ 还是 $\eta>1$, $n(t)$都恒为零. 对于 $\eta<1$ 的情况,这个结果没有问题. 对于 $\eta>1$ 的情况,得出这一结果的原因可以从图 8.4.1 看出:原点是等效势函数的亚稳点,若模拟振子初始时准确地位于原点,涨落力又已略去,那么振子就将永远地停留原点上. 如把初值 $n(0)$取为一个非零小数,即可避开这个亚稳点.

将以上求出的 $n(t)$代入(8.4.4)式中还可求出反转数 $\Sigma_3$ 随时间的演化.

最后,我们把上节和本节中引入的一些参数(主要是本节)如表 8.4.1,以便于下文查阈.

**表 8.4.1**

| $\Sigma_3^{(\mathrm{th})}$(8.3.9) | $\Sigma_3^{(R)}$(8.4.5) | $n_{\mathrm{sat}}$(8.4.5) | $n_s$(8.4.7) | $\eta$(8.4.8) | $p^{(\mathrm{th})}$(8.4.8) | $n_{\mathrm{spon}}^{(H)}$(8.4.19) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{\kappa\gamma}{2\lvert g\rvert^2}$ | $\dfrac{\mathrm{N}p}{\gamma_3}$ | $\dfrac{\gamma\gamma_3}{4\lvert g\rvert^2}$ | $n_{\mathrm{sat}}(\eta-1)$ | $\dfrac{2\mathrm{N}p\lvert g\rvert^2}{\kappa\gamma\gamma_3}$ | $\dfrac{\kappa\gamma\gamma_3}{2\mathrm{N}\lvert g\rvert^2}$ | $\dfrac{\mathrm{N}\lvert g\rvert^2}{\kappa\gamma}$ |

# §8.5　激光稳恒态的涨落　功率谱与威纳-亨钦定理

在本节中我们将在涨落为一级小量条件下推导稳恒激光的涨落方程,因此只适用于阈值以上较远处.另外还将介绍涨落的功率谱以及将功率谱与相关函数联系起来的威纳-亨钦定理.在这些讨论中,$\hat{a}$,$\hat{n}$,$\hat{\Sigma}_3$ 和 $\hat{\Sigma}_{\pm}$ 都将恢复其算符的原貌,因为有关涨落问题需用全量子理论来处理.

从物理本质上说,激光与混杂光场的差别并不在于前者的单色性好,方向性好,亮度大等.因为原则上也存在单模混杂光场,它具有单一的频率和确定的方向.亮度也不存在原则上的限制.

前已指出,激光与混杂光的差别在于:远离阈以上的激光接近于(辐角漂移的)相干光.相干光束具有确定的强度,其中的光子数是按泊松公式分布的,涨落小(光的强度愈大,相对涨落愈小),其噪音相应于散粒噪音(见下节);而混杂光束的强度不稳定,其中光子是成团出现的,并且稀稀拉拉,其光子数的方差比其平均光子数还大.这才是激光与混杂光的本质差异.

## 1. 场算符的平移变换,光场的噪音算符

作为准备,在第一小节中先来讨论光场吸收算符 $\hat{a}$ 的平移并定义光场的噪音算符.我们总可将 $\hat{a}$ 表示为

$$\hat{a} = \alpha + \hat{b}, \tag{8.5.1}$$

(例如就令 $\hat{b} = \hat{a} - \alpha$),其中 $\alpha$ 为任一复数.算符 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$ 之间的变换称为平移变换,它也属于幺正变换.利用§5.2 和§7.5 中所定义的平移算符

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^{\dagger} - \alpha^{*} \hat{a}} \tag{8.5.2}$$

可将 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^{\dagger}$ 表示成[参见(5.6.28)或(7.5.19)式]

$$\hat{b} = \hat{D}(\alpha)\hat{a}\,\hat{D}^{\dagger}(\alpha), \qquad \hat{b}^{\dagger} = \hat{D}(\alpha)\hat{a}^{\dagger}\hat{D}^{\dagger}(\alpha). \tag{8.5.3}$$

由于幺正变换不改变算符间的对易关系,故算符 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^{\dagger}$ 仍满足

$$[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}] = 1, \qquad [\hat{b},\hat{b}] = [\hat{b}^{\dagger},\hat{b}^{\dagger}] = 0. \tag{8.5.4}$$

这使得 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^{\dagger}$ 也具有吸收和发射算符的性质.

如果令(8.5.1)中的 $\alpha$ 等于 $\langle\hat{a}\rangle$,则相应的 $\hat{b}$ 就代表该状态 $|\rangle$ 中 $\hat{a}$ 的涨落算符,因 $\langle\hat{b}\rangle=0$.若在该态中 $\hat{b}$ 不仅期望值为零,而且满足

$$\hat{b}\,|\rangle = 0, \tag{8.5.5}$$

则有

$$\hat{a}\,|\rangle = \alpha\,|\rangle, \tag{8.5.6}$$

即该态为本征值等于 $\alpha$ 的相干态.

我们来看一个简单的例子:单模场与经典源作用的结果.相应的 $\hat{H}_{\text{int}}$形如

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = L^*(t)\hat{a} + L(t)\hat{a}^\dagger. \tag{8.5.7}$$

在海森伯图象中,$\hat{a}$的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a} = -\mathrm{i}\omega\hat{a} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}L(t). \tag{8.5.8}$$

它的解为

$$\hat{a}(t) = \alpha(t) + \hat{b}(t). \tag{8.5.9}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t L(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}t, \\ \hat{b}(t) &= \hat{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \end{aligned} \tag{8.5.10}$$

在光场完全是由该经典源 $L(t')$所产生的情况下,初始时刻光场状态为真空.在海森伯图象中,这就意味着

$$\hat{a}(0)\,|\rangle = 0.$$

于是由(8.5.10)第二式,$\hat{b}(t)|\rangle = 0$.按(8.5.6)式,$|\rangle$即为任意时刻 $\hat{a}(t)$的相干态本征值等于 $\alpha(t)$.以上讨论实为§5.6的一个特例(光场只有一个模),只是这里是在海森伯图象中处理的.

在阈以上较远处,涨落为一阶小量,上节中的 $a_s$ 即为稳恒时 $\hat{a}$ 的期望值(略去了二阶小量),于是若令

$$\hat{a}_s(t) = a_s + \hat{b}(t) \tag{8.5.11}$$

则 $\hat{b}(t)$就代表稳恒时阈以上光场的涨落算符,也就是表示光场噪音的算符.

**2. 稳恒时的涨落方程**

较方便的做法是把阈以上 $\hat{a}_s(t)$的涨落也分解为幅模涨落和相位涨落两个方面.在我们所研究激光场中,光子数是一个大值因而可将 $\hat{a}_s(t)$表示为

$$\hat{a}_s(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi + \mathrm{i}\hat{\theta}(t)}[\sqrt{n_s} + \hat{\rho}(t)], \tag{8.5.12a}$$

其中$\sqrt{n_s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$代表(8.5.11)式中的 $a_s$. $\hat{\theta}(t)$和 $\hat{\rho}(t)$分别为位相和幅模的涨落算符.在小涨落情况下①,上式可展开为

---

① $\hat{\rho}$并非无穷小量.这里只是说$\langle\hat{\rho}^2\rangle \ll n_s$.实际上$\langle\hat{\rho}^2\rangle$量级≈1.另外,由于相位的漂移率比 $\omega_0$ 小得多[参见(8.6.31)式],故在多个光场振动周期内,$\hat{\theta}$都可作为小量.

$$\hat{a}_s(t) = \sqrt{n_s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}[\hat{\rho}(t) + \mathrm{i}\sqrt{n_s}\hat{\theta}(t)]. \tag{8.5.12b}$$

要指出的是，并非在所有的计算中都只需像上式那样，只保留到一阶小量．例如用(8.5.12)式求光子数的方差时，在 $\hat{n}$ 中就必须保留到 $\hat{\rho}$ 的平方项．否则由于 $\langle\hat{\rho}\rangle=0$，得出的方差 $\Delta n$ 将不正确．

下面来求 $\hat{\rho}(t)$ 和 $\hat{\theta}(t)$ 所满足的方程．为此先把稳恒时的 $\hat{\Sigma}_3$ 写成

$$\hat{\Sigma}_3(t) = \frac{\kappa\gamma}{2|g|^2} + \hat{s}_3(t), \tag{8.5.13}$$

其中 $\hat{s}_3(t)$ 代表涨落项．然后将它和(8.5.12b)式代入(8.3.26a)和(8.3.39)式中．在略去自发辐射项(因在阈以上较远处)并只保留一阶小量后即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \mathrm{i}\sqrt{n_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} = \frac{|g|^2}{\gamma}\sqrt{n_s}\hat{s}_3 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a, \tag{8.5.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{s}_3 = -\eta\gamma_3\hat{s}_3 - 4\kappa\sqrt{n_s}\hat{\rho} + \hat{\Gamma}_{3c}, \tag{8.5.15}$$

其中 $\hat{F}_a$ 和 $\hat{\Gamma}_{3c}$ 分别见(8.3.26b)和(8.3.40)式，$\eta$ 为(8.4.8)式所定义的抽运参数．通过(8.5.14)式和它的共轭式，可以得出 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{\theta}$ 各自的方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = \frac{|g|^2}{\gamma}\sqrt{n_s}\hat{s}_3 + \hat{F}_\rho, \quad \hat{F}_\rho = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a^\dagger), \tag{8.5.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} = \hat{F}_\theta, \qquad \hat{F}_\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{n_s}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a^\dagger). \tag{8.5.17}$$

方程(8.5.15)～(8.5.17)就是稳恒时涨落量所满足的运动方程，通过它们不仅可以求出光子数和原子反转数的方差，还可求出激光谱线的宽度[通过(8.5.17)式]．这也是在本节中我们研究 $\hat{a}_s(t)$[而不是 $\hat{n}_s(t)$]的涨落的原因．

作为准备，下面先来介绍稳恒随机变量的功率谱以及相关的威纳-亨钦定理．

### 3．稳恒涨落量的功率谱　威纳-亨钦定理

我们知道，悬挂在气体中的微体，在气体分子的碰撞下，将不停地颤动．这是因为悬挂的物体在受碰撞偏离其平衡位置后，会受到引力的作用使其返回原处．在热平衡的状态下，微体的平均动能和平均势能都只与气体的温度有关，与气体的压强没有关系．因由能量均分定律，对微体每个自由度的位移和速度有(由于颤动的角位移很小，故微体可视为在平面中运动)

$$\frac{1}{2}K\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T. \tag{8.5.18}$$

其中 $K$ 为恢复系数．即使将气压抽得很低，上述平均势能和平均动能的值仍不变．尽管如此，在不同的气压下，微体的涨落运动仍将表现出不同的特点．

图 8.5.1 给出不同气压情况下的涨落运动. 随着气压增高,我们看到微体作无规变动的频繁度增加,而每次无规变动的幅度减小. 这种改变可通过涨落谱和相关函数表示出来.

具体说,气压增高时,涨落谱中高频成分将增加,而相关函数$\langle x(t+\tau)x(t)\rangle$随$\tau$的增大而更快的减小. 我们将看到这两者之间有着定量的联系. 这就是威纳-亨钦定理的内容.

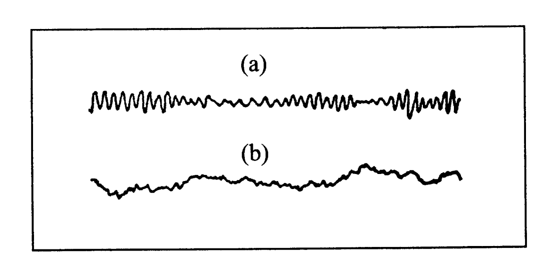



图 8.5.1　悬挂微体的涨落运动

(a) 较低气压情况　(b) 较高气压情况

我们只限于研究微体运动的稳恒状态. 这时随机量例如 $x$ 的平方平均值将与 $t$ 无关,即

$$\langle x^2(t)\rangle = x_0^2,$$

而相关函数$\langle x(t+\tau)x(t)\rangle$也只是时间差 $\tau$ 的函数,即

$$\langle x(t+\tau)x(t)\rangle = \langle x(\tau)x(0)\rangle. \tag{8.5.19}$$

下面就通过傅里叶变换来研究 $x(t)$的功率谱. 定义稳恒涨落量 $x(t)$的傅里叶变换$x(\Omega)_T$ 为

$$x(\Omega)_T = \frac{1}{\sqrt{2T}}\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{d}t, \qquad \Omega = \frac{n\pi}{T}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{8.5.20}$$

为了避免混淆,我们用 $\Omega$ 代表傅里叶变换中的频率变量. 上式中的 $T$ 为一个大值(与 $\frac{1}{\Omega}$ 相比),以后并要将它趋于无穷. 引入因子 $\frac{1}{\sqrt{2T}}$ 是为了在 $T\to\infty$ 时 $\langle |x(\Omega)_T|^2\rangle$为有限值(参见下文).

由于上式中的 $\Omega$ 取分立值,因而(8.5.20)式的反变换本为一个级数. 但在 $T$ 大时可将反变换写成积分形式:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\Omega)_T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{d}\Omega. \tag{8.5.21}$$

由(8.5.20)式定义的 $x(\Omega)_T$ 亦为随机量，因对(8.5.20)式两侧取统计系综平均即得出 $\langle x(\Omega)_T\rangle=0$. 但它的绝对值平方 $|x(\Omega)_T|^2$ 的统计平均不为零而且将是 $\Omega$ 的平滑的函数(这是作统计平均的结果. 参见下文). 因此我们定义

$$P(\Omega)\equiv\lim_{T\to\infty}\langle|x(\Omega)_T|^2\rangle \tag{8.5.22}$$

为 $x(t)$的功率谱. 下面来证明它正好是相关函数$\langle x(\tau)x(0)\rangle$的傅里叶系数. 为此，我们利用(8.5.20)式将 $P(\Omega)$化为

$$P(\Omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t'\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\langle x(t)x(t')\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega(t-t')}. \tag{8.5.23}$$

令 $\tau=t-t'$，则$\langle x(t)x(t')\rangle$将只是 $\tau$ 的函数，并可写成$\langle x(\tau)x(0)\rangle$，于是上式化为

$$P(\Omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t'\int_{-T-t'}^{T-t'}\langle x(\tau)x(0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\mathrm{d}\tau.$$

考虑到只在 $|\tau|$ 不大的范围内 $x(\tau)$ 才与 $x(0)$ 有关联，即$\langle x(\tau)x(0)\rangle$ 只在 $|\tau|$ 不大的范围内方不为零，我们可将上式对 $\tau$ 的积分限形式上扩大到从 $-\infty$ 到 $+\infty$，并提出到对 $t'$ 的积分号之外①. 这样就得出

$$P(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle x(\tau)x(0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\mathrm{d}\tau, \tag{8.5.24}$$

此结果就称为威纳-亨钦定理. 以上讨论也说明了，只有在(8.5.20)式右方引入因子$\frac{1}{\sqrt{2T}}$，才使得 $P(\Omega)$为有限值.

类似地还可证明

$$\lim_{T\to\infty}\langle x^*(\Omega)x(\Omega')\rangle=\delta_{\Omega\Omega'}P(\Omega). \tag{8.5.25}$$

$x(t)$的功率谱和相关函数$\langle x(\tau)x(0)\rangle$是描述随机量特性的两个重要函数，威纳-亨钦定理表明，它们之间正好是傅里叶变换关系. 从这一关系可以看出，当相关时间变短时，功率谱中高频成分的比重将增加，例如若$\langle x(\tau)x(0)\rangle=A\mathrm{e}^{-\Gamma|\tau|}$，对应的相关时间为 $1/\Gamma$，则功率谱即为$\frac{2A\Gamma}{\Omega^2+\Gamma^2}$. 其最大值虽总在 $\Omega=0$ 处，但对于大的 $\Gamma$(相应相关时间短)，谱分布延伸得远，相应于高频成分比重增加. 如果是马尔可夫型的关联即$\langle x(\tau)x(0)\rangle=A\delta(\tau)$，相关时间为零，功率谱即为白谱(也就是到无穷).

在以上考虑的例子中，$x(t)$代表位移，是实数，故有

---

① 若用$(-\tau_0,\tau_0)$标志$\langle x(\tau)x(0)\rangle$不为零的范围，则严格地说，只是当 $t'$ 在 $-T+\tau_0$ 到 $T-\tau_0$ 的范围，才可以这样做. 但这一修正不影响导出(8.5.24)式.

$$x^*(\Omega)_T = x(-\Omega)_T. \tag{8.5.26}$$

于是有

$$P(-\Omega) = \langle x^*(-\Omega)_T x(-\Omega)_T\rangle = \langle x(\Omega)_T x^*(\Omega)_T\rangle = P(\Omega). \tag{8.5.27}$$

即功率谱为 $\Omega$ 的偶函数.另外,(8.5.24)的逆变换为

$$\langle x(t)x(0)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega, \tag{8.5.28}$$

如将(8.5.27)式代入即得

$$\langle x(t)x(0)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} P(\Omega)\cos\Omega t d\Omega. \tag{8.5.29}$$

另外,由于 $P^*(\Omega)=P(-\Omega)$故按(8.5.27)式,$P(\Omega)$在此情况下亦为实函数.这就保证了(8.5.29)式右方亦为实数.

为了对功率谱作进一步考察,我们令(8.5.28)式中 $t=0$.再注意到 $x$ 是稳恒态随机变量,$\langle x^2(0)\rangle$也就是任意时刻的$\langle x^2(t)\rangle=\langle x^2\rangle$.于是由(8.5.28)和(8.5.18)式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Omega)d\Omega = 2\pi\langle x^2\rangle = 2\pi\frac{k_B}{K}T, \tag{8.5.30}$$

只与 $T$ 有关,与压强 $p$ 无关.此结果表明,对于图 8.5.1(a)、(b)两种情况,尽管$P(\Omega)$不同,但积分值却是一样的.

当随机变量为复数 $f(t)$时,可类似地进行讨论.实际上傅里叶变换定义式(8.5.20)、反演式(8.5.21)和功率谱定义式(8.5.22)都是一样的,只是功率谱公式(8.5.23)和(8.5.24)中的$\langle x(t)x(t')\rangle$和$\langle x(\tau)x(0)\rangle$应改成$\langle f^*(t)f(t')\rangle$和$\langle f^*(\tau)f(0)\rangle$.于是有

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle f^*(\tau)f(0)\rangle e^{-i\Omega\tau}d\tau. \tag{8.5.31}$$

对于随机算符 $\hat{f}$,结果类似.只须把 $f^*$ 换成 $\hat{f}^\dagger$,另外求期望值时应对库和系统的密度算符取平均.相应的公式如下:

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle \hat{f}^\dagger(\tau)\hat{f}(0)\rangle e^{-i\Omega\tau}d\tau, \tag{8.5.32}$$

$$\langle \hat{f}^\dagger(t)\hat{f}(0)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega. \tag{8.5.33}$$

如果问题不只涉及某一个随机算符而是涉及两个随机算符 $\hat{f}(t)$和 $\hat{g}(t)$,则同样可以证明

$$\lim_{T\to\infty}\langle \hat{g}(\Omega)_T^\dagger\hat{f}(\Omega)_T\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle \hat{g}^\dagger(\tau)\hat{f}(0)\rangle e^{-i\Omega\tau}d\tau.$$

在某些情况下，我们需要用到对称化的功率谱 $P^{(s)}(\Omega)$，它的定义式为

$$P^{(s)}(\Omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}[\langle\hat{f}(\Omega)_T^{\dagger}\hat{f}(\Omega)_T\rangle+\langle\hat{f}(\Omega)_T f(\Omega)_T^{\dagger}\rangle]$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\langle\hat{f}^{\dagger}(\tau)\hat{f}(0)\rangle+\langle\hat{f}(\tau)\hat{f}^{\dagger}(0)\rangle]e^{-i\Omega\tau}d\tau. \tag{8.5.34}$$

具体研究激光系统的涨落以及谱线宽度将在下节中进行.

## §8.6　激光涨落的功率谱、谱线宽度和输出场的流强度

在上节中我们得出了光场幅模涨落算符 $\hat{\rho}(t)$ 和原子反转数涨落算符 $\hat{s}_3(t)$ 所满足的联立方程，以及光场位相涨落（实际是漂移）算符所满足的方程. 从 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{s}_3$ 的联立方程可以求出幅模涨落的功率谱和它的相关函数，以及光子数的方差. 而从光场位相的漂移可以求出激光场的谱线宽度. 这就是本节的第一方面的内容. 另外实际应用的不是激光腔内的光场而是从激光腔出射的光束. 关于它的流强和涨落可以从腔内光子数的损耗得出. 这就是本节要讨论的第二方面内容. 通过以上的讨论，我们看到激光的品质与混杂光场的差别.

**1. 腔场幅模的涨落**

先来看阈区以上的情况（阈区的定义见(8.4.21)式上）. 光场幅模涨落算符 $\hat{\rho}$ 和原子反转数涨落算符 $\hat{s}_3$ 所满足的联立方程如(8.5.16)和(8.5.15)式所示，即

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}=\frac{|g|^2}{\gamma}\sqrt{n_s}\,\hat{s}_3+\hat{F}_{\rho}, \tag{8.6.1a}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{s}_3=-\eta\gamma_3\hat{s}_3-4\kappa\sqrt{n_s}\,\hat{\rho}+\hat{\Gamma}_{3c}. \tag{8.6.1b}$$

我们可以浸渐地消去(8.6.1a)中 $\hat{s}_3$，因为

$$4\left(\frac{|g|^2}{\gamma}\sqrt{n_s}\right)(4\kappa\sqrt{n_s})=16\frac{|g|^2}{\gamma}\kappa n_s=4\kappa\gamma_3(\eta-1),$$

它比 $s_3$ 中的衰减系数 $\eta\gamma_3$ 的平方小得多（注：由 $(\eta-2)^2\geqslant 0$ 即得 $4(\eta-1)\leqslant\eta^2$），满足(8.3.24)式所要求的条件. 于是得出

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}=-\kappa\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\hat{\rho}+\hat{F}_{\rho}^{(c)},\qquad \hat{F}_{\rho}^{(c)}=\hat{F}_{\rho}+\frac{1}{4\sqrt{n_s}}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\hat{\Gamma}_{3c}. \tag{8.6.2}$$

此方程为涨落力驱动的带阻尼的方程，与布朗粒子在液体中的速度所满足的方程相似. 它也可看成是§8.4 中的模拟布朗振子在“图 8.4.1 曲线Ⅱ所示”的位势低

谷中的径向运动方程.(8.6.2)式的解为

$$\hat{\rho}(t)=\int_0^t \hat{F}_\rho^{(c)}(t')\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)(t-t')}\mathrm{d}t'+\hat{\rho}(0)\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)t}, \tag{8.6.3a}$$

也可写成(通过将初始时刻取为 $-\infty$)

$$\hat{\rho}(t)=\int_{-\infty}^t \hat{F}_\rho^{(c)}(t')\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)(t-t')}\mathrm{d}t'. \tag{8.6.3b}$$

我们可以用(8.6.3)式来求 $\langle\hat{\rho}^2(t)\rangle$ 以及相关函数 $\langle\hat{\rho}(t)\hat{\rho}(t')\rangle$,也可以通过方程(8.6.2)直接来求 $\hat{\rho}$ 的功率谱,为此只需对方程(8.6.2)两侧按(8.5.20)作傅里叶变换.结果为

$$-\mathrm{i}\Omega\hat{\rho}(\Omega)_T=-\kappa\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\hat{\rho}(\Omega)_T+\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T. \tag{8.6.4}$$

由此即得

$$\hat{\rho}(\Omega)_T=\frac{\mathrm{i}\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T}{\Omega+\mathrm{i}\kappa\left(1-\dfrac{1}{\eta}\right)}, \tag{8.6.5}$$

相应的功率谱为

$$P_\rho(\Omega)=\lim_{T\to\infty}\langle\hat{\rho}(\Omega)_T^\dagger\hat{\rho}(\Omega)_T\rangle=\frac{\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T^\dagger\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T\rangle}{\Omega^2+\kappa^2\left(1-\dfrac{1}{\eta}\right)^2}. \tag{8.6.6}$$

在上式的右方的分子中,我们已略去 $\lim\limits_{T\to\infty}$ 不明写出.

$\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T^\dagger\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T\rangle$ 实际上即涨落力 $\hat{F}_\rho^{(c)}(t)$ 的功率谱,我们可通过 $\hat{F}_\rho^\dagger(t)$ 的相关函数来计算.按照(8.5.32)式,

$$\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T^\dagger\hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(\tau)\hat{F}_\rho^{(c)}(0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{8.6.7}$$

将 $\hat{F}_\rho^{(c)}(\tau)$ 的表达式(8.6.2)式代入上式右方的相关函数,得

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(\tau)\hat{F}_\rho^{(c)}(0)\rangle=&\langle\hat{F}_\rho(\tau)\hat{F}_\rho(0)\rangle+\frac{1}{4\sqrt{n_s}}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)[\langle\hat{F}_\rho(\tau)\hat{\Gamma}_{3c}(0)\rangle\\&+\langle\hat{\Gamma}_{3c}(\tau)\hat{F}_\rho(0)\rangle]+\frac{1}{16n_s}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)^2\langle\hat{\Gamma}_{3c}(\tau)\hat{\Gamma}_{3c}(0)\rangle. \end{aligned}\tag{8.6.8}$$

$\hat{F}_\rho(\tau)$ 的表达式由(8.5.16)式给出,而其中的 $\hat{F}_a$ 又由(8.3.26b)式表示.至于 $\hat{\Gamma}_{3c}(\tau)$ 的表达式则可参见(8.3.40)或其下式.利用这些表达式我们求得

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}_\rho(\tau)\hat{F}_\rho(0)\rangle&=\frac{1}{4}[\langle\hat{F}_a(\tau)\hat{F}_a^\dagger(0)\rangle+\langle\hat{F}_a^\dagger(\tau)\hat{F}_a(0)\rangle]\\&=\frac{1}{4}[\langle\hat{F}(\tau)\hat{F}^\dagger(0)\rangle+\langle\hat{F}^\dagger(\tau)\hat{F}(0)\rangle+\frac{|g|^2}{\gamma^2}\langle\hat{\Gamma}_-(\tau)\hat{\Gamma}_+(0)\rangle\\&\quad+\frac{|g|^2}{\gamma^2}\langle\hat{\Gamma}_+(\tau)\hat{\Gamma}_-(0)\rangle]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\kappa + \frac{2|g|^2}{\gamma}\mathrm{N}\right) = \frac{1}{4}\kappa(1 + 2n_{\text{spon}}^{(H)})\delta(\tau). \tag{8.6.9}$$

下面再来看(8.6.8)式第二项中的相关函数.利用(8.3.40)式下面的表示即得

$$\langle \hat{F}_\rho(\tau)\hat{\Gamma}_{3c}(0)\rangle = \langle \hat{F}_\rho(\tau)\hat{\Gamma}_3(0)\rangle + \frac{2\mathrm{i}}{\gamma}[g^*\langle \hat{F}_\rho(\tau)\hat{a}^\dagger(0-\epsilon)\hat{\Gamma}_-(0)\rangle$$
$$- g\langle \hat{F}_\rho(\tau)\hat{\Gamma}_+(0)\hat{a}(0-\epsilon)\rangle],$$

其中 $\hat{a}^\dagger(0-\epsilon)$又可用 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}[\sqrt{n_s} + \hat{\rho}(0-\epsilon) - \mathrm{i}\sqrt{n_s}\hat{\theta}(0-\epsilon)]$代入(参见(8.5.12b)式),$\hat{a}(0-\epsilon)$仿此处理.

在略去$\langle \hat{F}_\rho(\tau)\hat{\rho}(0-\epsilon)\hat{\Gamma}_\pm(0)\rangle$和$\langle \hat{F}_\rho(\tau)\sqrt{n_s}\hat{\theta}(0-\epsilon)\hat{\Gamma}_\pm(0)\rangle$这两项小量后,即可计算出$\langle \hat{F}_\rho(0)\hat{\Gamma}_{3c}(0)\rangle$.对于$\langle \hat{\Gamma}_{3c}(\tau)\hat{\Gamma}_{3c}(0)\rangle$可类似地来计算.在$\frac{\eta-1}{2\eta}\left(\frac{p}{\gamma_3}+\frac{p}{\gamma}\right)$比起$(n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2)$可以忽略的情况下,结果就是

$$\langle \hat{F}_\rho^{(c)}(\tau)\hat{F}_\rho^{(c)}(0)\rangle = \frac{\kappa}{2\eta}(n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2)\delta(\tau). \tag{8.6.10}$$

将以上结果代入(8.6.7)式中,即求出 $\hat{F}_\rho^{(c)}$ 的功率谱为

$$\langle \hat{F}_\rho^{(c)}(\Omega)_T^\dagger \hat{F}_\rho(\Omega)_T\rangle = \frac{\kappa}{2\eta}(n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2). \tag{8.6.11}$$

于是,$\hat{\rho}$的功率谱公式(8.6.6)就化为

$$P_\rho(\Omega) = \frac{\kappa(n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2)}{2\eta[\Omega^2 + \kappa^2(1-1/\eta)^2]}. \tag{8.6.12}$$

我们看到,$\hat{\rho}$ 的功率谱大体上就是分布在 0 到 $\kappa(1-1/\eta)$范围,$\eta$ 增大时,谱宽减小,相应高频部分减缩.有了 $P_\rho(\Omega)$即可求出$\langle \hat{\rho}^2\rangle$:

$$\langle \hat{\rho}^2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_\rho(\Omega)\mathrm{d}\Omega = \frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{4(\eta-1)}. \tag{8.6.13}$$

利用 $n_{\text{spon}}^{(H)} = \frac{\eta}{2}\frac{\gamma_3}{p}$(参见表 8.4.1),$\langle \hat{\rho}^2\rangle$也可用 $\eta$ 和$\gamma_3/p$ 表示出来.结果即为

$$\langle \hat{\rho}^2\rangle = \frac{\eta}{8(\eta-1)}\left(\frac{\gamma_3}{p}+1\right). \tag{8.6.14}$$

由上式不难求出,当抽运 $p$ 增大(其余基本参数不变)时,$\langle \hat{\rho}^2\rangle$将减少[$\eta$ 不是基本参数,它与 $p$ 成正比,参见(8.4.8)式].

下面来求稳恒时光子数的“比方差”,即方差 $\Delta n$ 与$\langle n\rangle$的比值.由(8.5.12a)式,$\hat{n} = n_s + 2\sqrt{n_s}\hat{\rho} + \hat{\rho}^2$,即得$\langle \hat{n}\rangle^2 \approx n_s^2 + 2n_s\langle \hat{\rho}^2\rangle$,$\langle \hat{n}^2\rangle \approx n_s^2 + 6n_s\langle \hat{\rho}^2\rangle$,从而$\Delta n = \sqrt{4n_s\langle \hat{\rho}^2\rangle}$.于是有

$$\frac{\Delta n}{\langle n\rangle} = 2\sqrt{\frac{\langle \hat{\rho}^2\rangle}{n_s}} = \sqrt{\frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{(\eta-1)n_s}}, \tag{8.6.15a}$$

也可表成
$$\Delta n/\langle n\rangle = \frac{1}{\eta - 1}\sqrt{\frac{\eta(\gamma_3/p + 1)}{2n_{\text{sat}}}}, \tag{8.6.15b}$$
其中 $\eta$ 与 $p$ 成正比(而且 $\eta-1>0$), $n_{\text{sat}}$与 $p$ 无关. 通过对 $p$ 的微商,可以证明当 $p$ 增加时, $\frac{\Delta n}{\langle n\rangle}$ 的值将减小. 若假想 $\eta$ 很大(即 $p/p^{(th)}\gg 1$)使$\sqrt{\frac{\eta}{\eta-1}}=1$,而且 $\frac{\gamma_3}{p}\approx 1$,(即 $w_{21}\gg w_{12}$,参见(8.2.43)式)则上式右方将化为$\frac{1}{\sqrt{\langle n\rangle}}$,对应于泊松分布的值.

对于氦氖激光器, $n_{\text{sat}}\approx 10^8$,于是当 $\eta-1=10^{-2}$时, $\Delta n/\langle n\rangle$也只不过$\approx 10^{-2}$.

我们也不难求出相关函数$\langle\hat{\rho}(\tau)\hat{\rho}(0)\rangle$,由(8.5.33)式①
$$\langle\hat{\rho}(\tau)\hat{\rho}(0)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_\rho(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega\tau}\mathrm{d}\Omega = \frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{4(\eta - 1)}\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)|\tau|}. \tag{8.6.16}$$
此结果与通过(8.6.3)式来计算是一致的. 因由该式可得
$$\begin{aligned}\langle\hat{\rho}(\tau)\hat{\rho}(0)\rangle &= \int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t'\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(t)\hat{F}_\rho^{(c)}(t')\rangle\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)(\tau-t-t')}\\ &= \int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t'\,\frac{\kappa}{2\eta}(n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2)\delta(t - t')\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)(\tau-t-t')},\end{aligned} \tag{8.6.17}$$
当 $\tau>0$ 时,较方便的处理是先对 $t$ 积分,以使得每个可能的 $t'$都含在$t$ 的积分域之内,反过来,当 $\tau<0$ 时,较方便的是先对 $t'$积分,以使每个可能的 $t$ 值都含在$t'$的积分范围以内. 由(8.6.17)式计算的结果与(8.6.16)式完全一致.

下面再来看阈区以下的情况[阈区定义见(8.4.21)式上].

在阈区以下($\eta<1$), $n^{(s)}=0$,整个 $\hat{a}$就是涨落. 另外,在稳恒时,
$$\hat{\Sigma}_3^{(s)}(t) = \frac{Np}{\gamma_3} + \hat{s}_3, \tag{8.6.18}$$
于是由(8.3.26)式即得(准到涨落的一次项而 $\hat{a}$就是涨落)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a} = -\frac{\kappa}{2}(1 - \eta)\hat{a} + \hat{F}_a, \tag{8.6.19}$$
对上式作傅里叶变换,得
$$-\mathrm{i}\Omega\hat{a}(\Omega) = -\frac{\kappa}{2}(1 - \eta)\hat{a}(\Omega) + \hat{F}_a(\Omega). \tag{8.6.20}$$
由此即求出

---

① 注意,当 $\tau$ 取正值时,下式的积分回路应取为无穷大的上半圆,当 $\tau$ 取负值时,应取为无穷大的下半圆.

$$\hat{a}(\Omega) = \frac{\mathrm{i}\hat{F}_a(\Omega)}{\Omega + \mathrm{i}\frac{\kappa}{2}(1-\eta)}. \tag{8.6.21}$$

相应地,功率谱为

$$P(\Omega) = \frac{\langle \hat{F}_a^\dagger(\Omega)\hat{F}_a(\Omega)\rangle}{\Omega^2 + \frac{1}{4}\kappa^2(1-\eta)^2}. \tag{8.6.22}$$

上式中的分子不难求出

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}_a^\dagger(\Omega)\hat{F}_a(\Omega)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\langle \hat{F}_a^\dagger(\tau)\hat{F}_a(0)\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\langle \hat{F}^\dagger(\tau)\hat{F}(0)\rangle + \frac{|g|^2}{\gamma^2}\langle \hat{\Gamma}_+(\tau)\hat{\Gamma}_-(0)\rangle\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \kappa n_{\text{spon}}^{(H)}\left(1+\frac{p}{\gamma_3}\right) = \kappa\left(n_{\text{spon}}^{(H)} + \frac{\eta}{2}\right),\end{aligned} \tag{8.6.23}$$

代回(8.6.22)式即得出

$$P(\Omega) = \frac{\kappa(n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2)}{\Omega^2 + \frac{1}{4}\kappa^2(1-\eta)^2}. \tag{8.6.24}$$

我们看到当 $\eta$ 增加时(在上式有效的范围内),谱宽减少,而光子总数

$$\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P(\Omega)\mathrm{d}\Omega = \frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{1-\eta}, \tag{8.6.25}$$

与(8.4.22)式一致.

$\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$代表阈区以下涨落平方的平均值,因而与阈区以上的$\langle \hat{\rho}^2\rangle$相对应.比较(8.6.25)与(8.6.13)式,可以发现两者形式上的相似性.如果把两式分母中的$\pm(\eta-1)$(它们都为正值)写成$|\eta-1|$,则两式的差别就只是因子 1/4(自然,两式中的 $\eta$ 值不同).但要强调的是,这两种情况在物理上是完全不同的,这可从模拟振子的运动来看出:在阈区以上,涨落是环形谷上的径向运动,在周向则是漂移,改变振子的方位.在阈区以下,则在坑中心沿任意方向都作涨落运动.另外,阈区以上和阈区以下的涨落随着抽运 $p$ 的变化不同,前已指出,当 $p$ 增加时,阈区以上的涨落减小,而按(8.6.25)式,阈区以下涨落随着 $p$ 的增加而增大(这时的涨落场也就是全部的场).

**2. 谱线宽度**

对于单模光场,其谱线本来是设有宽度的(即它具有确定的频率 $\omega$).但这是对自由振动的单模场而言.对于激光系统,情况就不同了.因为其中的单模场一方面与腔内原子相互作用,一方面还与库相作用,并非自由场.这将使它的谱线具有一个宽

度.我们仍将假定原子的跃迁频率与腔模频率相等.下面先讨论阈以上的情况.

在§8.2第1小节中介绍原子$\hat{\sigma}_{\pm}$算符的横向弛豫效应时,曾指出相位无规变化的平均效应相当于该算符有一衰减.对于腔场也有同样的效应.在上节中,我们曾得出稳恒光场除了其幅模有涨落外其相位并有扩散(相应于模拟振子在周向上的漂移).幅模的涨落不会导致$\hat{a}$的衰减,而相位的扩散则将导致$\langle\hat{a}\rangle$的衰减.正是这种衰减使激光场有一谱线宽度.(8.5.17)式给出在阈区以上光场相位$\hat{\theta}(t)$所满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}(t)=\hat{F}_{\theta}(t), \tag{8.6.26}$$

其中$\hat{F}_{\theta}$为无规作用力.由(8.5.17)及(8.3.26b),

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\theta}(t)&=\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{n_s}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a(t)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a^{\dagger}(t)),\\ \hat{F}_a(t)&=\hat{F}(t)-\frac{\mathrm{i}g^*}{\gamma}\hat{\Gamma}_-(t).\end{aligned} \tag{8.6.27}$$

为简便起见,取$\hat{\theta}(0)=0$,于是由(8.6.26)式即得

$$\hat{\theta}(t)=\int_0^t\hat{F}_{\theta}(t')\mathrm{d}t', \tag{8.6.28}$$

从而

$$\langle\hat{\theta}^2(t)\rangle=\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^t\mathrm{d}t''\langle\hat{F}_{\theta}(t')\hat{F}_{\theta}(t'')\rangle. \tag{8.6.29}$$

上式中的相关函数不难算出:

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}_{\theta}(t')\hat{F}_{\theta}(t'')\rangle&=\frac{1}{4n_s}(\langle\hat{F}_a(t)\hat{F}_a^{\dagger}(t')\rangle+\langle\hat{F}_a^{\dagger}(t)\hat{F}_a(t')\rangle)\\ &=\frac{1}{4n_s}\kappa(1+2n_{\mathrm{spon}}^{(H)})\delta(t-t'),\end{aligned} \tag{8.6.30}$$

其中$n_{\mathrm{spon}}^{(H)}=\dfrac{|g|^2}{\kappa\gamma}N$(参见(8.4.19)式).(8.6.30)式的最后一步计算参见(8.6.9)式.通过与(8.6.9)式的比较我们还看到$\langle\hat{F}_{\theta}(t')\hat{F}_{\theta}(t'')\rangle$正好等于$\dfrac{1}{n_s}\langle\hat{F}_{\rho}(t')\hat{F}_{\rho}(t'')\rangle$.将(8.6.30)式代入(8.6.29)式即得出

$$\langle\hat{\theta}^2(t)\rangle=\frac{\kappa}{4n_s}(1+2n_{\mathrm{spon}}^{(H)})t. \tag{8.6.31}$$

此式表明$\hat{\theta}$随时间变化如同漂移或无规行走一样:$\theta$平方的平均值与$t$的一次方成正比.

下面来计算$\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}(t)}\rangle$,以求出$\langle\hat{a}\rangle$的衰减:

$$\langle e^{i\hat{\theta}(t)}\rangle = \langle e^{i\int_0^t \hat{F}_\theta(t')dt'}\rangle = \langle 1 - i\int_0^t \hat{F}_\theta(t')dt'$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t dt'\int_0^t dt''\hat{F}_\theta(t')\hat{F}_\theta(t'') + \cdots\rangle. \tag{8.6.32}$$

按照从(8.2.15)式到(8.2.18)式同样的处理,并利用(8.6.30)式即可得出

$$\langle e^{-i\hat{\theta}(t)}\rangle = e^{-\frac{\kappa}{4n_s}\left(n_{spon}^{(H)}+\frac{1}{2}\right)t}, \tag{8.6.33}$$

从而就最大项而言(略去幅模的涨落)

$$\langle \hat{a}(t)\rangle \approx \sqrt{n_s}\, e^{-\frac{\kappa}{4n_s}\left(n_{spon}^{(H)}+\frac{1}{2}\right)t+i\phi}. \tag{8.6.34}$$

于是在阈区以上谱线的半高全宽为

$$\Gamma = \frac{\kappa}{2n_s}\left(n_{spon}^{(H)} + \frac{1}{2}\right). \tag{8.6.35}$$

它比腔内没有原子时腔场的衰减率$\frac{\kappa}{2}$要小得多,比起原子能级迁移算符 $\hat{\sigma}_\pm$ 原来的衰减率(没有原子与腔场作用)$\gamma$ 就更要小得多.并随着 $p$ 的增大而减少.

下面再来考察阈区以下的情况.从(8.6.19)式即得

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-\frac{\kappa}{2}(1-\eta)t} + \int_0^t \hat{F}_a(t')e^{-\kappa(t-t')}dt', \tag{8.6.36}$$

从而

$$\langle \hat{a}(t)\rangle = \langle \hat{a}(0)\rangle e^{-\frac{\kappa}{2}(1-\eta)t}. \tag{8.6.37}$$

由此即得谱线的半高全宽为

$$\Gamma = \kappa(1-\eta). \tag{8.6.38}$$

我们看到:即使在阈区以下,腔辐射的谱宽也比 $\kappa$ 要小.同样,$p$ 增大时 $\Gamma$ 将减小.此结果与(8.6.24)式给出的结果一致.

为了与阈区以上的(8.6.35)式作比较,我们利用(8.6.25)式将(8.6.38)式中的 $\eta$ 用阈区以下的平均光子数$\langle n\rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}\rangle$表示出来,结果为

$$\eta = \frac{\langle n\rangle - n_{spon}^{(H)}}{\langle n\rangle + \frac{1}{2}}. \tag{8.6.39}$$

于是(8.6.38)式化为

$$\Gamma = \frac{\kappa}{\langle n\rangle + \frac{1}{2}}\left(n_{spon}^{(H)} + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{\kappa}{\langle n\rangle}\left(n_{spon}^{(H)} + \frac{1}{2}\right). \tag{8.6.40}$$

我们有兴趣地看到,从形式上对比,上式与(8.6.35)式的差别只在于分母上少了因子 2.当然两者实质上的差别是巨大的因为阈上、下的光子数相差许多量级.

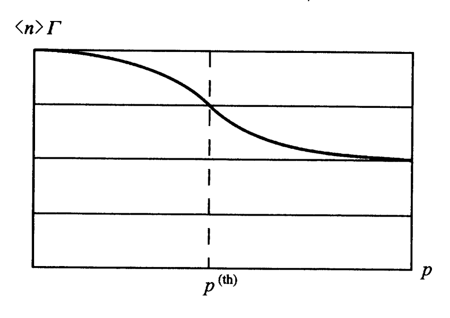



图 8.6.1 平均光子数$\langle n\rangle$与谱线宽度 $\Gamma$ 的乘积在阈区上下的变化

如果用 $\Gamma_a$ 代表阈区以上的谱宽，$\langle n\rangle_a \equiv n_s$ 为阈区以上的光子数. $\Gamma_b$ 代表阈区以下的谱宽，$\langle n\rangle_b$ 代表阈区以下的光子数. 则从(8.6.35)和(8.6.40)式即可得出

$$2\langle n\rangle_a \Gamma_a = \langle n\rangle_b \Gamma_b, \quad (8.6.41)$$

因为 $n_{\mathrm{spon}}^{(H)}$ 与 $p$ 无关，在阈区上下都是同一个值. 以上结果可用图 8.6.1 表示. 该图的横向尺度即代表阈区.

### 3. 输出场的流强度和涨落的功率谱

在前面我们讨论了腔内场以及它的涨落. 但实际中应用的是输出到腔外的场. 因而从实用的角度来看，更重要的是输出场和它的涨落.

在经典理论中，输出场可以通过腔内场(在我们讨论的行波模的情况下)乘上腔镜的透射系数而得出. 但在量子理论中这一简单的关系并不成立. 因若输出场由算符 $\hat{a}_{\mathrm{out}}=\sqrt{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\hat{a}$ 和 $\hat{a}_{\mathrm{out}}^{\dagger}=\sqrt{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\hat{a}^{\dagger}$ 表示(其中 $T$ 为透射系数，$\phi$ 为通过腔镜所产生的相位改变). 则有$[\hat{a}_{\mathrm{out}}, \hat{a}_{\mathrm{out}}^{\dagger}] = T < 1$. 不符合量子理论的要求.

实际上，输出是腔模与腔外的库模的相互作用来实现的. 出射场除了由腔模透射出来的部分以外，还要加上库场的贡献. 行波腔共有四个镜(见图 8.6.2)，三个加斜影的镜片代表完全反射的镜，而右上角的镜片为半透镜. 输出场除了含腔内场的透射的部分以外，还含有从上方射来的库场中的反射部分. 两者将叠加在一起.

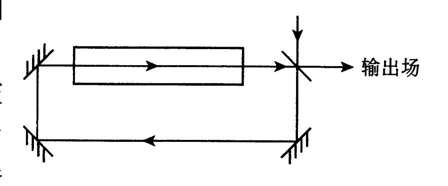



图 8.6.2 行波激光腔的输出场

在这里我们不打算计算输出流的振幅算符 $\hat{a}_{\mathrm{out}}$①，而只给出输出的光子流强度 $\hat{I}$ 和它的涨落谱 $P_I(\Omega)$，因为这可以通简单的办法得出.

为此我们来考察腔内光子数的增加率$\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}t}$. 由(8.3.35)式并设 $\bar{n}_T$ 可略去，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{n} = -\kappa\hat{n} + \frac{2|g|^2}{\gamma}(\hat{\Sigma}_3\hat{n} + \hat{N}_2) + \hat{F}_n, \quad (8.6.42)$$

① 有兴趣的读者可参考 Collett and Gardiner, Phys. Rev.A, **30**, 1386(1984); Gardiner and Collett, Phys.Rev. A, **31**, 3761 (1985); Carmichael, An Open System Appvoach to Quantum Optics.p.13

其中

$$\hat{F}_n = \hat{F}_n^{(1)} + \hat{F}_n^{(2)}, \quad \hat{F}_n^{(1)} = \hat{a}^\dagger(t-\epsilon)\hat{F}(t) + \text{h.c.},$$

$$\hat{F}_n^{(2)} = -\,\mathrm{i}\frac{g^*}{\gamma}\hat{a}^\dagger(t-\epsilon)\hat{\Gamma}_-(t) + \text{h.c.} \tag{8.6.43}$$

它应等于原子的(光子)辐射率减去腔光子的损耗率.假定腔光子的损耗完全是由输出而造成的(否则要从 $\hat{F}_n^{(1)}$ 和 $\kappa$ 中分出其他因素所造成的部分).于是(8.6.42)式右方的 $\kappa\hat{n} - \hat{F}_n^{(1)}$ 就代表输出所造成的光子数减少率,因此可把它定义成输出光子流算符 $\hat{I}$

$$\hat{I} = \kappa\hat{n} - \hat{F}_n^{(1)}. \tag{8.6.44}$$

(8.6.42)式右方剩下的部分$\left[\frac{2|g|^2}{\gamma}(\hat{\Sigma}_3\hat{n} + \hat{N}_2) + \hat{F}_n^{(2)}\right]$则是原子的(光子)辐射率.按(8.6.44)式

$$\langle\hat{I}\rangle = \kappa\langle\hat{n}\rangle. \tag{8.6.45}$$

当激光器工作在阈区以上而且处于稳恒状态时,将(8.5.12a)式代入(8.6.44)式即得

$$\hat{I} = \kappa n_s + 2\kappa\sqrt{n_s}\hat{\rho} - \hat{F}_n^{(1)}. \tag{8.6.46}$$

于是$\langle\hat{I}\rangle = \kappa n_s$ 而涨落项为

$$\Delta\hat{I} = 2\kappa\sqrt{n_s}\hat{\rho} - \hat{F}_n^{(1)}. \tag{8.6.47}$$

为了计算稳恒时涨落谱,我们先来求相关函数$\langle\Delta\hat{I}(t)\Delta\hat{I}(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\Delta\hat{I}(t)\Delta\hat{I}(0)\rangle = {}& 4\kappa^2 n_s\langle\hat{\rho}(t)\hat{\rho}(0)\rangle - 2\kappa\sqrt{n_s}[\langle\hat{\rho}(t)\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle \\ & + \langle\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{\rho}(0)\rangle] + \langle\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle,\end{aligned} \tag{8.6.48}$$

上式右方第一项 $L_I(t)$对 $\Delta\hat{I}$相关函数的贡献可由(8.6.16)式直接给出,其值为

$$L_{\mathrm{I}}(t) = \kappa^2 n_s\left(\frac{n_{\text{spon}}^{(H)} + \eta/2}{\eta - 1}\right)\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)|t|}. \tag{8.6.49}$$

(8.6.48)式第二项可化为[利用(8.6.3b)式]

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{II}}(t) = {}& -2\kappa\sqrt{n_s}\left[\int_{-\infty}^{t}\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(t')\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle\mathrm{e}^{-\kappa(1-1/\eta)(t-t')}\mathrm{d}t'\right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{0}\langle\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}_\rho^{(c)}(t')\rangle\mathrm{e}^{\kappa(1-1/\eta)t'}\mathrm{d}t'\right],\end{aligned} \tag{8.6.50}$$

其中 $\hat{F}_\rho^{(c)}(t')$由(8.6.2)式给出.

利用(8.5.16)式,(8.3.26)式即得

$$\langle\hat{F}_\rho^{(c)}(t')\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle = \langle\hat{F}_\rho(t')\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle = \frac{1}{2}\langle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a(t')\hat{F}_n^{(1)}(0) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\hat{F}_a^\dagger(t')\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle e^{-i\phi}\hat{F}(t')\hat{F}_n^{(1)}(0) + e^{i\phi}\hat{F}^{\dagger}(t')\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle.$$

再将上式中的 $\hat{F}_n^{(1)}$ 用(8.6.43)式代入.在略去涨落小量后,$\hat{a}^{\dagger}$ 和 $\hat{a}$ 可分别用$\sqrt{n_s}e^{\mp i\phi}$代入,于是得

$$\frac{1}{2}e^{-i\phi}(e^{i\phi}\sqrt{n_s})\langle\hat{F}(t')\hat{F}^{\dagger}(0)\rangle + \frac{1}{2}e^{i\phi}(e^{-i\phi}\sqrt{n_s})\langle\hat{F}^{\dagger}(t')\hat{F}(0)\rangle \approx \frac{1}{2}\sqrt{n_s}\kappa\delta(t').$$

再看(8.6.50)式右方第二项中的$\langle\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}_\rho^{(c)}(t')\rangle$,仿此可得出

$$\langle\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}_\rho^{(c)}(t')\rangle = \frac{1}{2}\langle e^{-i\phi}\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}(t') + e^{i\phi}\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}^{\dagger}(t')\rangle \approx \frac{1}{2}\sqrt{n_s}\kappa\delta(t-t').$$

将以上两式代回(8.6.50)式中即可看出,当 $t>0$ 时,只有第一个积分不为零,而当 $t<0$ 时只有第二个积分不为零.于是即可得出 $L_{\mathrm{II}}(t)$,结果见下面的(8.6.51)式.

如上计算出的结果为

$$L_{\mathrm{II}}(t) = -\kappa^2 n_s e^{-\kappa(1-1/\eta)|t|}. \tag{8.6.51}$$

最后来看(8.6.48)式右方第三项.按照(8.2.39a)式的处理①,结果即为

$$L_{\mathrm{III}}(t) = \langle\hat{F}_n^{(1)}(t)\hat{F}_n^{(1)}(0)\rangle = \langle\hat{a}^{\dagger}(t-\epsilon)\hat{a}(-\epsilon)\rangle\langle\hat{F}(t)\hat{F}^{\dagger}(0)\rangle = \kappa n_s\delta(t). \tag{8.6.52}$$

总起来得

$$\langle\Delta\hat{I}(t)\Delta\hat{I}(0)\rangle = \kappa^2 n_s\frac{n_{\text{spon}}^{(H)}+1-\eta/2}{\eta-1}e^{-\kappa(1-1/\eta)t} + \kappa n_s\delta(t). \tag{8.6.53}$$

于是 $\Delta I$ 的功率谱即可求出,其值为

$$P(\Omega) = \kappa^3 n_s\frac{\frac{2}{\eta}(n_{\text{spon}}^{(H)}+1)-1}{\Omega^2+\kappa^2(1-1/\eta)^2} + \kappa n_s. \tag{8.6.54a}$$

如果 $\eta\approx1$(例如 $\eta=1.01$,这里 $n_s$ 仍将比阈值处光子数大二个量级),则上式可以近似成

$$P(\Omega) \approx \kappa^3 n_s\frac{2n_{\text{spon}}^{(H)}+1}{\Omega^2+\kappa^2(\eta-1)^2} + \kappa n_s. \tag{8.6.54b}$$

上两式表明在我们所考虑的情况下(浸渐近似条件成立),$\Delta\hat{I}$的功率谱为 $\Omega^2$ 的单调下降函数,$P(0)$值为 $\kappa n_s\dfrac{2n_{\text{spon}}^{(H)}+1}{(\eta-1)^2}+\kappa n_s$,当 $\eta\approx1$ 时,其中第一项(由 $\Delta\hat{n}$贡献的)要比第二项(由散粒噪音贡献的)大得多.另外,我们还看到,$L_{\mathrm{I}}(t)$和 $L_{\mathrm{II}}(t)$中的相关时间$\dfrac{1}{\kappa(1-1/\eta)}$都随着 $\eta$ 的增加而减少,但始终比 $1/\kappa$ 要大.

---

① 或简单地在略去小涨落量后将 $\hat{a}$和 $\hat{a}^{\dagger}$ 分别用$\sqrt{n_s}e^{\mp i\phi}$代入,亦可得出(8.6.52)式最后的结果.

最后,我们列出输出流相关函数的一般公式①:

$$\langle \hat{I}(t)\hat{I}(0)\rangle = \kappa n_s \delta(t) + \kappa^2 g^{(2)}(t), \tag{8.6.55}$$

其中的 $g^{(2)}(t)$定义为

$$g^{(2)}(t) = \begin{cases} \langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}(0)\rangle, 当\ t > 0\ 时, \\ \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0)\hat{a}(t)\rangle, 当\ t < 0\ 时, \end{cases} \tag{8.6.56}$$

$\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 为腔内场的算符.

我们看一个简单的情况,即腔内光场处于相干态.这时 $g^{(2)}(t) = (\alpha^* \alpha)^2$.由 $\langle \hat{I}(t)\rangle = \kappa(\alpha^* \alpha) \equiv I$,故有 $\kappa^2 g^2(t) = I^2$.于是(8.6.55)式可化为

$$\langle \Delta\hat{I}(t)\Delta\hat{I}(0)\rangle = \kappa n_s \delta(t), \quad \Delta\hat{I}(t) \equiv \hat{I}(t) - I, \tag{8.6.57}$$

对应于输出流的涨落谱为白谱,即其噪音为单纯的散粒噪音.实验工作者常按此来判断腔内单模光场是否为相干态.

值得注意的是 $g^{(2)}(t)$定义中算符排列的顺序.首先,所有的吸收算符都排在发射算符的右边.吸收算符又按编时顺序排列,发射算符则按反编时编列(注意在非自由场情况 $\hat{a}(t)$与 $\hat{a}(0)$是不能对易的.$\hat{a}^\dagger(t)$与 $\hat{a}^\dagger(0)$当然也不能对易).吸收和发射算符的上述排列特称为“正规-编时”排列.在物理意义上,$g^{(2)}(t)$与腔内场的强度相关函数成正比(参见§7.2).关于光子数涨落与强度涨落的关系,我们已在§7.3讨论过,参见(7.3.25)式的下文.本节还给出了输出流 $\hat{I}$与腔内光子数 $\hat{n}$ 的关系,见(8.6.44)式.

## §8.7　原子束流与腔内场的作用　Scully-Lamb 的激光模型

激光的全量子理论是在20世纪60年代由 Haken, Lamb 及贝尔实验室(Lax, Louisell)三个学群分别建立起来的.Haken 学群和贝尔实验室学群采用的是朗之万方程和福克尔-普朗克方程的处理方法,而 Lamb 学群则是求解激光模的密度算符主方程.

在本节中我们将介绍 Lamb 学群的理论研究,其模型是:通过不断注入处在激发态的二能级原子来激励单模腔场以生成激光.理论处理采用作用图象中的主方程.

### 1. 简单化的腔内场主方程

按上面的说明,设注入的二能级原子都处在激发态(即上能级).我们先来考察

---

① 参见 McCumber, Phys. Rev. **141**, 306, (1966), Smirnov and Sokolov, Sov. Phys. JETP, **43**, 1095(1976).

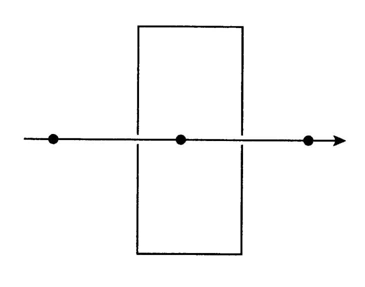


图 8.7.1 通过注入激发态原子来产生腔内激光场

一个简单情况,即所有原子都具有同样的速度,它们飞越腔的时间为相同的值 $\tau$. 另外,我们还假定原子与腔模共振(原子的跃迁频率与单模腔场的频率相同),并设原子是逐个地与腔场相互作用的,即腔内不会同时有两个原子.

下面来考虑某个注入腔内的原子与光场的作用.

如前所述,取作用图象,并对原子与场的耦合作旋波近似. 在原子与腔模共振的情况下,作用图象中 $\hat{H}_{\text{int}}$亦与 $t$ 无关.

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g(\hat{a}\,\hat{\sigma}_{+} + \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}), \tag{8.7.1}$$

其中 $g$ 取为实数[对单模场总可选择原子波函数的相位来实现,参见(3.1.50)第一式]. 在原子刚注入时,原子加光场总体的密度算符为

$$\hat{\rho}_T = \hat{\rho}\otimes|2\rangle\langle 2|, \tag{8.7.2}$$

其中$|2\rangle$为原子在上能级的状态矢量. $\hat{\rho}$为光场的密度算符,设为

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n}\rho_{mn}\,|m\rangle\langle n|, \tag{8.7.3}$$

$|m\rangle$和$\langle n|$为光子数本征态.

在 $g\tau\ll 1$ 的情况下(如前所指出的,$\tau$ 为原子在腔内的时间),作用图象中的演化算符可以近似成(到二级微扰)

$$\hat{U}(\tau) = 1 - \mathrm{i}g(\hat{a}\,\hat{\sigma}_{+} + \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-})\tau - \frac{1}{2}g^2(\hat{a}\,\hat{\sigma}_{+} + \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-})^2\tau^2. \tag{8.7.4}$$

利用

$$\hat{\sigma}_{-}^2 = 0,\quad \hat{\sigma}_{+}^2 = 0,\quad \hat{\sigma}_{+}\,\hat{\sigma}_{-} = |2\rangle\langle 2|,\qquad \hat{\sigma}_{-}\,\hat{\sigma}_{+} = |1\rangle\langle 1|, \tag{8.7.5}$$

即可将(8.7.4)式化为

$$\hat{U}(\tau) = 1 - \mathrm{i}g\tau(\hat{a}\,\hat{\sigma}_{+} + \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}) - \frac{1}{2}g^2\tau^2(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,|1\rangle\langle 1| + \hat{a}\,\hat{a}^{\dagger}\,|2\rangle\langle 2|). \tag{8.7.6}$$

当一个原子飞越后,$\hat{\rho}_T$ 的改变即为

$$\Delta\hat{\rho}_T = \hat{U}(\tau)\hat{\rho}_T\hat{U}^{\dagger}(\tau) - \hat{\rho}_T = -\mathrm{i}g\tau[\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\,|1\rangle\langle 2| - \hat{\rho}\,\hat{a}\,|2\rangle\langle 1|]$$
$$+ g^2\tau^2\left[\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\,\hat{a}\,|1\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\,|2\rangle\langle 2| - \frac{1}{2}\hat{\sigma}\,\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger}\,|2\rangle\langle 2|\right]. \tag{8.7.7}$$

对原子自由度求迹后,上式右方第一项为零(这是要取到二级微扰的原因),于是得

$$\Delta\hat{\rho}_T = \frac{1}{2}g^2\tau^2[2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\,\hat{a} - \hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{a}\,\hat{a}^\dagger] \equiv \hat{\mathscr{U}}_0\hat{\rho}. \tag{8.7.8}$$

$\hat{\mathscr{U}}_0$ 代表作用在 $\hat{\rho}$ 上的超算符,其作用如上式所定义.若将(8.7.3)式代入,还可将上式化为

$$\hat{\mathscr{U}}_0\hat{\rho} = g^2\tau^2\sum_{m,n}[\sqrt{mn}\rho_{m-1,n-1} - \frac{1}{2}(m+n+2)\rho_{mn}]\,|\,m\rangle\langle n\,|\,. \tag{8.7.9}$$

当上式右方 $\rho$ 的矩阵元的脚标有一个为负值时,该矩阵元应即取为零.

当原子注入率(即单位时间内平均注入的原子数)为 $r_a$ 时,$\hat{\rho}$ 的变化率即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = r_a\hat{\mathscr{U}}_0\hat{\rho} = \frac{1}{2}g^2\tau^2r_a[2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\,\hat{a} - \hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{a}\,\hat{a}^\dagger], \tag{8.7.10}$$

此 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}$ 通常称为粗粒式变化率.上式用 $\hat{\rho}$ 的矩阵元表示时,结果即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{mn} = \frac{1}{2}g^2\tau^2r_a[2\sqrt{mn}\rho_{m-1,n-1} - (m+n+2)\rho_{mn}]. \tag{8.7.11}$$

如果注入的原子不是处在上能级而是处在下能级,则通过类似的推导可以得出(设原子注入率为 $r_b$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = \frac{1}{2}g^2\tau^2r_b[2\hat{a}\,\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}]. \tag{8.7.12}$$

我们看到(8.7.10)和(8.7.12)式分别与(6.5.4)式中的前后两项具有相同的形式.在(6.5.4)式中除了热光引起的腔场耗散和激励(正比于 $\bar{n}_T$ 的部分)以外,还包括无热光即 $\bar{n}_T=0$ 时腔场逸出所引起的耗散.在我们这里也会有这一耗散项.在只注入处于上能级的原子的情况下,考虑了腔场逸出的方程就化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = \frac{1}{2}g^2\tau^2r_a[2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\,\hat{a} - \hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{a}\,\hat{a}^\dagger] + \frac{\kappa}{2}(2\hat{a}\,\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}). \tag{8.7.13}$$

它就是我们所谓的简单化的腔内场的主方程.

(8.7.10)式实际上存在一个疑问.可以想到,腔内场的涨落应与原子注入的涨落有关.既然腔场的全部信息都包括在 $\hat{\rho}$ 之中,$\hat{\rho}$ 所满足的方程应与注入原子的统计性有关系.那么(8.7.10)式究竟对应于怎样的原子注入的统计性呢? 1984 年 Golubev 和 Sokolov 指出①,把粗粒式变化率当作瞬时变化率是有条件的,只当原子的注入具有泊松统计性时(8.7.10)式才成立,具体说明如下.

当在 $t-t_0$ 时间内只有一个原子注入时,按照(8.7.8)式,将使光场密度算符

① Golubev and Sokolov, Sov. Phys. JETP **60**,234(1984)

从 $\hat{\rho}(t_0)$变到$(1+\hat{\mathscr{U}}_0)\hat{\rho}(t_0)$. 因此若注入的原子数为 $k$,就将使 $\hat{\rho}(t_0)$变到$(1+\hat{\mathscr{U}}_0)^k\hat{\rho}(t_0)$. 当 $k$ 的值具有统计分布 $P(k)$,下一步应将它按 $P(k)$作平均. 在泊松统计的情况下,

$$P(k) = \mathrm{e}^{-r_a(t-t_0)}\frac{1}{k!}[r_a(t-t_0)]^k. \tag{8.7.14}$$

于是即得

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k P(k)(1+\hat{\mathscr{U}}_0)^k\hat{\rho}(t_0) = \sum_k \mathrm{e}^{-r_a(t-t_0)}\frac{1}{k!}[r_a(t-t_0)(1+\hat{\mathscr{U}}_0)]^k\hat{\rho}(t_0)$$

$$= \mathrm{e}^{r_a(t-t_0)\hat{\mathscr{U}}_0}\hat{\rho}(t_0). \tag{8.7.15a}$$

这样才能通过对 $t$ 的微商得出(8.7.10)式即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = r_a\hat{\mathscr{U}}_0\hat{\rho}(t). \tag{8.7.15b}$$

如果原子注入具有其他的统计性,例如 $k$ 的取值是某个确定的值(规则注入)时,$r_a = \dfrac{k}{t-t_0}$,$\hat{\rho}(t)$就将为

$$(1+\hat{\mathscr{U}}_0)^k = (1+\hat{\mathscr{U}}_0)^{r_a(t-t_0)} = \mathrm{e}^{r_a(t-t_0)\ln(1+\hat{\mathscr{U}}_0)},$$

这时 $\hat{\rho}$的(注入)改变率即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = r_a\ln(1+\hat{\mathscr{U}}_0)\hat{\rho}. \tag{8.7.16}$$

Golubev 和 Sokolov 利用这一结果,再补上原子从激光能级上的衰变项和光子从腔逸出所导致的耗散项,就得出消除了抽运噪音(规则注入)的激光场主方程. 我们将在附录 I 中对该方程进行讨论和研究. 这里仍回到(8.7.13)式. 以上讨论只是为说明该式适用的条件.

对于(8.7.10)和(8.7.12)式,还有一个问题值得讨论. 前已指出它们与马尔可夫近似下的主方程(6.5.4)具有相同的形式. (6.5.4)式处理的是热光驱动下的单模腔场,而本节的情况则是激发态原子束驱动的单模腔场. 热光是具有广谱的库,而这里的各个原子具有近单色的频率,为何方程的形式相似? 对于这个问题可以这样来理解:原子与光场作用时间短($g\tau \ll 1$),从而等效于较大的频宽. 另外,与光场相作用的原子又不断更新,使原子束像一个状态迅速恢复的库. 这两个因素合在一起就使得上述原子束流的作用效果与热光相似.

## 2. 简单化的主方程的问题,具有饱和机制的主方程

腔内光子数的分布概率 $P(n)$也就是 $\rho_{nn}$. 由简单化的主方程(8.7.13)(并利用(8.7.10)式)即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{n} | \hat{\rho}(t) | n\rangle = r_a\langle n | \hat{\mathscr{U}}_0\hat{\rho}(t) | n\rangle + \frac{\kappa}{2}[2\langle n | \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger | n\rangle$$

$$-\langle n \mid \hat{n}\hat{\rho}(t) \mid n\rangle - \langle n \mid \hat{\rho}(t)\hat{n} \mid n\rangle].$$

上式右方第一项的值可从(8.7.11)式右方得出(取 $m=n$),上式右方第二项亦可通过类似的计算得出.于是上述方程就化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{nn}(t) = R[n\rho_{n-1,n-1}(t) - (n+1)\rho_{nn}(t)]$$
$$- \kappa[n\rho_{nn}(t) - (n+1)\rho_{n+1,n+1}(t)], \qquad (8.7.17)$$

其中

$$R \equiv g^2\tau^2\gamma_a.$$

可称为原子束对单模腔场的"自发辐射率"①.

(8.7.17)式右方第一小项 $Rn\rho_{n-1,n-1}$ 代表(由于原子束的作用)腔场从 $n-1$ 个光子状态跃迁到 $n$ 个光子状态所导致的 $\rho_{nn}$ 的增加率,因而与 $\rho_{n-1,n-1}$ 成正比.其系数可分成两部分.其中的 $R(n-1)$ 代表原子束的受激辐射率,剩下的 $R$ 为自发辐射率.右方第二小项中的 $R(n+1)\rho_{nn}$ 代表从腔场从 $n$ 个光子状态跃迁到 $n+1$ 个光子所导致的 $\rho_{nn}$ 的减少率.同样,系数 $R(n+1)$ 为原子束受激辐射率与自发辐射率的和.右方第三小项 $\kappa n\rho_{nn}$ 代表由于光子逸出腔场从 $|n\rangle$ 态变成 $|n-1\rangle$ 态所导致的 $\rho_{nn}$ 的减少.第四小项 $\kappa(n+1)\rho_{n+1,n+1}$ 代表由于光子逸出腔场从 $|n+1\rangle$ 态变成 $|n\rangle$ 所导致的 $\rho_{nn}$ 的增加.以上四个过程如图 8.7.2 所示,它们合起来就给出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{nn}$.

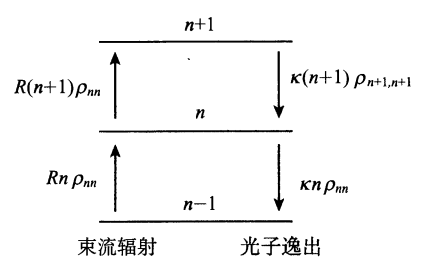


图 8.7.2　束流辐射和光子逸出导致的腔场状态变化

细致平衡条件为

$$R(n+1)\rho_{nn} = \kappa(n+1)\rho_{n+1,n+1},$$
$$Rn\rho_{n-1,n-1} = \kappa n\rho_{nn}.$$

第一式代表 $|n\rangle$ 与 $|n+1\rangle$ 之间的细致平衡,第二式代表 $|n-1\rangle$ 与 $|n\rangle$ 之间的细致平衡,这两式实际是一样的.于是稳恒的条件是

$$\rho_{nn} = \frac{R}{\kappa}\rho_{n-1,n-1}. \qquad (8.7.18)$$

---

① 单个原子的自发辐射率由 $g^2\tau$ 标志(这里的 $\tau$ 相应于 p.354 注中的 $\frac{2}{\gamma}$),乘上该原子在腔内辐射时间 $\tau$,再乘上原子的注入率 $r_a$,即可称为原子束的自发辐射率.

当$\frac{R}{\kappa}<1$时,稳恒态是可以达到的,这时

$$\rho_{nn}=\left(\frac{R}{\kappa}\right)^n\rho_{00},$$

其中 $\rho_{00}$可通过归一化条件来确定.由此得出

$$\rho_{nn}=\left(1-\frac{R}{\kappa}\right)\left(\frac{R}{\kappa}\right)^n. \tag{8.7.19}$$

从而稳恒时腔内光场为混杂光场,其平均光子数为

$$\langle n\rangle=\frac{1}{\frac{\kappa}{R}-1}. \tag{8.7.20}$$

再看$\frac{R}{\kappa}>1$的情况.这时,由(8.7.18)式所计算出的 $\rho_{nn}$不能归一化,因按(8.7.18)式光子数 $n$ 愈大,其相应的概率 $\rho_{nn}$愈大.这表明稳恒解不再存在.出现这一结果的原因是,这个简单化的主方程只适用于光子数不太大的情况[见(8.7.28)式],其中没有光子数饱和的机制.具有饱和机制的主方程将形如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{nn}=R\left(\frac{n}{1+n/n_{\text{sat}}}\rho_{n-1,n-1}-\frac{n+1}{1+(n+1)/n_{\text{sat}}}\rho_{nn}\right)-\kappa[n\rho_{nn}-(n+1)\rho_{n+1,n+1}]. \tag{8.7.21}$$

在下一小节将介绍的 Scully-Lamb 主方程就具有(8.7.21)式的形式.这里只给出(8.7.21)式的稳恒解.

现在细致平衡条件已改变为

$$\rho_{nn}=\frac{R}{\kappa}\frac{1}{1+n/n_{\text{sat}}}\rho_{n-1,n-1}. \tag{8.7.22}$$

此式表明,右方的因子$\frac{R}{\kappa}$在大于1时(代表阈以上)是使得 $\rho_{nn}/\rho_{n-1,n-1}$变大(与1相比),而因子$\frac{1}{1+n/n_{\text{sat}}}$又将使 $\rho_{nn}/\rho_{n-1,n-1}$变小.从而使 $\rho_{nn}$的极大值出现在某个有限的$n_{\max}$处,

$$n_{\max}\approx\left(\frac{R}{\kappa}-1\right)n_{\text{sat}}. \tag{8.7.23}$$

在上式中我们用了符号≐,代表 $n_{\max}$等于最接近$\left(\frac{R}{\kappa}-1\right)n_{\text{sat}}$的整数.

从(8.7.22)式即可求出

$$\rho_{nn}=\left(\frac{Rn_{\text{sat}}}{\kappa}\right)^n\frac{1}{(n+n_{\text{sat}})!}C, \tag{8.7.24}$$

其中 $C$ 为归一化常数. 上述激光光子数分布与泊松分布的比较如图 8.7.3 所示(引自 Scully and Lamb, Phys. Rev. **159**, 208(1967)).

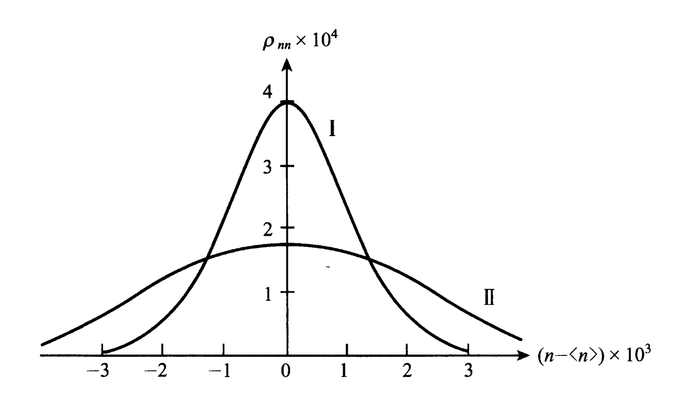



图 8.7.3　Ⅰ. 泊松分布　Ⅱ. 阈以上 20% 情况激光光子数分布

再来看, $\frac{R}{\kappa}<1$ 的情况, 这时按照(8.7.22)式, $\rho_{nn}$ 为 $n$ 的单调递减函数. 这也可以从解(8.7.24)式看出. 因为

$$\frac{n_{\text{sat}}^{n}}{(n+n_{\text{sat}})!}=\frac{1}{n_{\text{sat}}!}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_{\text{sat}}}\right)\left(1+\frac{2}{n_{\text{sat}}}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n_{\text{sat}}}\right)},\qquad(8.7.25)$$

它和 $\left(\frac{R}{\kappa}\right)^n$ 都随着 $n$ 增加而减少. $\rho_{nn}$ 的图像亦形如图 8.4.4 左方的曲线.

显然, 由(8.7.24)式给出的光子数分布并不就是泊松分布(参见图 8.7.3). 只当 $\frac{R}{\kappa}\gg 1$ 时才近似等于泊松分布, 这时 $n_{\max}$ 要比 $n_{\text{sat}}$ 大很多[参见(8.7.44)式]. 通常的气体激光器并不是工作在这种情况.

(8.7.23)式只当 $\frac{R}{\kappa}>1$ 才成立. 如果 $\frac{R}{\kappa}<1$, 按该式计算的 $n_{\max}$ 为负值, 因此失去意义. 这时 $\rho_{nn}$ 的最大值即为 $n=0$ 点如图 8.4.4 所示. 因此, 可以定义 $R$ 的阈值为

$$R_c=\kappa.\qquad(8.7.26)$$

当 $R>R_c$ 并离开 $R_c$ 有一定的距离. 即在"阈区"以上时, 所产生的光场才是激光.

**3. Scully-Lamb 的激光主方程**

在 Scully-Lamb 的激光理论模型中, 原子不是以确定速度飞越腔, 而是进入腔后就停留在腔内, 而且无论原子是处在上能级还是下能级都会衰变到其他能级. 在

衰变到其他能级之后就停止了与激光模的作用.这样原子与激光模的相互作用时间 $\tau$ 将由上述衰变所决定,成为一个随机值.当然,为维持激光器的运转,仍需不断注入上能级的原子.

为简单计,Scully 和 Lamb 设上、下两能级的衰变率是相同的,其平均寿命用 $\tau_0$ 表示,并且按维格纳-韦斯科普夫定律,假设 $\tau$ 的归一化分布为

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_0}e^{-\tau/\tau_0}. \tag{8.7.27}$$

他们还假定原子是逐个地与腔场相作用,入射进来的原子处于上能级.它通过发射腔模光子而跃迁到下能级,再吸收光子回到上能级,如此等等,即在上下两能级之间作拉比振荡,直到衰变出局.如果作用时间为 $\tau$,则(8.7.9)式中的 $\hat{\mathscr{U}}_0$ 将修改成 $\hat{\mathscr{U}}$

$$\begin{aligned}(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{mn} =& \sin(g\tau\sqrt{m})\sin(g\tau\sqrt{n})\rho_{m-1,n-1} \\ &+ [\cos(g\tau\sqrt{m+1})\cos(g\tau\sqrt{n+1}) - 1]\rho_{mn}.\end{aligned} \tag{8.7.28}$$

我们看到,只当 $g\tau\sqrt{m}$ 和 $g\tau\sqrt{n}$ 都比 1 小得多时,上式才化到(8.7.11)式.下面先用小号字来简要地说明上式的推导,然后再将(8.7.28)式按(8.7.27)式所给出的 $p(\tau)$ 作平均.

推导过程其实与§6.2 节相似,只是这里初态原子是在上能级.我们先来考虑原子与光场的基本作用过程:初态中光子处于数态 $|m\rangle$,原子处于上能级 $|2\rangle$.设相互作用到 $t$ 时刻时原子加单模光场的总体状态为 $|t\rangle_T$,

$$|t\rangle_T = a(t)|2\rangle|m\rangle + b(t)|1\rangle|m+1\rangle. \tag{8.7.29}$$

由于

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}}|2\rangle|m\rangle &= \hbar g\sqrt{m+1}|1\rangle|m+1\rangle, \\ \hat{H}_{\text{int}}|1\rangle|m+1\rangle &= \hbar g\sqrt{m+1}|2\rangle|m\rangle,\end{aligned} \tag{8.7.30}$$

故即得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a(t) &= -ig\sqrt{m+1}b(t), \\ \frac{d}{dt}b(t) &= -ig\sqrt{m+1}a(t).\end{aligned} \tag{8.7.31}$$

由此及初条件($a(0)=1, b(0)=0$)解出

$$a(t) = \cos(gt\sqrt{m+1}), \qquad b(t) = -i\sin(gt\sqrt{m+1}). \tag{8.7.32}$$

当作用时间为 $\tau$ 时,总体状态即变成

$$|\tau\rangle_T = \cos(g\tau\sqrt{m+1})|2\rangle|m\rangle - i\sin(g\tau\sqrt{m+1})|1\rangle|m+1\rangle. \tag{8.7.33}$$

这就是我们所需要的基本解.一般情况下,光场的初始态由密度 $\sum_{m,n}\rho_{mn}|m\rangle\langle n|$ 表示.于是"光场加入射原子"总体的初态为

$$\hat{\rho}_T(0) = \sum_{m,n}\rho_{mn} \mid 2\rangle \mid m\rangle\langle n \mid \langle 2 \mid .$$

将上面求出的结果分别应用到初态为$|2\rangle|m\rangle$和$|2\rangle|n\rangle$的情况，即可得出在上述初态下的$\hat{\rho}_T(\tau)$:

$$\hat{\rho}_T(\tau) = \sum_{m,n}\rho_{mn}[\cos(g\tau\sqrt{m+1}) \mid 2\rangle \mid m\rangle - \mathrm{i}\sin(g\tau\sqrt{m+1}) \mid 1\rangle \mid m+1\rangle]$$
$$\times [\cos(g\tau\sqrt{n+1})\langle 2 \mid \langle n \mid + \mathrm{i}\sin(g\tau\sqrt{n+1})\langle 1 \mid \langle n+1 \mid]. \qquad (8.7.34)$$

在对原子自由度求迹后，得出的光场的密度算符为

$$\hat{\rho}(\tau) = \sum_{m,n}\rho_{mn}[\cos(g\tau\sqrt{m+1})\cos(g\tau\sqrt{n+1}) \mid m\rangle\langle n \mid$$
$$+ \sin(g\tau\sqrt{m+1})\sin(g\tau\sqrt{n+1}) \mid m+1\rangle\langle n+1 \mid], \qquad (8.7.35)$$

并可改写成

$$\hat{\rho}(\tau) = \sum_{m,n}[\rho_{mn}\cos(g\tau\sqrt{m+1})\cos(g\tau\sqrt{n+1})$$
$$+ \rho_{m-1,n-1}\sin(g\tau\sqrt{m})\sin(g\tau\sqrt{n})] \mid m\rangle\langle n \mid . \qquad (8.7.36)$$

$\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho}$等于$\hat{\rho}(\tau)-\hat{\rho}(0)$，于是即得出(8.7.28)式.推导完毕.

对于$m=n$的情况，从(8.7.28)式即得出

$$(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{nn} = \sin^2(g\tau\sqrt{n})\rho_{n-1,n-1} - \sin^2(g\tau\sqrt{n+1})\rho_{nn}. \qquad (8.7.37)$$

当(8.7.28)和(8.7.37)式中的$\tau$是一个随机数，其概率分布如(8.7.27)式所示时，我们要将(8.7.37)式对$\tau$作平均.将该式中的三角函数用指数函数表示后即可求出

$$(\hat{\bar{\mathscr{U}}}\hat{\rho})_{nn} \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,\frac{1}{\tau_0}\mathrm{e}^{-\tau/\tau_0}(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{nn} = 2g^2\tau_0^2\left[\frac{n}{1+n/n_{\mathrm{sat}}}\rho_{n-1,n-1} - \frac{n+1}{1+(n+1)/n_{\mathrm{sat}}}\rho_{nn}\right], \qquad (8.7.38)$$

其中

$$n_{\mathrm{sat}} = \frac{1}{4g^2\tau_0^2}. \qquad (8.7.39)$$

与(8.4.5)式中的$n_{\mathrm{sat}}$相比，就只是将$\gamma\gamma_3$换成了$\frac{1}{\tau_0^2}$，而$\frac{1}{\tau_0}$也就是原子上下能级的衰率.

(8.7.38)式代表一个入射的上能级原子平均起来所引起的腔场$\rho_{nn}$的改变.将它乘上$r_a$，即得出$\rho_{nn}$的粗粒式变化率，其结果即由(8.7.21)式第一项所示.其中

$$R = 2r_a g^2\tau_0^2. \qquad (8.7.40)$$

加上阻尼项后即得出 Scully-Lamb 的激光主方程(8.7.21).

阈条件(8.7.26)式也可表示为

$$r_a > r_a^{(c)}, \qquad (8.7.41)$$

其中

$$r_a^{(c)} = \frac{\kappa}{2g^2\tau_0^2}. \tag{8.7.42}$$

由于此处的 $r_a$ 相当于朗之万方程中的 $Np$，而 $\tau_0^2$ 相当于其中的 $\frac{1}{\gamma\gamma_3}$[见(8.7.39)式下]，于是(8.7.41)式也就相当于朗之万方程中的

$$Np > \frac{\kappa\gamma\gamma_3}{2g^2},$$

亦即

$$\eta > 1. \tag{8.7.43}$$

上式中的 $\eta$ 为朗之万理论中的参数即 $\frac{2Npg^2}{\kappa\gamma\gamma_3}$. 根据(8.7.42)式下面所述的对应关系，$\eta$ 也与 $\frac{R}{\kappa}$ 相对应. 这样(8.7.23)式也就对应于

$$n_{\max} = (\eta - 1)n_{\text{sat}}, \tag{8.7.44}$$

从而 $n_{\max}$ 也就与朗之万方程中的 $\langle n \rangle_s$ 相对应，参见(8.4.7)式.

以上由 Scully-Lamb 主方程所计算的结果与前几节从朗之万方程得的结果是一致的. 另外，由于 $\langle \hat{E}(t) \rangle$ 可用 $\rho_{n,n\pm1}(t)$ 表示出来. 故在求出 $\rho_{n,n\pm1}(t)$ 后就能计算出腔场的谱线宽度.

Scully-Lamb 主方程方法的优点是，计算起来比较容易，在求出光子分布后即可求出平均光子数和方差，而且不需作半经典近似和小涨落近似. 至于朗之万方程方法的优点则是，它通过与经典布朗粒子运动的联系而给出直观的图像，如光场相位的漂移如同布朗振子沿势谷周向的扩散，而“振子”势函数对“位移”的依赖关系又与朗道二级相变理论中自由能对序参数的依赖关系相似. 从而间接地表明光场中的相干成分与“有序参量”的等当性. 另外，在海森伯图象中来表示相关函数也比较直接了当.

最后，让我们回顾一下，在上面推导中拉比振荡如何导致了光子数的饱和. 为此来看(8.7.37)式中考虑了拉比振荡的($\rho_{n-1,n-1}$ 的)系数 $\sin^2(g\tau\sqrt{n})$ 随 $n$ 的变化. 在光子数小时($n \ll \frac{1}{g^2\tau^2}$)它可近似成 $g^2\tau^2 n$，此系数随着 $n$ 而线性地增长，亦即原来 $(\hat{\mathcal{U}}_0\hat{\rho})_{nn}$ 中第一项的情况[见(8.7.9)式]. 而 $\sin^2(g\tau\sqrt{n})$ 在 $n$ 达到 $\pi^2/4g^2\tau^2$ 时增长就停止，继而减小，降到零后又上升，形成在 1 与 0 之间的周而复始的升降. 当作用时间 $\tau$ 有一个分布时，在对 $\tau$ 平均后，其值除了在 $n \lesssim n_{\text{sat}}$ 阶段[$n_{\text{sat}}$ 值见(8.7.39)式，相当于朗之万理论中的 $\frac{\gamma\gamma_3}{4g^2}$]仍明显地随 $n$ 增长以外，此后的平均值就趋于 1/2. 此值正好就是 $n \gg n_{\text{sat}}$ 时，具有饱和机制的(8.7.38)式中 $\rho_{n-1,n-1}$ 的系

数.(8.7.37)式中 $\rho_{nn}$ 的系数的情况也一样,不再重复讨论.

由此可见,$n_{\text{sat}}$具有上述临界值的意义就是因为当 $n<n_{\text{sat}}$时,在"平均作用时间"$\tau_0$ 以内(即 $0<\tau<\tau_0$),$g\tau\sqrt{n}$总是小于 $\pi/2$,即 $\sin^2(g\tau\sqrt{n})$总是处在随 $n$ 增大而增长的区域以内.当 $n$ 达到 $n_{\text{sat}}$时,$g\tau_0\sqrt{n}$达到了$\frac{\pi}{2}$,$\sin^2(g\tau_0\sqrt{n})$也就达到了它的第一个最大值.$n$ 再大,$\sin^2(g\tau_0\sqrt{n})$就开始减小,并进入振荡.这就使得 $n_{\text{sat}}$具有了临界值的意义.

前面已经指出,当 $n$ 比 $n_{\text{sat}}$大得多时,$\sin^2(g\tau\sqrt{n})$在 $0<\tau\lesssim\tau_0$ 的时间内已在 0 与 1 之间经历了多次上升与下降,从而使其平均值趋近于 1/2.

## 4. 关于激光噪音的小结

我们看到,激光的噪音除了光的量子性和原子-光子相互作用的随机性这一本原性原因外(§5.6 中的讨论表明,即使电流为确定的 $C$ 数函数.它所产生的光场亦具有噪音:光子数具有泊松分布),还有三个噪音源:

(1) 原子抽运噪音　在量子朗之万理论中,此噪音对应于(8.2.54)第三式 $Np$ 项的涨落力[参见(8.2.56c)式中 $\hat{G}_{33}$ 内第二项和(8.2.56a)式中 $\hat{G}_{+-}$ 内含 $p$ 的项],在§8.7 原子束流抽运理论中它对应于注入原子数有一统计分布[参见(8.7.14)式].

(2) 原子阻尼噪音　在量子朗之万理论中为"$-\gamma_3\hat{\Sigma}_3$ 和 $-\hat{\gamma}\Sigma_{\pm}$"所对应的涨落力.在§8.7 原子束流抽运理论中,对应于原子从产生激光的能级**随机**地衰减到其他能级[参见(8.7.27)式].

(3) 光子从腔内逸出的随机性　在激光生成中,也存在约束噪音的机制.从量子朗之万理论来看,在阈值以上,原子反转数 $\Sigma_3$ 的增长将驱使光子数增长,而光子数的增长又将导致反转数 $\Sigma_3$ 的减少[参见(8.4.2)式],结果不仅导致光子数的饱和,也对光子数的涨落起了抑制作用.在图 8.4.1 中体现在环形谷对位移$|\alpha|$的限制.从原子束流抽运理论来看,"阈值以上"表现为(8.7.22)式中的因子$\frac{R}{\kappa}>1$,它驱使 $\rho_{nn}/\rho_{n-1,n-1}$变大(与 1 相比),而因子$\frac{1}{1+n/n_{\text{sat}}}$则驱使 $\rho_{nn}/\rho_{n-1,n-1}$减小(此因子来源于光子数增加时,原子在上下能级间的拉比振荡加快,导致平均反转数的减少),从而光子数的散布(也就是噪音)受到限制.

# 附　　录

## A　耗散介质中爱因斯坦 $A$ 系数的修正和谱线的附加宽度①

Ⅰ. 原子的自发辐射是原子与光场相互作用的结果,因而自发辐射系数即(爱因斯坦 $A$ 系数)应当看作是“原子-光场”总体的特征函数.当原子处于不同的环境中时,由于光场的分布和演化会改变,自发辐射系数的值将有所不同.在此附录中我们将讨论原子处于耗散介质中时其自发辐射系数的修正.其中的原子加上光场作为一个开放的系统,而耗散介质则作为与它们相作用的库.

耗散介质中的光场仍可用平面波来展开,每个模由波矢 $\boldsymbol{k}$ 和偏振 $s$ 来标志,只是展开系数为 $t$ 的函数.在量子化以前,此展式即为

$$\boldsymbol{A}_T(\boldsymbol{x},t)=\sum_{ks}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\boldsymbol{e}_{ks}\left[a_{ks}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}+a_{ks}^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t}\right].\tag{A.1}$$

在介质的介电常数与 1 的差别可忽略的情况下,上式中的 $\omega$ 即等于 $kc$.介质的耗散表现在没有辐射源的情况下,$a_{ks}$ 和 $a_{ks}^*$ 为 $t$ 的衰减函数.它们的变化方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ks}(t)=-\frac{\kappa}{2}a_{ks}(t),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ks}^*(t)=-\frac{\kappa}{2}a_{ks}^*(t),\tag{A.2}$$

$\kappa$ 称为该模的衰减常数,一般是 $\omega$ 的函数.这是我们要将 $\boldsymbol{A}_T(\boldsymbol{x},t)$ 按具有确定频率的波来展开的原因.

以上看的是光场与耗散介质作用的情况.再来看介质中的原子.由于在介质中受到碰撞,原子的布居数将有变化,因此介质对于原子也构成一个库.

为简单起见,在此附录中只考察二能级原子的情况[1](在文献[2]中讨论过三能级的原子),我们假设稳恒时原子上下能级布居数之差为 $\sigma_3^{(s)}$.在量子化以后二能级原子与光场的作用可通过算符 $\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}_-$(参见§6.1)与各个模的算符 $\hat{a}_{ks}$ 和 $\hat{a}_{ks}^\dagger$ 的耦合来表示.相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=\hbar\sum_{ks}(g_{ks}\hat{\sigma}_+\hat{a}_{ks}+g_{ks}^*\hat{\sigma}_-a_{ks}^\dagger).\tag{A.3}$$

与光场算符 $\hat{a}_{ks}$、$\hat{a}_{ks}^\dagger$ 一样,我们从海森伯算符 $\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}_-$ 亦分出自由振动因子 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t}$.这样在耗散介质中运动方程可表示为(形式上与(8.3.1)式相似)

① 对这一问题的研究是引发于 Suckewer 等关于等离子体中自发辐射系数的实验(见参考文献[1]).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t) = -\frac{\kappa}{2}\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t) + \mathrm{i}g_{ks}\hat{\sigma}_{+}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} + \hat{F}^{\dagger}_{ks}(t) \tag{A.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_{+}(t) = -\gamma\hat{\sigma}_{+}(t) - \mathrm{i}\sum_{ks}g^{*}_{ks}\hat{\sigma}_3(t)\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} + \hat{\Gamma}_{+}(t) \tag{A.4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\sigma}_3(t) = -\gamma_3[\hat{\sigma}_3(t) - \sigma_3^{(s)}] + 2\sum_{ks}[\mathrm{i}g^{*}_{ks}\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t)\hat{\sigma}_{-}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} + \mathrm{h.c.}] + \hat{\Gamma}_3(t) \tag{A.4c}$$

$\hat{\sigma}_3$ 代表布居数反转算符.(A.4a),(A.4b)和(A.4c)等式也是另一种作用图象中的方程,因为其中各算符的变化完全是由于相互作用造成的.但它不是通常所说的相互作用图象,通常的相互作用图象是在薛定谔图象的基础上,从状态矢量中分出自由振动因子而得出的,而这里是在海森伯图象的基础上,从算符中分出自由振动因子而得出的.如上面所指出,这一图象中的方程我们在§8.3中已经用过.

上能级的布居数 $\hat{N}_2$ 等于$\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_3+1)$,于是上能级布居数的减少率为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}_2(t) = \gamma_3[\hat{N}_2(t) - N_{20}] - \sum_{ks}\mathrm{i}[g^{*}_{ks}\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t)\hat{\sigma}_{-}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} - \mathrm{h.c.}] - \hat{\Gamma}_3(t). \tag{A.5}$$

$N_{20}$ 即为自发辐射终结时上能级布居数的平均值,它与介质的温度有关.

(A.5)式右方第一项和第三项分别代表耗散和涨落所导致的上能级布居数减少率.第二项为原子与光场作用项的贡献,因而也就是自发辐射所导致的 $N_2$ 的减少率,我们将称它为"原子自发辐射率"算符并用 $\hat{I}_R(t)$表示[1],

$$\hat{I}_R(t) = -\mathrm{i}\sum_{ks}[g^{*}_{ks}\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t)\hat{\sigma}_{-}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} - \mathrm{h.c.}]. \tag{A.6}$$

从(A.4a)式可以解出 $\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t)$的积分表达式

$$\hat{a}^{\dagger}_{ks}(t) = \mathrm{i}g_{ks}\int_0^t\hat{\sigma}_{+}(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t'-\frac{1}{2}\kappa(t-t')}\mathrm{d}t' + \int_0^t\hat{F}^{\dagger}_{ks}(t')\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}(t-t')}\mathrm{d}t' + \hat{a}^{\dagger}_{ks}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}t} \tag{A.7}$$

代入(A.6)式后即得

$$\hat{I}_R(t) = \hat{I}_R^{(1)}(t) + \hat{I}_R^{(2)}(t) + \hat{I}_R^{(3)}(t),$$

其中

$$\hat{I}_R^{(1)}(t) = \sum_{ks}|g_{ks}|^2\int_0^t\hat{\sigma}_{+}(t')\hat{\sigma}_{-}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')-\frac{\kappa}{2}(t-t')}\mathrm{d}t' + \mathrm{h.c.} \tag{A.8a}$$

$$\hat{I}_R^{(2)}(t) = -\mathrm{i}\sum_{ks}g^{*}_{ks}\int_0^t\hat{F}^{\dagger}_{ks}(t')\hat{\sigma}_{-}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t-\frac{\kappa}{2}(t-t')}\mathrm{d}t' + \mathrm{h.c.} \tag{A.8b}$$

$$\hat{I}_R^{(3)}(t) = -\mathrm{i}\sum_{ks} g_{ks}^* \hat{a}_{ks}^\dagger(0)\hat{\sigma}_-(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t-\frac{\kappa}{2}t} + \mathrm{h.c.} \tag{A.8c}$$

在§6.1中，我们曾给出在马尔可夫近似下，有

$$\sum_{ks} |g_{ks}|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')} = (\gamma_A + 2\mathrm{i}\delta\omega_0)\delta(t-t'), t-t' \geqslant 0.$$

此式在物理学中又称为维格纳-韦斯科普夫近似，参见(6.1.17)、(6.1.28)、(6.1.33)等式. 于是，同样在马尔可夫近似下，这里可设

$$\sum_{ks} |g_{ks}|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')-\frac{1}{2}\kappa(t-t')} = (\gamma_A' + 2\mathrm{i}\delta\omega_0')\delta(t-t'), t-t' \geqslant 0. \tag{A.9}$$

代入(A.8a)式后并对 $t'$ 积分即得出(注意 $t'$ 的积分上限正好为 $t$，于是 $\delta(t-t')$ 的积分结果为$\frac{1}{2}$)

$$\hat{I}_R^{(1)}(t) = \gamma'_A \hat{\sigma}_+(t)\hat{\sigma}_-(t) = \gamma'_A \hat{N}_2(t) \tag{A.10a}$$

取期望值后即为

$$\langle \hat{I}_R^{(1)}(t)\rangle = \gamma'_A \langle \hat{N}_2(t)\rangle. \tag{A.10b}$$

关于 $\gamma_A'$ 的值参见(A.32)式.

为了推导$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle$，我们先从(A.4b)求出 $\hat{\sigma}_+(t)$ 的积分表达式

$$\hat{\sigma}_+(t) = -2\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} \sum_{k's'} g_{k's'}^* \hat{a}_{k's'}^\dagger \hat{\sigma}_3(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau + \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\hat{\Gamma}_-(\tau)\mathrm{d}\tau + \hat{\sigma}_+(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{A.11}$$

对上式取厄米共轭后再代入$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle$被积函数中，即将其中的$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(t)\rangle$化为

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(t)\rangle =& \mathrm{i}\sum_{k's'} g_{k's'}\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')a_{k's'}(\tau)\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\Gamma}_-(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau + \langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(0)\rangle\mathrm{e}^{-\gamma t}.\end{aligned} \tag{A.12}$$

A.12式中右方第二项显然为零，第三项中的$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(0)\rangle$当 $t'\geqslant 0$ 时亦为零，因 $\hat{\sigma}_-(0)$不可能与比它晚的 $\hat{F}_{ks}^\dagger$ 相关. 在对第一项作进一步推算中，我们将作近似：

$$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{a}_{k's'}(\tau)\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle \approx \langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle\langle \hat{\sigma}_3(\tau)\rangle. \tag{A.13}$$

这一处理是合理的，因为 $\hat{F}_{ks}^\dagger(t')$与 $\hat{a}_{k's'}(\tau)$的涨落间有直接的关联，至于 $\hat{\sigma}_3$ 则是通过它与 $a_{k's'}$ 的耦合才与 $\hat{F}_{ks}^\dagger$ 关联的，而电磁作用是比较弱的耦合.

将(A.7)式取共轭再代入到$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle$中，并注意到

$$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{a}_{k's'}(0)\rangle = 0, \quad 当\ t' \geqslant 0\ 时,$$

$$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(\tau')\rangle = 0, \quad 当\ t' > \tau'\ 时,$$

以及当 $t'=\tau'$时$\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(\tau')\rangle$至多为有限值，即可得出

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle =& -\mathrm{i}g_{k's'}^*\theta(\tau-t')\int_{t'}^{\tau}\langle \hat{F}_{ks}^\dagger(t')\hat{\sigma}_-(\tau')\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'_0-\omega_0)\tau-\kappa'(\tau-\tau')}\mathrm{d}\tau' \\ &+ \delta_{kk'}\delta_{ss'}2\kappa\bar{n}_T(\omega)\mathrm{e}^{-\kappa(\tau-t')}\theta(\tau-t'),\end{aligned} \tag{A.14}$$

其中 $\kappa'$ 代表 $\kappa(\omega')$，$\bar{n}_T(\omega)$ 代表温度为 $T$ 时频率等于 $\omega$ 的模中平均热光子数[参见(5.4.34)式].

利用以上结果即可将(A.12)式化为

$$\langle \hat{F}_{ks}^{\dagger}(t')\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle = \frac{1}{2}(\gamma'_A + 2\mathrm{i}\delta\omega)\theta(t-t')\int_{t'}^{t} \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\langle \hat{F}_{ks}^{\dagger}(t')\hat{\sigma}_{-}(\tau)\rangle\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau$$
$$+ \mathrm{i}\kappa\bar{n}_T(\omega)g_{ks}\theta(t-t')\int_{t'}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)-\frac{1}{2}\kappa(\tau-t')-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau. \quad \text{(A.15)}$$

此式为 $\langle \hat{F}_{ks}^{\dagger}(t')\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle$ 所满足的积分方程，由于我们只计算最初级的 $\hat{I}_R(t)$，在 $\gamma'_A/\gamma \ll 1$ 条件下，只需取该方程的零级解即(A.15)右方后一项：

$$\langle \hat{F}_{ks}^{\dagger}(t')\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle = \mathrm{i}\kappa\bar{n}_T(\omega)g_{ks}\theta(t-t')\int_{t'}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)-\frac{\kappa}{2}(\tau-t')-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau. \quad \text{(A.16)}$$

所忽去的是相对量级为 $\gamma'_A/\gamma$ 的小项($\gamma'_A$ 含电磁耦合常数).

当将(A.16)代入(A.8b)式中即得出

$$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle = \int_0^t \mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}\tau\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\sum_{ks}\kappa\bar{n}_T(\omega)\mid g_{ks}\mid^2$$
$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-\tau)-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)-\kappa(\tau-t')} + \text{h.c.} \quad \text{(A.17)}$$

在进一步计算中，我们按文献[3]P.326 注中提的方案，改变(A.17)式中对 $t'$ 和对 $\tau$ 的积分顺序，即将 $\int_0^t \mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}\tau$ 换成 $\int_0^{t'}\mathrm{d}\tau\int_0^{\tau}\mathrm{d}t'$. 因这两个二重积分的积分域实际相同. 这样，对 $t'$ 的积分可立即求出. (A.17)式于是化成

$$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle = \int_0^t \mathrm{d}\tau\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\sum_{ks}\bar{n}_T(\omega)\mid g_{ks}\mid^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-\tau)-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)}$$
$$\times(1-\mathrm{e}^{-\kappa\tau}). \quad \text{(A.18)}$$

再来看 $\langle \hat{I}_R^{(3)}(t)\rangle$，我们需要计算 $\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle$. 计算过程如下. 将 $\hat{\sigma}_{-}(t)$ 用(A.11)式的共轭式代入，再作近似

$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{a}_{k's'}(\tau)\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle \approx \langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle, \quad \text{(A.19)}$$

即可得出

$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle \approx \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\sum_{k's'}g_{k's'}\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau, \quad \text{(A.20)}$$

在此式的推导中我们应用了

$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\Gamma}_{-}(\tau)\rangle = 0, \quad \text{当 } \tau \geqslant 0 \text{ 时}$$
$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(0)\rangle = 0.$$

下一步是计算 $\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle$. 将(A.7)式的共轭式代入后得

$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{a}_{k's'}(\tau)\rangle = -\mathrm{i}g_{k's'}^{*}\int_0^{\tau}\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(\tau')\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)\tau-\frac{1}{2}\kappa'(\tau-\tau')}\mathrm{d}\tau + \delta_{kk'}\delta_{ss'}\bar{n}_T(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa\tau}. \quad \text{(A.21)}$$

将此式代回(A.20)式即得出 $\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle$ 亦满足一个积分方程：

$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle = \int_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} \sum_{k's'} |g_{k's'}|^2 \int_0^{\tau} \mathrm{d}\tau' \langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(\tau')\rangle\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)(\tau-\tau')-\frac{1}{2}\kappa'(\tau-\tau')} + \mathrm{i}g_{ks}\bar{n}_{\omega}(T)\int_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)-\frac{1}{2}\kappa\tau-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma'_A + 2\mathrm{i}\delta\omega')\int_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} \langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(\tau)\rangle\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle ,$$

$$+ \mathrm{i}g_{ks}\bar{n}_T(\omega)\int_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)-\frac{\kappa}{2}\tau-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle. \tag{A.22}$$

我们看到此积分方程与(A.15)式的相似性.同前一样,我们只取上述方程的零级解:

$$\langle \hat{a}_{ks}^{\dagger}(0)\hat{\sigma}_{-}(t)\rangle = \mathrm{i}g_{ks}\bar{n}_T(\omega)\int_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)-\frac{1}{2}\kappa\tau-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle, \tag{A.23}$$

并将它代回(A.8c)式所给出的$\langle \hat{I}_R^{(3)}(t)\rangle$,结果即得

$$\langle \hat{I}_R^{(3)}(t)\rangle = \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle \sum_{ks} |g_{ks}|^2 \bar{n}_T(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-\tau)-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)-\kappa\tau} + \mathrm{h.c.} \tag{A.24}$$

将$\langle \hat{I}_R^{(3)}(t)\rangle$与$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle$合起来有

$$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle + \langle \hat{I}_R^{(3)}(t)\rangle$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}\tau\langle\hat{\sigma}_3(\tau)\rangle \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} \sum_{ks}\bar{n}_T(\omega) |g_{ks}|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-\tau)-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)} + \mathrm{h.c.} \tag{A.25}$$

由于 $\bar{n}_T(\omega)$随 $\omega$ 改变较慢,我们将它取常数 $\bar{n}_T(\omega_0)$提到求和号外,即作近似

$$\sum_{ks}\bar{n}_T(\omega) |g_{ks}|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-\tau)-\frac{1}{2}\kappa(t-\tau)} \approx \bar{n}_T(\omega_0)(\gamma'_A + 2\mathrm{i}\delta\omega'_0)\delta(t-\tau),$$

于是即得

$$\langle \hat{I}_R^{(2)}(t)\rangle + \langle \hat{I}_R^{(3)}(t)\rangle = \bar{n}_T(\omega_0)\gamma'_A\langle\hat{\sigma}_3(t)\rangle = \bar{n}_T(\omega_0)\gamma'_A\langle\hat{N}_2(t) - \hat{N}_1(t)\rangle \tag{A.26}$$

将(A.26)式和(A.10b)式代入$\langle \hat{I}_R(t)\rangle$后得出

$$\langle \hat{I}_R(t)\rangle = \gamma'_A\langle\hat{N}_2(t)\rangle + \bar{n}_T(\omega_0)\gamma'_A\langle\hat{N}_2(t) - \hat{N}_1(t)\rangle \tag{A.27}$$

上式与真空中的形式相同,只是 $\gamma_A$ 换成了 $\gamma'_A$,右方第一项即代表自发辐射率而第二项代表热光子引起的“净受激辐射率”(受激辐射率减去吸收率),$\gamma'_A$ 即代表耗散介质中修正的爱因斯坦$A$ 系数.

下面给出 $\gamma'_A$ 的表达式.对(A.9)式取实部得

$$\gamma'_A\delta(t-t') = \mathrm{Re}\sum_{ks} |g_{ks}|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')-\frac{1}{2}\kappa(t-t')}. \tag{A.28}$$

将上式两边从 $-\infty$到 $t$ 对$t'$积分即得

$$\gamma'_A = \sum_{ks} \frac{2 \mid g_{ks} \mid^2 \kappa}{(\omega - \omega_0)^2 + \kappa^2}. \tag{A.29}$$

注意在耗散介质中，$\kappa$ 一般为 $\omega$ 的函数，根据(6.1.9)式

$$\sum_s \mid g_{ks} \mid^2 = \frac{1}{V}(\mid \boldsymbol{G}_k \mid^2 - \mid \boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{G}_k \mid^2), \tag{A.30a}$$

$$\boldsymbol{G}_k = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi_2^\dagger \nabla\phi_1 \mathrm{d}^3 x, \tag{A.30b}$$

在上式中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 可取为 1 的近似下，不难得出

$$\sum_s \mid g_{ks} \mid^2 = \frac{2\pi\omega_0^2}{V\hbar\omega}\sum_s \mid \boldsymbol{e}_{ks} \cdot \langle \boldsymbol{d}_{12} \rangle \mid^2 = \frac{3\pi c^3 \gamma_A}{2V\omega_0}\sin^2\theta \frac{1}{\omega}, \tag{A.31}$$

$\theta$ 为 $\boldsymbol{k}$ 与 $\langle \boldsymbol{d} \rangle_{21}$ 的夹角，于是按(6.1.18)式将 $\sum_k$ 化成对方向角和 $\omega$ 的积分后，就得出

$$\gamma'_A = \frac{\gamma_A}{\pi\omega_0}\int_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega \frac{\omega\kappa}{(\omega - \omega_0)^2 + \kappa^2}, \tag{A.32}$$

其中 $\omega_{\max}$ 为一截止频率代表将 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 可近似取作 1 的极限，故 $\omega_{\max}$ 大致上为 $\frac{c}{a}$，$a$ 为原子半径[如果不作 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = 1$ 的近似，则上限即应为 $\infty$，同时 $\gamma_A$ 应换成 $2\pi u(\omega)\frac{\omega_0}{\omega}$ 移到积分号内，$u(\omega)$ 为(6.1.21)式所定义的关联函数谱，在类氢原子从 2P 到 1S 的跃迁中，它的值由(6.1.35)式给出].

在电离气体(等离子体)的情况，$\gamma'_A$ 与 $\gamma_A$ 可以有相当大的相差，参见文献[1]和[2].

以上讨论中我们没有考虑耗散介质的介电性，即把它的介电常数或折射率近似取为 1，在文献[4]中，进一步考虑了这一效应，在某些情况下，其色散曲线可能出现类似固体中电磁耦子(polariton)的图样.

Ⅱ. 在耗散介质中，自发辐射的谱形和谱宽也会与普通介质中不同. 谱线的增宽有均匀和非均匀两类，这里考虑的将只是均匀增宽. 通常的均匀增宽有斯塔克增宽和功率增宽. 我们将指出在耗散介质中还有一种新的增宽，它来源于耗散所导致的光子有限寿命. 在物理上，此结果可以从测不准关系 $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$ 来理解. 光子的有限寿命意味着它的能量有一不确定度. 此不确定度像原子能级的不确定度一样将对谱线宽度有一贡献.

我们的数学推导仍将从(A.4)式出发. 光子的频谱分布实际上是指按波数 $k$ 的分布，只是将 $k$ 表成 $\sqrt{\varepsilon}\omega/c$. 因此我们可以谈论某个时刻的频谱分布. 在非耗散介质中，辐射场的谱分布(谱形)可以通过 $t \to \infty$ 时光子按波数 $k$ 的分布来计

算[5~7],即

$$S(\omega) \propto \rho(\omega) \lim_{t\to\infty}\int \mathrm{d}\Omega_k \sum_s \langle \hat{a}^\dagger_{ks}(t) a_{ks}(t)\rangle, \tag{A.33}$$

其中

$$\rho(\omega) = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}, \tag{A.34}$$

$\varepsilon$ 为介电常数(实).

但对于耗散介质,$S(\omega)$不能按(A.33)式来计算,因$\langle \hat{a}^\dagger_{ks}(t)\hat{a}_{ks}(t)\rangle$在 $t\to\infty$ 时等于零.我们只能通过原子在 $t=0$ 到 $t=\infty$所辐射出的全部光子按波数的分布来定义谱形.为此我们仍将从自发辐射算符 $\hat{I}_{sp}(t)$出发,它即为(A.8a)式所给出的 $\hat{I}^{(1)}_R(t)$[参见(A.10a)式].

在色散介质中,$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)$的展式为[8,9,4]

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\varepsilon\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right)\omega}} \sum_{ks} \boldsymbol{e}_{ks}[\hat{a}_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{h.c.}]. \tag{A.35}$$

这时(A.31)式将改变成

$$\sum_s |g_{ks}|^2 = \frac{2\pi\omega_0^2}{V\hbar\omega\varepsilon\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right)} \sum_s |\boldsymbol{e}_{ks}\cdot\langle \boldsymbol{d}_{12}\rangle|^2, \tag{A.36}$$

代入(A.8a)式中即得出 $\hat{I}_{sp}(t)$[也就是 $\hat{I}^{(1)}_R(t)$]为

$$\hat{I}_{sp}(t) = \int_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega \frac{\gamma_A\sqrt{\varepsilon}\omega}{2\pi\omega_0}\int \mathrm{d}t' \hat{\sigma}_+(t')\hat{\sigma}_-(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')-\frac{1}{2}\kappa(t-t')} + \mathrm{h.c.} \tag{A.37}$$

在推导上式中我们利用了

$$\mathrm{d}k = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right)\mathrm{d}\omega. \tag{A.38}$$

按前面所述,自发辐射的谱分布(未归一化的)$S(\omega)$应即为$\int_0^\infty \langle \hat{I}_{sp}(t)\rangle \mathrm{d}t$ 中频率为$\omega$ 的成分,具体表达式为

$$S(\omega) = \frac{\gamma_A\omega\sqrt{\varepsilon}}{2\pi\omega_0}\int_0^\infty \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t'\langle\hat{\sigma}_+(t')\hat{\sigma}_-(t)\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')-\frac{1}{2}\kappa(t-t')} + \mathrm{c.c.} \tag{A.39}$$

由于 $\gamma_A$ 中已含有电磁耦合常数的平方[参见(A.31)式],故在最低阶电磁作用的近似下,我们可以不考虑上式右方中的 $\hat{\sigma}_+(t')$和 $\hat{\sigma}_-(t)$与电磁场的耦合.这样从(A.4b)式即可解出

$$\hat{\sigma}_+(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\hat{\Gamma}_+(\tau)\mathrm{d}\tau + \hat{\sigma}_+(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{A.40}$$

$\hat{\sigma}_-(t)$则可从上式取厄米共轭而得出，于是

$$\langle \hat{\sigma}_+(t')\hat{\sigma}_-(t)\rangle = \int_0^{t'} d\tau' \int_0^t d\tau e^{-\gamma(t'+t-\tau'-\tau)} \langle \hat{\Gamma}_+(\tau')\hat{\Gamma}_-(\tau)\rangle + \langle \hat{N}_2(0)\rangle e^{-\gamma(t'+t)}. \tag{A.41}$$

从(8.2.45)第一式不难化出

$$\langle \hat{\Gamma}_+(\tau')\hat{\Gamma}_-(\tau)\rangle = [(2\gamma-\gamma_3)\langle \hat{N}_2(\tau)\rangle + \gamma_3 N_2^{(s)}]\delta(\tau-\tau'), \tag{A.42}$$

其中 $N_2^{(s)}$ 为稳恒时 $\hat{N}_2$ 的期望值，它与温度 $T$ 有关：

$$N_2^{(s)} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT}+1}. \tag{A.43}$$

至于$\langle \hat{N}_2(\tau)\rangle$的值可从 $\hat{N}_2(\tau)=\frac{1}{2}[1+\hat{\sigma}_3(\tau)]$以及 $\hat{\sigma}_3(\tau)$所满足的方程(A.4c)式求出，在略去(A.4c)式中的电磁作用项后，结果为

$$\langle \hat{N}_2(\tau)\rangle = [\langle \hat{N}_2(0)\rangle - N_2^{(s)}]e^{-\gamma_3\tau} + N_2^{(s)}. \tag{A.44}$$

于是在 $t'<t$ 时即得[将$\langle \hat{N}_2(0)\rangle$简写成 $N_2(0)$]

$$\langle \hat{\sigma}_+(t')\hat{\sigma}_-(t)\rangle = [N_2(0) - N_2^{(s)}]e^{-\gamma_3 t'-\gamma(t-t')} + N_2^{(3)} e^{-\gamma(t-t')}, \tag{A.45}$$

代回(A.39)式就得出最低阶的谱分布为

$$S^{(0)}(\omega) = \frac{\gamma_A\omega\sqrt{\varepsilon}}{2\pi\omega_0}\int_0^\infty dt \left\{ \frac{N_2(0)-N_2^{(s)}}{-i(\omega-\omega_0)+\frac{\kappa}{2}+\gamma-\gamma_3}[e^{-\gamma_3 t} - e^{i(\omega-\omega_0)t-(\gamma+\frac{\kappa}{2})t}] + \frac{N_2^{(s)}}{-i(\omega-\omega_0)+\frac{\kappa}{2}+\gamma}[1-e^{i(\omega-\omega_0)t-(\gamma+\frac{\kappa}{2})t}]\right\} + \text{c.c.} \tag{A.46}$$

为了从上式分离出自发辐射的部分，我们先来看(A.44)式，在自发辐射问题中，初始时原子通常处于上能级即 $N_2(0)=1$.(A.44)式告诉我们，$(1-N_2^{(s)})$部分将以 $\gamma_3$ 为衰率指数减少，而 $N_2^{(s)}$ 部分保持不变在自发辐射中 $N_2$ 将从 1 变到其稳恒值 $N_2^{(s)}$，于是自发辐射的谱函数只对应(A.46)右方的第一项，由此即可求出

$$S_{sp}^{(0)}(\omega) = \frac{\gamma_A\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\pi\gamma_3\omega_0}(1-N_2^{(s)})\frac{\gamma+\kappa(\omega)/2}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma+\frac{1}{2}\kappa(\omega))^2}. \tag{A.47}$$

在此式中我们已明显标出介电常数 $\varepsilon$ 和光子的衰率 $\kappa$ 为 $\omega$ 的函数.(A.47)式表明，光子 $\hat{a}_{ks}$的衰率 $\kappa(\omega)/2$ 与原子 $\hat{\sigma}_+$ 的衰率 $\gamma$ 共同贡献谱线的宽度.

以上结果证实了前面的说法，即介质耗散性所引起的光子能级宽度将像原子能级宽度一样导致辐射谱线的增宽.

在(A.40)式中我们未考虑 $\hat{\sigma}_+$ 与电磁场的耦合.如果考虑这一耦合,在最低阶近似下,$\hat{\sigma}_+$ 满足的方程为

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_+(t) = -[\gamma + (\bar{n}_T(\omega_0) + \frac{1}{2})\gamma'_A]\hat{\sigma}_+(t) + \hat{\Gamma}'_+(t), \quad (A.48)$$

其中涨落力的关联函数为

$$\langle \hat{\Gamma}'_+(t')\hat{\Gamma}'_-(t)\rangle = D'(t)\partial(t-t'), D'(t) = (2\gamma - \gamma_3)\langle \hat{N}_2(t)\rangle + [\gamma_3 + (2\bar{n}_T(\omega_0)+1)\gamma'_A]N_2^{(\,)}.$$

另外,我们还需要$\langle \hat{N}_2(t)\rangle$的方程.同样在考虑了最低阶的电磁作用修正后,该方程为

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{N}_2(t)\rangle = -[\gamma_3 + (2\bar{n}_T(\omega_0)+1)\gamma'_A](\langle \hat{N}_2(t)\rangle - N_2^{(s)}). \quad (A.49)$$

我们最后得出

$$S_{sp}(\omega) = \frac{\gamma_A\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\pi[\gamma_3 + (2\bar{n}_{T+1})\gamma'_A]\omega_0}(1 - N_2^{(s)}) \times \frac{\gamma + \frac{\kappa(\omega)}{2} + (\bar{n}_T + \frac{1}{2})\gamma'_A}{(\omega-\omega_0)^2 + [\gamma + \frac{1}{2}\kappa(\omega) + (\bar{n}_T + \frac{1}{2})\gamma'_A]^2}, \quad (A.50)$$

即在谱宽中除了库所贡献的 $\gamma + \frac{1}{2}\kappa(\omega)$以外,还将出现电磁作用(辐射和吸收)贡献的$(\bar{n}_T + \frac{1}{2})\gamma'_A$ 项.

## 参 考 文 献


1 Cao Changqi and Hui Cao. J Phys B. **26**:3959,1993

2 Hui Cao and Cao Chang-qi. J Phys B. **28**:979,1995

3 Changqi Cao and Hui Cao. J Opt B. **1**:325,1999

4 Changqi Cao, Hui Cao Kecheng Qin. Phys Lett A. **226**:135,1997

5 W Heitler. The Quantum Theory of Radiation. Oxford: Claviton, 1954

6 H Haken. Light, vol 1. Amsterdam: North-Holland

7 P W. Milonni, R J Cook and J R Ackerhalt. Phys Rev A. **40**:3764,1989

8 G Nienhuis and Th J Alkemade. Physica C. **81**: 181,1976

9 B Huttner, J J Baumberg and S M Barnett. Europhys Lett. **16**:177,1991


# B 原子自发辐射的非马尔可夫理论

在§6.1中,我们讨论了在自发辐射过程中,原子(处于真空中)在上能级上的

布居概率 $P_2$ 随时间的变化.一般地说,$P_2$ 在 $t$ 时刻的减少率$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_2(t)\right)$并不一定与 $P_2$ 在该时刻的值 $P_2(t)$成正比.只是在马尔可夫近似下,由(6.1.26)式才有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_2(t)=c_2^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_2(t)+\frac{\mathrm{d}c_2^*(t)}{\mathrm{d}t}c_2(t)=-c_2^*(t)(\frac{1}{2}\gamma+\mathrm{i}\delta\omega_0)c_2(t)$$
$$-(\frac{1}{2}\gamma-\mathrm{i}\delta\omega_0)c_2^*(t)c_2(t)=\gamma P_2(t).\tag{B.1}$$

其中 $\gamma$ 由(6.1.27)式给出.

在非马尔可夫情况下,关联函数 $U(t-t')$将由(6.1.20)和(6.1.21)式表示,其中 $\boldsymbol{G}_k$ 在非相对论情况并忽去电子自旋时,由(6.1.19b)式给出.

在§3.1 中我们曾指出 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$中的各项并不一定要求符合能量守恒,但整个的物理过程是符合能量守恒的[参见(4.1.15)式],因此在 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$中明显违背能量守恒的部分对结果影响不大,这就是在量子光学中旋波近似是一个好的近似的原因.

为了计算 $\boldsymbol{G}_k$,我们将初末态的薛定谔波函数

$$\phi_1(\boldsymbol{x})=f_1(r)\mathrm{Y}_{l_1m_1}(\theta,\varphi),\quad \phi_2(\boldsymbol{x})=f_2(r)\mathrm{Y}_{l_2m_2}(\theta,\varphi)$$

以及平面波的展式[下式中的 $\mathrm{j}_l(x)$为球贝塞尔函数]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}=4\pi\sum_{lm}i^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{Y}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)\tag{B.2}$$

代入旋波近似下的公式(6.1.19b)中,通过积分即可得出 $\boldsymbol{G}_k$ 的一般表达式[见文献(1)中(8a)式].对于§6.1 中所提到的类氢原子从 2P 态到 1S 态的跃迁,设 2P 态的磁量子数 $m_2=1$,即有

$$\phi_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\mathrm{e}^{-r/a_1},\quad \phi_2(\boldsymbol{x})=\sqrt{\frac{4}{3a_2^5}}r\mathrm{e}^{-r/a_2}\mathrm{Y}_{11}(\theta,\varphi).\tag{B.3}$$

$\phi_1(\boldsymbol{x})$的梯度为

$$\nabla\phi_1(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\frac{1}{a_1}\mathrm{e}^{-r/a_1}\boldsymbol{n}_r,\tag{B.4}$$

其中 $\boldsymbol{n}_r$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量,它在球基矢 $\boldsymbol{n}^{(\mu)}$[参见(1.4.21)式]的展式中即为

$$\boldsymbol{n}_r=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{\mu}(-1)^{\mu}\mathrm{Y}_{1\mu}(\theta,\varphi)\boldsymbol{n}^{(-\mu)},\quad \mu=+1,0,-1.\tag{B.5}$$

将这些相应的公式代入(6.1.19b)中,并完成对角度变量的积分,就得出 $\boldsymbol{G}_k$ 为

$$\boldsymbol{G}_k=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{(a_1a_2)^5}}\Big[\mathrm{Y}_{00}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{n}^{(-1)}\int_0^\infty r^3\mathrm{j}_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r$$
$$+\Big(\sqrt{\frac{6}{5}}\mathrm{Y}_{2,-2}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{n}^{(+1)}-\sqrt{\frac{3}{5}}\mathrm{Y}_{2,-1}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{n}^{(0)}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{5}}Y_{2,0}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{n}^{(-1)}\bigg)\int_0^\infty r^3 \mathrm{j}_2\left(\frac{\omega r}{c}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\bigg], \tag{B.6}$$

其中

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}. \tag{B.7a}$$

$a$ 的值随着 $Z$ 的增加而减少,其具体表达式为

$$a=\frac{2}{3}\frac{\hbar^2}{me^2}\frac{1}{z}. \tag{B.7b}$$

再完成对 $r$ 的积分:

$$\int_0^\infty r^3 \mathrm{j}_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r=\frac{2a^4\left(3-\frac{\omega^2a^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{\omega^2a^2}{c^2}\right)^3}, \tag{B.8a}$$

$$\int_0^\infty r^3 \mathrm{j}_2\left(\frac{\omega r}{c}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r=\frac{8a^4\frac{\omega^2a^2}{c^2}}{\left(1+\frac{\omega^2a^2}{c^2}\right)^3}, \tag{B.8b}$$

最后求出关联谱函数 $u(\omega)$[见(6.1.21)式]为

$$u(\omega)=\frac{\gamma_A}{2\pi\omega_0}\frac{\omega}{(1+\frac{\omega^2a^2}{c^2})^4}, \tag{B.9}$$

其中 $\gamma_A$ 为爱因斯坦 $A$ 系数. $\omega_0$ 为 $\frac{1}{\hbar}(E_2-E_1)$,它随 $Z^2$ 而增长.

$$\gamma_A=\frac{4\omega_0^3\,|\langle d_{21}\rangle|^2}{3\hbar c^3},\quad \omega_0=\frac{3}{8}\frac{mc^2}{\hbar}z^2\alpha^2. \tag{B.10}$$

在本问题中

$$|\langle d_{21}\rangle|=\frac{64}{81}\sqrt{2}ea, \tag{B.11}$$

$e$ 为电子电荷的绝对值.

相应的关联函数 $U(\tau)$可通过数值积分从 $u(\omega)$得出[参见(6.1.22)式].它的绝对值成半侧峰形状(最大值在 $\tau=0$ 处,随着 $\tau$ 增加而单调下降),其幅角 $\arg U(\tau)$在峰区内先下降再上升,到峰区外基本上以 $\omega_0\tau$ 直线上升[2].具体例子可在后面图形中看到.

在自发辐射的维格纳-韦斯科普夫理论中作了两个近似,一是马尔可夫近似,二是电偶极子(原子模型)近似.其中马尔可夫近似是指设上级级布居数的减少率

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_2(t)$与该时刻的 $P_2(t)$值成正比,与过去的历史无关:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_2(t) = -\gamma P_2(t),$$

点偶极子近似是指 $k_0 a = \frac{\omega_0}{c}a$ 可很小,从而对于重要的 $\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{G}_k$ 积分中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 可近似取为 1,于是 $\gamma$ 即近似成爱因斯坦 $A$ 系数 $\gamma_A$.

据估计,关联时间 $\tau_c$ 的量级为 $1/\omega_0$[参见 § 6.1 中(6.1.22b)式下面的文字],而自发辐射 $P_2$ 的衰减时间量级为 $1/\gamma_A$(这里说的都是量级).于是马尔可夫近似成立的条件为$(1/\omega_0)/(1/\gamma_A)$即$\frac{\gamma_A}{\omega_0}$很小.对于类氢原子,$\gamma_A$ 正比于 $\omega_0^3 a^2$[参见(B.10)和(B.11)式]因而 $\gamma_A/\omega_0$ 以 $Z^2$ 增长[参见(B.7b)和(B.10)式].至于点偶极子近似,相应的判据性参数$\frac{\omega_0 a}{c}$将以 $Z$ 的一次方增长.这样任何可能的非马尔可夫修正和有限原子体积的修正都只会在大的 $Z$ 值才会显示出来.

对于大 $Z$ 值的类氢原子,相对论效应已不能忽略.因此我们将以狄拉克波函数来代替薛定谔波函数来进行计算,另外按 § 4.2,电偶极辐射是辐射总角动量量子数为 1,宇称为负的光子,它的势函数亦称为电偶极势,下面将用 $\boldsymbol{A}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x})$表示,其中 $M$ 可取 ±1 和 0(参见 § 1.5).如果光子场归一化在半径为 $R_0$ 的大球内(其中心即原子所在的位置),则 $k$ 的取值为一系列离散的值,我们若把 $\boldsymbol{A}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x})$写成

$$\boldsymbol{A}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}}\boldsymbol{F}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x}), \tag{B.12}$$

则 $\boldsymbol{F}_{k1M(-1)}$满足正交归一化条件

$$\int \boldsymbol{F}^*_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{F}_{k'1M'(-1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x = \delta_{kk'}\delta_{MM'}. \tag{B.13}$$

$\boldsymbol{F}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x})$可用球贝塞尔函数 $\mathrm{g}_L(kr)$和矢量球函数 $\boldsymbol{Y}_{1LM}(\theta,\varphi)$表示出来

$$\boldsymbol{F}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{2k^2}{R_0}}\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{g}_2(kr)\boldsymbol{Y}_{12M}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{g}_0(kr)\boldsymbol{Y}_{10M}(\theta,\varphi)\right], \tag{B.14}$$

其中 $\boldsymbol{Y}_{JLM}(\theta,\varphi)$的表达式见(1.5.12)式

相互作用哈密顿量为①

$$\hat{H}_{\text{int}} = \mathrm{i}\hbar \sum_{kM} [ g_{k1M(-1)} \hat{\sigma}_+ \hat{a}_{k1M(-1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0^{(R)})t} - g^*_{k1M(-1)} \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger_{k1M(-1)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0^{(k)})t} ], \tag{B.15}$$

$\hat{\sigma}_+$ 与 $\hat{\sigma}_-$ 为原子能级变迁算符[参见(6.1.3)和(6.1.6)式],$\omega_0^{(R)}$ 为$\frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1)$的相对论值,耦合常数 $g_{k1M(-1)}$ 的表达式为

$$g_{g1M(-1)} = \frac{e}{\hbar}\int \bar{\psi}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}\psi_1(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A}_{k1M(-1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x. \tag{B.16}$$

其中 $\psi_2(\boldsymbol{x})$和 $\psi_1(\boldsymbol{x})$分别为上能级和下能级的狄拉克波函数.

与(6.1.17)式相应,电偶极辐射的关联函数 $U(\tau)$与耦合常数 $g_{k1M(-1)}$ 的关系为

$$U(\tau) = \sum_{kM} | g_{k1M(-1)} |^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0^{(R)})\tau}, \quad M = 1, 0, -1. \tag{B.17}$$

如果令光子场归一化的大球半径 $R_0$ 趋于∞,则对 $k$ 求和可以化成对 $\omega$ 的积分:

$$\sum_k \to \frac{R_0}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k = \frac{R_0}{c\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega, \quad \omega \equiv kc.$$

于是关联谱函数 $u(\omega)$可表示为

$$u(\omega) = \sum_M \frac{R_0}{c\pi} | g_{k1M(-1)} |^2. \tag{B.18}$$

我们仍然考虑从 2P 到 1S 态的跃迁.但现在电流密度 $\bar{\psi}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}\psi_1(x)$包含了自旋电流,因此我们必须分别处理 $2P_{3/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁和 $2P_{1/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁.狄拉克波函数 $1S_{1/2}$ 可表示为

$$\psi_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}G_1(r)\Omega_{\frac{1}{2}0m}(\theta,\varphi) \\ \frac{1}{r}F_1(r)\Omega_{\frac{1}{2}1m}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad m = \pm\frac{1}{2}. \tag{B.19}$$

其中 $\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)$代表旋量球函数[参见(2.3.1)式],而

$$G_1(r) = B_0\rho^{s_1}\mathrm{e}^{-\rho}, \quad F_1(r) = A_0\rho^{s_1}\mathrm{e}^{-\rho},$$

$$s_1 = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}, \quad \rho = \frac{Z}{a_B}r, \tag{B.20}$$

---

① 在相对论理论中,2P 与 2S 态已解除简并,因此原则上并不排除原子在 2P 与 2S 态之间来回跃迁.最后一步才从 2P 态跃迁到 1S 态,但由于 2P 与 2S 两态能量接近,这一过程贡献小,参见参考文献[3].

$$\frac{A_0}{B_0} = -\frac{Z\alpha}{1+s_1}, \quad B_0^2 = \frac{Z}{a_B} 2^{2s_1} \frac{1+s_1}{\Gamma(1+2s_1)}.$$

$\alpha$ 为精细结构常数,$a_B$ 为玻尔半径,$\Gamma(x)$为伽玛函数.此状态的能量为

$$E_1 = m_0 c^2 s_1, \tag{B.21}$$

$m_0$ 为电子静止质量.

初态 $2P_{3/2}$ 的狄拉克波函数为

$$\psi_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} G_2(r) \Omega_{\frac{3}{2}1m'}(\theta,\varphi) \\ \frac{1}{r} F_2(r) \Omega_{\frac{3}{2}2m'}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}. \tag{B.22}$$

其中

$$\begin{aligned} & G_2(r) = B'_0 \rho^{s_2} e^{-\rho}, \quad F_2(r) = A'_0 \rho^{s_2} e^{-\rho} \\ & s_2 = \sqrt{4 - z^2\alpha^2}, \quad \rho = \frac{Z}{2a_B} r \\ & \frac{A'_0}{B'_0} = -\frac{Z\alpha}{2+s_2}, \quad B_0'^2 = \frac{Z}{4a_B} 2^{2s_2} \frac{2+s_2}{\Gamma(1+2s_2)}. \end{aligned} \tag{B.23}$$

此状态的能量为

$$E_2 = \frac{1}{2} m_0 c^2 s_2. \tag{B.24}$$

于是相对论的辐射频率为

$$\omega_0^{(R)} = \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1) = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\left(\frac{1}{2}s_2 - s_1\right). \tag{B.25}$$

稳定原子核的最大 $Z$ 值为 92.当 $Z=92$ 时,$\omega_0^{(R)}$ 与非相对论的 $\omega_0$ 有较大相差:

$$\omega_0^{(R)} = 0.201 \frac{m_0 c^2}{\hbar}, \quad \omega_0 = 0.169 \frac{m_0 c^2}{\hbar}. \tag{B.26}$$

由角动量第三分量的守恒,光子的 $M$ 与原子的 $m$ 和 $m'$之间关系为

$$M = m' - m. \tag{B.27}$$

由于转动对称性,最后结果应与体系总角动量的第三分量 $M+m(=m')$无关.我们可以选取 $m'=\frac{3}{2}$,于是允许的$(M,m)$值只有$\left(1,\frac{1}{2}\right)$.从而 $u(\omega)$只剩下一项$\frac{R_0}{c\pi}|g_{k11(-1)}|^2$.将(B.16)式和有关的 $\bar{\psi}_2(\boldsymbol{x})$,$\psi_1(\boldsymbol{x})$及 $\boldsymbol{A}_{k11(-1)}(\boldsymbol{x})$代入后并完成对空间坐标的积分,即得出[3]

$$u(\omega) = |B_0 B'_0|^2 Z^2 \alpha^3 \frac{2\omega}{9\pi} \left| \frac{1}{1+s_1} S_0(\omega) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+s_1} - \frac{3}{2+s_2}\right) S_2(\omega) \right|^2 \tag{B.28}$$

其中

$$S_0(\omega) = \frac{1}{ik}\left(\frac{2}{3}\right)^{s_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{s_2}\Gamma(s_1 + s_2)\left[\frac{1}{(1 - ika)^{s_1+s_2}} - \text{c.c.}\right] \quad (B.29a)$$

$$S_2(\omega) = -S_0(\omega) + \frac{3}{k^2 a}\left(\frac{2}{3}\right)^{s_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{s_2}$$

$$\times\left[\frac{1}{ika}\frac{\Gamma(s_1 + s_2 - 2)}{(1 - ika)^{s_1+s_2-2}} - \frac{\Gamma(s_1 + s_2 - 1)}{(1 - ika)^{s_1+s_2-1}} + \text{c.c.}\right], \quad (B.29b)$$

其中

$$a = \frac{2a_B}{3Z}. \quad (B.29c)$$

此 $a$ 与非相对论中的值是一致的.

作为比较,我们再看过程 $2P_{1/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁,这时初态的狄拉克波函数为

$$\psi_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}G_2(r)\Omega_{\frac{1}{2}1m'}(\theta,\varphi) \\ -\frac{1}{r}F_2(r)\Omega_{\frac{3}{2}1m'}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad (B.30)$$

其中

$$\begin{aligned} G_2(r) &= B_0'(1 + B_1'\rho)\rho^{s_1}e^{-\rho}, \\ F_2(r) &= B_0'(A_0' + A_1'\rho)\rho^{s_1}e^{-\rho}. \end{aligned} \quad (B.31)$$

而在这里

$$\rho = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{2}(1 - s_1)}\frac{r}{a_B}, \quad s_1 = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2},$$

$$B_1' = \frac{2s_1 + \sqrt{2(1 + s_1)}}{(1 - s_1)(1 + 2s_1)}, \quad A_0' = \frac{Z\alpha}{1 - s_1}, \quad A_1' = \frac{\sqrt{2(1 - s_1)} - 2Z\alpha}{(1 - s_1)(1 + 2s_1)},$$

$$B_0'^2 = \frac{1}{Z\alpha}\sqrt{\frac{1}{2}(1 - s_1)}2^{1+2s_1}$$

$$\times\frac{Z/a_B}{\Gamma(1 + 2s_1)\left[(1 + A_0'^2) + (1 + 2s_1)(B_1' + A_0'A_1') + (B_1'^2 + A_1'^2)(1 + s_1)\left(\frac{1}{2} + s_1\right)\right]}. \quad (B.32)$$

状态 $2P_{1/2}$ 的能量为

$$E_2 = m_0c^2\sqrt{\frac{1}{2}(1 + s_1)}. \quad (B.33)$$

于是相应的相对论辐射频率为

$$\omega_0^{(R)} = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(1+s_1)} - s_1\right]. \tag{B.34}$$

在下一步计算中我们选取体系总角动量第三分量 $m' = M + m$ 为$\frac{1}{2}$，这时 $(M, m)$将有二个可能值：$\left(M=0, m=\frac{1}{2}\right)$和$\left(M=1, m=-\frac{1}{2}\right)$. 由(B.16)式计算出的两个耦合常数实际上只差一个常数[3]：

$$g_{k11(-1)} = -\sqrt{2} g_{k10(-1)}, \tag{B.35}$$

而最后得出的关联谱函数为

$$u(\omega) = | B_0 B'_0 |^2 Z^2 \alpha^3 \frac{\omega}{2\pi}\left| S_0(\omega) + \frac{1}{3} S'_0(\omega) - \frac{2}{3} S'_2(\omega)\right|^2, \tag{B.36}$$

其中

$$S_0(\omega) = \frac{1}{ik}\left[1 + \frac{Z\alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-s_1)}}\right]^{-s_1}\left[1 + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-s_1)}}{Z\alpha}\right]^{-s_1}\left\{\frac{1}{1-s_1}\frac{\Gamma(2s_1)}{(1-ika)^{2s_1}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-s_1)}}{Z\alpha(1-s_1)(1+2s_1)}\frac{\sqrt{2(1-s_1)} - 2Z\alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-s_1)} + Z\alpha}\frac{\Gamma(2s_1+1)}{(1-ika)^{2s_1+1}} - \text{c.c.}\right\}. \tag{B.37}$$

其余两个 $S'_0(\omega)$和 $S'_2(\omega)$可参见文献[3]，这里不再列出.

(B.37)式中的 $a$ 与 $2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$中的不一样，现在的值为

$$a = \frac{a_B/Z}{1 + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-s_1)}}{Z\alpha}}. \tag{B.38}$$

下面先来考察所求出的关联谱函数 $u(\omega)$的非相对论极限. 当 $Z$ 很小使得 $Z^2\alpha^2$ 与 1 相比可以忽略时，上述 $u(\omega)$应过渡到非相对论的结果.

先看 $2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$的情况：

当 $s_1 = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$ 近似成 1，$s_2 = \sqrt{4 - Z^2\alpha^2}$ 近似成 2 以后，即将 $u(\omega)$化为

$$u(\omega) = \frac{2^{10}}{3^9} Z^2 \alpha^3 \frac{\omega}{\pi\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)^4}\left[1 - \frac{3\frac{\omega^2 a^2}{c^2}}{2\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)}\right]^2 \tag{B.39}$$

而通常的非相对论关联谱(B.9)式可以化成

$$u(\omega) = \frac{2^{10}}{3^9} Z^2 \alpha^3 \frac{\omega}{\pi\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)^4}. \tag{B.40}$$

我们看到在(B.39)式中出现一个附加因子$\left[1 - \frac{\frac{3\omega^2 a^2}{c^2}}{2\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)}\right]^2$.再看 $2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$的情况.这时 $1 - s_1$ 的非相对论极限应取为$\frac{1}{2}Z^2\alpha^2$,由此可得出 $u(\omega)$的非相对论近似值为

$$u(\omega) = \frac{2^{10}}{3^9} Z^2 \alpha^3 \frac{\omega}{\pi\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)^4} \left[1 + \frac{\frac{3\omega^2 a^2}{c^2}}{1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}}\right]^2, \tag{B.41}$$

附加的因子改变成$\left[1 + \frac{\frac{3\omega^2 a^2}{c^2}}{1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}}\right]^2$.

可以证明这两个附加因子都来自电子自旋磁矩与光子场中磁场 **B** 间的耦合[3],这种耦合所对应的相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}'_{\text{int}} = \frac{e\hbar}{2mc}\int \hat{\varphi}^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x$$

而在(B.40)式的计算中略去了上述作用.

下面回到相对论理论.有了谱函数(B.28)和(B.36)式,即可按(6.1.22)式用数值积分方法求出相对论的关联函数 $U(\tau)$.在下面的图 1、图 2 和图 3 中,我们将显示 $Z=92$ 的关联谱函数和关联函数的绝对值及相位[3].

图 1 显示在高频部分($\omega > \omega_0$)相对论的谱函数与通常给出的非相对论谱函数有明显的差别,其中 $2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$跃迁的谱函数与通常的非相对论 2P 到 1S 的谱函数[即(B.9)式]的差相对地较小,而 $2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$跃迁的谱函数与(B.9)式的差相对地较大,这与(B.29c)式与非相对论中的 $a$ 一致而(B.38)式则与非相对论的 $a$ 相差较大的情况相似.

图 2 中曲线Ⅰ(对应于 $2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$的跃迁)在半高处的宽度较小,其值为 $0.321/\omega_0$,而曲线Ⅱ(对应于 $2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$的跃迁)在半高处的宽度较大,其值为 $0.885/\omega_0$.但前者 $U(0)$较大.后者 $U(0)$较小.附带指出当 $Z$ 减少时,这种半高处的宽度将减少(意味着马尔可夫近似更好),例如 $Z=50$ 时,$2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$跃迁所对应的值将减到 $0.237/\omega_0$,因而已不能说其量级为 $1/\omega_0$ 了.而 $2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$跃迁所对

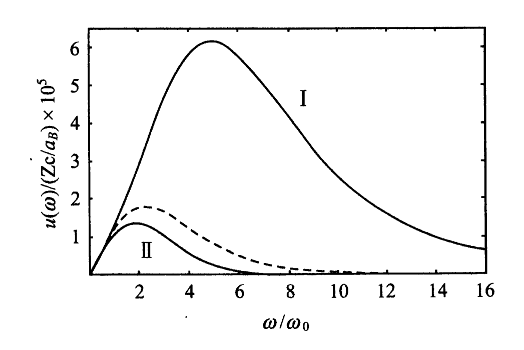



图 1　相对论的关联谱函数 $u(\omega)$

Ⅰ. 原子从 $2P_{1/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁，$Z=92$；Ⅱ. 原子从 $2P_{3/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁，$Z=92$，虚线为通常的非相对论 2P 到 1S 的跃迁(不考虑自旋)，$Z=92$

应的值也降到了 $0.539/\omega_0$. 非相对论的值介于两者之间.

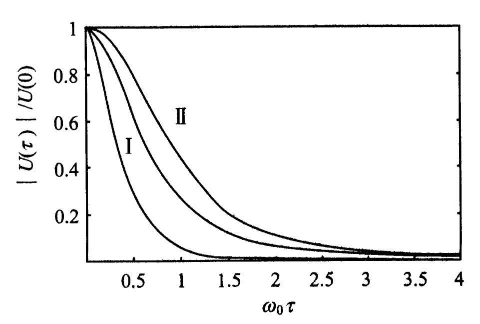



图 2　相对论关联函数 $U(\tau)$ 的绝对值

Ⅰ. 原子从 $2P_{1/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁，$Z=92$

$U(0)=2.08\times10^{-3}\omega_0$;

Ⅱ. 原子从 $2P_{3/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的跃迁，$Z=92$

$U(0)=1.80\times10^{-4}\omega_0$;

虚线为通常的非相对论 2P 到 1S 的跃迁，$Z=92$，

$U(0)=3.22\times10^{-4}\omega_0$

图 3 显示关联函数的辐角 $\arg U(\tau)$ 的图形. 其中 $2P_{3/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的曲线较 $2P_{1/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的浅平，非相对论的曲线与 $2P_{3/2}$ 到 $1S_{1/2}$ 的曲线形状比较相近. 当 $\tau\geqslant2/\omega_0$ 时，这些曲线都近似地直线上升.

有了关联函数就可通过数值求解微分-积分方程(6.1.16)求出 $c_2(t)$. 然后得出上能级布居数 $P_2(t)$，并与非相对论的结果以及韦斯科普夫-维格纳理论曲线相比较，结果表明非马尔可夫修正很小，在图中与马尔可夫近似下的曲线(指数衰减)几乎不能分辨. 这一结果也是可以理解的. 我们知道 $\delta(\tau)$ 可以用两种不同的极限形式来表示：

$$\delta(\tau)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\tau^2+\varepsilon^2}$$

和

$$\delta(\tau)=\frac{1}{\pi}\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega\tau}{\tau}.$$

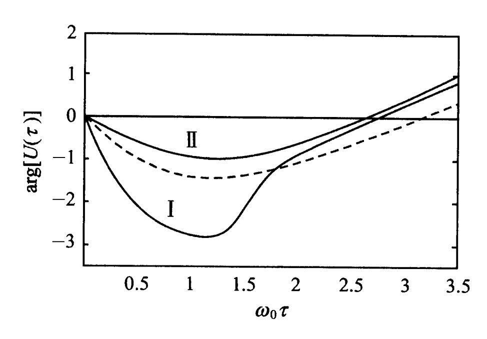



图 3　相对论关联函数 $U(\tau)$的相位

Ⅰ.原子从 $2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$的跃迁,$Z=92$;

Ⅱ.原子从 $2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$的跃迁,$Z=92$;

虚线为通常非相对论 2P 到 1S 的跃迁,$Z=92$

前者具有典型的峰状曲线形式,其宽度趋于零;后者在 $\tau>0$ 范围以无穷大的频率振荡,而当 $\tau=0$ 时其值趋于无穷.现在我们求出的 $U(\tau)$既具有峰的形状又在峰区以外以频率 $\omega_0^{(k)}$ 振荡.峰的宽度与 $1/\omega_0^{(R)}$ 同量级,而 $P_2$ 的衰减时间量级为 $1/\gamma_A$.峰宽 $1/\omega_0^{(R)}$ 与 $1/\gamma_A$ 之比的量级为 $10^{-4}$.因此马尔可夫修正小是合理的,数值计算证实了这一结果[3],修正的量级为 $10^{-2}$.这样就得出

$$P_2(t)\approx e^{-\gamma t}. \tag{B.42}$$

但 $\gamma$ 与 $\gamma_A$ 不同,其值如下[3]

$$\gamma=\begin{cases}0.873\gamma_A & (Z=92,2P_{3/2}\text{ 到 }1S_{1/2}),\\ 1.052\gamma_A & (Z=92,2P_{1/2}\text{ 到 }1S_{1/2}).\end{cases} \tag{B.43}$$

我们看到第一个跃迁($2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$)的 $\gamma$ 与 $\gamma_A$ 差别较大,达到 13% 左右,第二个跃迁($2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$)差别只有 5%,我们再看通常非相对论的值 $\gamma^{(\mathrm{non})}$,它由谱函数(B.9)确定,当 $Z=92$ 时

$$\gamma^{(\mathrm{non})}=\frac{\gamma_A}{\left(1+\dfrac{\omega_0^2a^2}{c^2}\right)^4}=\frac{\gamma_A}{\left(1+\dfrac{1}{16}Z^2\alpha^2\right)^4}\approx 0.895\gamma_A. \tag{B.44}$$

我们看到一个有趣的现象:$2P_{3/2}$到 $1S_{1/2}$跃迁的相对论 $\gamma$ 值与$\gamma^{(\mathrm{non})}$较接近,而 $2P_{1/2}$到 $1S_{1/2}$跃迁的相对论 $\gamma$ 值却与爱因斯坦$A$ 系数$\gamma_A$ 较接近.$\gamma_A$ 与$\gamma^{(\mathrm{non})}$的差别在于它忽略了原子的有限大小(与光的波长相比).我们从(B.44)式看到这两者的差.

另外,我们还看到了电子自旋与光波中磁场 $\boldsymbol{B}$ 的耦合对电偶极辐射的影响(这可能是出乎意料的).实际上 $2P_{3/2}$与 $2P_{1/2}$间的差别就来源于自旋.即使在非相对论理论中自旋的效应也不小.(B.39)和(B.41)式中的附加因子就来源于自旋的效应.在 $Z=92$ 时,考虑了自旋后的非相对论 $\gamma$ 值与未考虑自旋的值(B.44)相比分别为 0.92($2P_{3/2}\rightarrow 1S_{1/2}$)和 1.17($2P_{1/2}\rightarrow 1S_{1/2}$),即自旋效应的修正分别为 −8% 和 17%.

我们在另文中还研究了磁偶极辐射的情况[4].所发射的光子总角动量量子数仍为 1,但宇称为正,势函数即为 $\boldsymbol{A}_{k1M(+1)}$.

## 参　考　文　献

1　Changqi Cao, Wei Long, Jikun Wei and Hui Cao. Phys Rev A. **64**:043810,2001

2　Changqi Cao, Jinrong Tian and Hui Cao. Phys Lett A. **303**:318,2002
3　Changqi Cao, Xiaowei Fu and Hui Cao. J Opt B: Quantum Semiclass Opt: **7**: 43,2005
4　Changqi Cao, Xiaowei Fu and Hui Cao.将发表

## C　介质中原子自发辐射的局域场修正因子

在许多物理问题中,辐射原子是处在(绝缘)介质中.这时它的辐射率 $W$ 与其真空值 $W_0$ 的差别,除了要乘 $\sqrt{\varepsilon}$ 因子外,还要乘上一个局域场修正因子.这就是本附录要讨论的内容.

在介质的极化理论中,要确定其中每个原子(或分子)的感应电偶极矩,需要知道它所感受的电场强度.此强度并非就是介质中该处的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$,因为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 是包括该原子贡献在内的总电场的平均值(此平均是在一个宏观小但仍包括众多原子的区域内进行的,以消除微观上的起伏).每个原子所感受的场应不包括它自己所产生的场在内,而是它所处位置上的局域场(外加场与其他原子所产生的场),通常用 $\boldsymbol{E}_{\text{local}}$ 来表示,局域场与该点的 $\boldsymbol{E}$ 成正比,并将写成

$$\boldsymbol{E}_{\text{local}} = f_{\text{local}} \boldsymbol{E}. \tag{C.1}$$

克劳修斯-莫索提给出 $f_{\text{local}}$ 的值为($\varepsilon$ 代表介质的介电常数)

$$f_{\text{local}} = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2). \tag{C.2}$$

此式在固体物理中称为克劳修斯-莫索提公式(亦称洛伦兹-洛伦茨公式).$f_{\text{local}}$ 即为原子极化的局域场修正因子.

昂萨格指出[1],上述公式只适用于非极性的原子或分子,对极性分子并不适用,否则将会得出许多由极性分子构成的介质在室温下将变成铁电体的结果.对于水,甚至在 1520°K 以下都将是铁电体,这显然是与事实不符的.昂萨格进一步研究了这个问题.由于每个分子将在介质中占有一定的空间(其大小与分子的尺寸相当),因此可以设想分子是处在一个小空腔的中心.他计算了极性分子在此小空腔内所感受的电场并且得出相应的 $f_{\text{local}}$ 值应修改成

$$f_{\text{local}} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}. \tag{C.3}$$

介质中自发辐射的原子(分子)也会遇到类似的问题,如果原子在真空中的能量辐射率为 $W_0$,则在介质中它的辐射率并不简单地就是 $\sqrt{\varepsilon} W_0$(其中 $\varepsilon$ 为介电系数,$\sqrt{\varepsilon}$ 代表折射率,导磁系数设为 1.见下面小字说明),还要乘上一个局域场子 $f_{\text{local}}$ 的平方,即

$$W = f_{\text{local}}^2 \sqrt{\varepsilon} W_0. \tag{C.4}$$

我们用简单的经典振子来说明为何在不考虑局域场效应时，$W$ 就等于$\sqrt{\varepsilon}W_0$，在介质中，宏观场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足的方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_f. \tag{C.5a}$$

对于一个位于原点的经典振子，

$$\boldsymbol{j}_f=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{P}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\delta(\boldsymbol{x}), \tag{C.5b}$$

直接将它代入(C.5a)式(即不考虑局域场效应)求出的辐射场(远区场)为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)&=-\frac{\omega^2}{c^2}P_0\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\boldsymbol{n}_\theta,\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)&=-\sqrt{\varepsilon}\frac{\omega^2}{c^2}P_0\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\boldsymbol{n}_\phi,\end{aligned} \tag{C.5c}$$

其中 $k=\sqrt{\varepsilon}\frac{\omega}{c}$. 由此即可计算出能流密度并得出辐射率 $W=\sqrt{\varepsilon}W_0$.

在文献中，(C.2)和(C.3)式都分别被采用为辐射问题中的局域场修正因子. 并未得出统一的结论，在这里将给出我们研究的结果[3].

## 1. 经典处理

先用经典理论来考察. 仿照昂萨格，我们考虑介质中一个小空腔，发光原子即位于其中心(为简单计先设介质充满小腔外整个空间)，然后通过计算一个包含小腔在内的球面上的能流来确定辐射率 $W$.

我们曾指出[4]在电偶极辐射的情况，较方便的处理是先计算磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$，假定原子电偶矩为 $\boldsymbol{P}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，并取 $z$ 轴沿 $\boldsymbol{P}_0$ 的方向. 这时磁场可表示成下列形式：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=g(r)\boldsymbol{Y}_{110}(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{C.6}$$

其中 $\boldsymbol{Y}_{110}(\theta,\varphi)$为 $J=1,l=1,M=0$ 的矢量球函数[参见(1.5.12)式]. 函数$g(r)$在腔外($r>r_0$)和腔内($r<r_0$)有不同的表达式：

$$g(r)=\begin{cases}-i\sqrt{\dfrac{8\pi}{3}}\dfrac{\omega^3}{c^3}P_0\mathrm{h}_1^{(1)}(kr)+\alpha\mathrm{j}_1(kr),k=\dfrac{\omega}{c},r<r_0,\\ \beta\mathrm{h}_1^{(1)}(k'r),k'=\sqrt{\varepsilon}\dfrac{\omega}{c},r>r_0,\end{cases} \tag{C.7①}$$

其中 $r_0$ 为腔的半径. $\mathrm{j}_1(x)$和 $\mathrm{h}_1^{(1)}(x)$分别为球贝塞尔函数和第一类球汉克尔函数：

$$\mathrm{j}_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x},\quad \mathrm{h}_1^{(1)}(x)=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{x}\right). \tag{C.8}$$

---

① 此式中的 $k$ 和$k'$ 即分别为文献[3](11)式中定义的 $k_0$ 和 $k$.

(C.7)第一式中的 $-\mathrm{i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{\omega^3}{c^3}P_0\mathrm{h}_1^{(1)}(kr)$ 代表真空中电偶子的发射波，$\alpha\mathrm{j}_1(kr)$ 为介质所产生的附加项. $\alpha$ 和 $\beta$ 都是待定参数.

在腔的表面上的边值关系为[4]

$$
\begin{aligned}
&g(r_0-\delta)=g(r_0+\delta),\\
&g(r_0-\delta)+r_0g'(r_0-\delta)=\frac{1}{\varepsilon}[g(r_0+\delta)+r_0g'(r_0+\delta)],
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

其中 $\delta$ 为正无穷小. $g'$ 代表 $g$ 的微商. 对于球贝塞尔函数和第一类球汉克尔函数，有下面的微商公式

$$
\mathrm{j}'_1(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{x}\mathrm{j}_1(x),\ \mathrm{h}^{(1)\prime}{}_1(x)=-\frac{\mathrm{i}}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\frac{2}{x}\mathrm{h}_1^{(1)}(x). \tag{C.10}
$$

待定的系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 可通过(C.9)式确定. 对于我们的目的来说只需要 $\beta$ 的值，它由下式给出：

$$
\begin{aligned}
\beta=\mathrm{i}A_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a'}\Bigg[&\left(\frac{1}{a'}+\frac{\mathrm{i}}{a'^2}\right)\left(a\sin a+\cos a-\frac{\sin a}{a}\right)\\
&+\varepsilon\left(\mathrm{i}-\frac{1}{a'}-\frac{\mathrm{i}}{a'^2}\right)\left(\cos a-\frac{\sin a}{a}\right)\Bigg]^{-1},
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

其中

$$
a=kr_0,\quad a'=k'r_0,\quad A_0=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{\omega^3}{c^3}P_0. \tag{C.12}
$$

由于腔半径 $r_0$ 与辐射原子半径同量级，故对于光频段的辐射，$a\ll 1, a'\ll 1$. 于是(C.11)式化为

$$
\beta\approx\frac{3A_0\varepsilon^2}{2\varepsilon+1}. \tag{C.13}
$$

在远区(波区)，磁场 $\boldsymbol{B}$ 的值可表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)&=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{\omega^3}{c^3}P_0\frac{3\varepsilon^2}{2\varepsilon+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'r-\omega t)}}{k'r}\boldsymbol{Y}_{110}(\theta,\varphi)\\
&=-\frac{3\varepsilon^{3/2}}{2\varepsilon+1}\frac{\omega^2}{c^2}P_0\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'r-\omega t)}}{r}\boldsymbol{n}_\varphi,
\end{aligned}
\tag{C.14a}
$$

相应地，电场表达式为

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mathrm{i}c}{\varepsilon\omega}\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\frac{\omega^2}{c^2}P_0\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'r-\omega t)}}{r}\boldsymbol{n}_\theta. \tag{C.14b}
$$

通过计算一个远区球面上的能流，我们即可得出

$$
W=\left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\right)^2\sqrt{\varepsilon}W_0. \tag{C.15}
$$

将上式与(C.4)比较,就有

$$f_{\mathrm{local}} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}. \tag{C.16}$$

此值与昂萨格的值一致.

当然,局域化因子要有意义,必须能用到有限介质的情况,可以期望,(C.14)式所给出的结果对有限介质亦成立.因有限介质与无限介质的差别在于多了一个外表面,它会影响(C.4)式右方的($\sqrt{\varepsilon}W_0$)因子,但不致于影响由昂萨格小空腔所引起的附加修正因子.不过要通过计算一般性地来证明这一结论是困难的,只对比较简单的情况如介质是一个有限的球体而辐射原子又位于其中心才有可能.文献[3]中就给出了这样的证明,这里不再复述.下面转到量子理论.

## 2. 量子处理

在上述经典理论中,只涉及频率为 $\omega$ 时的 $\varepsilon$ 值,与$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}$无关.而在量子理论中,光子的态密度依赖于$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}$,这就引起疑虑.最后结果是否会与上述经典结果一致.但幸而在矢势 $\boldsymbol{A}$ 的展式中也要出现$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}$,而且正好与态密度中的$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}$消去[5],最后得出与经典理论一致的结果.

我们仍先考虑介质是无限的情况.虽然原子辐射出来的光场是向外传播的球面波,但在求辐射原子与光场的耦合常数时[见下文(C.24)式处],所用的光场函数应为球面驻波,道理与§4.2中计算多极辐射的 $S$ 矩阵元时的一样.因此下面的任务首先是求出介质带有昂萨格腔的电偶极场驻波模(它是归一化的,归一化的体积设为半径等于 $R$ 的大球),然后再通过计算原子与这种驻波模的耦合来求出其辐射率.

色散介质中电磁场的模函数在文献[6]中曾讨论过.对于与原子相耦合的电偶极场,其磁场强度可写成(参见文献[3])

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega^3\varepsilon}{Rc^2\left[1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right]}} f_k(r)\boldsymbol{Y}_{110}(\theta,\varphi). \tag{C.17}$$

此式对小腔外和小腔内都可采用,其中 $\varepsilon$ 皆取介质的介电常数,只是 $f_k(r)$将由不同的函数表示,在腔内,由于场在原点为有限值故有

$$f_k(r) = \alpha \mathrm{j}_1(kr), \quad r < r_0, \tag{C.18a}$$

其中 $k = \frac{\omega}{c}$,$\alpha$ 为待定常数.在昂萨格腔外,$g_k(r)$的形式为

$$f_k(r) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(1)}(k'r) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(2)}(k'r)], \quad r > r_0. \tag{C.18b}$$

其中 $k' = \sqrt{\varepsilon}\frac{\omega}{c}$ $\mathrm{h}_1^{(1)}(k'r)$和 $\mathrm{h}_1^{(2)}(k'r)$为第一类和第二类一阶球汉克尔函数,$\theta$ 亦为待定常数.(C.18b)式在远处($kr \gg 1$)符合渐近行为的要求[4]

$$f_k(r) \approx \frac{1}{k'r}\sin(k'r + \theta). \tag{C.19}$$

附带指出昂萨格腔的体积很小,腔内场对归一化积分的贡献可以忽略不计,但对计算原子与电偶极模的耦合系数它却是关键性的.

通过磁场强度可求出相应的电场强度.在腔面上电场和磁场切向分量的连续性给出下面的边值关系[3,4]

$$\alpha \mathrm{j}_1(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(1)}(a') - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(2)}(a')], \tag{C.20a}$$

$$\alpha \mathrm{j}_1(a) + \alpha a_0 \mathrm{j}'_1(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\varepsilon}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(1)}(a') - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(2)}(a')] + \frac{a}{2\mathrm{i}\varepsilon}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(1)\prime}(a') - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{h}_1^{(2)\prime}(a')]. \tag{C.20b}$$

其中 $a$ 和$a'$由(C.12)式所定义.从(C.20a)和(C.20b)式即可定出 $\alpha$ 和$\theta$.

为计算辐射率我们只需知道腔内场,因而只需知道 $\alpha$,在 $a \ll 1$ 和 $a' \ll 1$ 情况下,从(C.20)式解出的结果为[3]

$$\alpha = \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{2\varepsilon + 1}. \tag{C.21}$$

于是在原点附近即原子所在处

$$f_k(r) = \alpha\left(\frac{1}{3}kr\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\varepsilon + 1}kr. \tag{C.22}$$

再来看原子在带有昂萨格腔的介质中的辐射.

求出了电偶极场驻波模的磁场强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$后,即可求出相应的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$,再代入(4.1.8)式

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}(t) = -\frac{\mathrm{i}\hbar e}{mc}\int \hat{\phi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\,\nabla\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x, \tag{C.23}$$

就得出原子由能级 2 跃迁到能级 1 的电偶极辐射的耦合系数

$$g^{(k1)} = -\frac{e}{mc}\int \phi_1^*(\boldsymbol{x})\,\nabla\phi_2(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{A}^{(k1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x, \tag{C.24}$$

其中 $g$ 和$\boldsymbol{A}$ 的上标代表($k, j=1$).发射一个光子到($k1$)模的跃迁概率即为[参见(4.1.30)式]

$$w(\omega) = 2\pi\,|\,g^{(k1)}\,|^2\delta(\omega - \omega_0). \tag{C.25}$$

(C.24)式的积分范围为原子的体积,故 $\boldsymbol{A}^{(k1)}(\boldsymbol{x})$应取昂萨格腔中的值,因而

与参数 $\alpha$ 相联系.

以上是对单个模计算的结果.如设光子模的谱密度为 $\rho(\omega)$,则将它乘到 $w$ 上再对 $\omega$ 积分即可求出光子的总放射率.当归一化球面的半径 $R$ 取得比 $\lambda$ 大得多时,允许的半波长取值近似为 $R/\frac{\lambda}{2}$个,即模数 $N=2R/\lambda$,再由

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\sqrt{\varepsilon}\omega},$$

得出谱密度为

$$\rho(\omega) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega} = \frac{R}{\pi c}\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right). \tag{C.26}$$

于是光子的总放射率为

$$W = \int w(\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi \mid g^{(k1)} \mid^2 \frac{R\sqrt{\varepsilon}}{\pi c}\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right)\bigg|_{\omega=\omega_0}.$$

由此可见,通过 $\boldsymbol{A}^{(k1)}(\boldsymbol{x})$带到 $|g^{(k1)}|^2$ 中的因子$\dfrac{1}{1+\dfrac{\omega}{2\varepsilon}\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}}$正好与 $W$ 中又出现的 $\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\right)$消去,使得最终结果中并不出现$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}$.

利用(C.21)式所求出的 $\alpha$ 值,最后得

$$W = \left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\right)^2 \sqrt{\varepsilon} W_0. \tag{C.27}$$

于是同样求出

$$f_{\text{local}} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}. \tag{C.28}$$

与前面求出的经典结果一致,也就是与昂萨格的值一致.

以上考虑的是介质充满整个空间的情形,如果是一个有限体积的介质球,昂萨格腔位于其中心.得出的 $f_{\text{local}}$仍然与(C.28)式相同[3].

我们看到,量子处理与经典处理有很大的差别.在经典处理中直接计算的是位于昂萨格腔中原子所产生的行波电磁场,再由它在远区的值计算的向外的能流值来给出原子的辐射率.而在量子理论中,计算的是带有昂萨克腔介质(无限或有限)情况下电偶极驻波模的函数(该模的远区值由归一化条件确定,与原子的辐射强弱无关).而原子的辐射率由其跃迁电流与该模的耦合确定,因此只与该模在昂萨格腔内的值有关.

从以上说明可见,从这两种处理得出同样的结果并不是平凡的事.

## 参 考 文 献

1 L Onsager, J Am. Chem Soc. **58**:1486,1936

2 A R von Hippel. Dielectrics and Waves. New York: Wiley, 1954

3 Changqi Cao, Wei Long and Hui Cao. Phys Lett A. **232**:15,1997

4 Cao Changqi, Cao Hui(H.Cao)and Long Wei. J Phys B. **28**:5343,1995

5 P W Milonni. J Mod Opt. **42**:1991,1995

6 G Nienhuis and C Th. J Alkemade, Physica **81**c:181,1976

# D　原子集合的相干态和全纯表象

不仅光场有相干态,集中在小区域(其尺度比 $c/\omega_0$ 小得多,其中 $\omega_0$ 为原子的工作频率)的二能级原子集合亦有相干态,它具有与光场相干态相似的性质.该态也相当于自旋相干态.我们将对这种状态进行介绍,并用它来求解原子集合与经典外场相作用的主方程.最后还将它推广到多能级原子集合的情况.

## 1. 二能级原子集合的相干态

大量相同的二能级原子集合与单模光场有着许多相似性.首先我们来看这种原子集合的能量.如果每个原子上、下能级的能量差为 $\hbar\omega_0$,原子总数为 $N$,则该原子集合的能量可取为(原子下能级能量设为零)

$$0,\ \hbar\omega_0,2\hbar\omega_0,3\hbar\omega_0,\cdots,N\hbar\omega_0.$$

对比于单模光场的能量取值

$$0,\hbar\omega,2\hbar\omega,3\hbar\omega,\cdots$$

(其中 $\omega$ 为该光场的频率),我们看到两者的相似性,差别只是原子集合的能量存在一个上限.但当此上限比所涉及过程的能量大得多时,它的存在将不重要.如果原子集合又处于全对称状态(例如全体原子初始时都处于基态,并集中在一个小范围内,此小范围的尺度比与原子作用的光场波长小得多,则作用后任何时刻该原子集合都将处于全对称状态),那么对应于每个能级 $n\hbar\omega_0$,就只有一个状态,那就与单模光场更加对应了.

对于单模光场,除了福克态(即光子数本征态)$|n\rangle$以外,还有另一类重要的状态——相干态$|\alpha\rangle$.它是不同光子数态的某种相干叠加[参见(5.2.6)和(5.2.7)式]:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle. \tag{D.1}$$

该态也可以通过对真空态$|0\rangle$的一个幺正变换得出[参见(5.2.8)式]:

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}}|0\rangle. \tag{D.2}$$

20 世纪 70 年代初，Arecchi 等[1]指出，对于二能级原子集合也可引入原子相干态$|\beta\rangle$. 在此我们只限于讨论原子状态为全对称的情况，这时

$$|\beta\rangle = \frac{1}{(1+|\beta|^2)^{N/2}}e^{\beta\hat{\Sigma}_+}|0\rangle, \tag{D.3}$$

$(1+|\beta|^2)^{-N/2}$为归一化因子，$|0\rangle$代表该原子集合的基态（即所有 $N$ 个原子都处于下能级的状态$|0,N\rangle$，其中 $0,N$ 分别代表上、下能级的原子数），

$$\hat{\Sigma}_+ = \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_+^{(j)}, \tag{D.4}$$

$\hat{\sigma}_+^{(j)}$为第 $j$ 个原子的能级升迁算符，在二维表象中即为$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{(j)}$，$\hat{\Sigma}_+$ 可称为该原子集合的能级升迁算符，与光场的 $\hat{a}^{\dagger}$ 相对应，这样(D.3)就与(D.1)后一表达式相似.

$$(\hat{\Sigma}_+)^m|0\rangle = \sqrt{\frac{N!m!}{(N-m)!}}|m\rangle \tag{D.5}$$

（其中$|m\rangle$为$|m,N-m\rangle$的简写，亦即代表能量为 $m\hbar\omega_0$ 的原子态），我们可将(D.3)式化成各个$|m\rangle$态的相干叠加：

$$|\beta\rangle = \frac{1}{(1+|\beta|^2)^{N/2}}\sum_{m=0}^{N}\sqrt{\frac{N!m!}{(N-m)!}}\beta^m|m\rangle. \tag{D.6}$$

它与(D.1)中第一等式相对应，主要的差别是此级数只有有限项.

与光场相干态相似，原子相干态$|\beta\rangle$与$|\beta'\rangle(\beta'\neq\beta)$彼此不正交，但全体$|\beta\rangle$（在全对称的状态空间中）构成完备集，即单位算符可用原子相干态的投影算符来展开.

$$\frac{N+1}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{(1+|\beta|^2)^2}|\beta\rangle\langle\beta| = 1. \tag{D.7}$$

于是任何全对称的原子集合态$|f\rangle$可以用$|\beta\rangle$来展开，结果为

$$|f\rangle = \frac{N+1}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{(1+|\beta|)^2}|\beta\rangle\langle\beta|f\rangle = \frac{N+1}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{(1+|\beta|^2)^{N/2+2}}f(\beta^*)|\beta\rangle, \tag{D.8}$$

其中 $f(\beta^*)\equiv(1+|\beta|^2)^{N/2}\langle\beta|f\rangle$，按(D.6)式它为 $\beta^*$ 的 $N$ 阶多项式. 不难证明$|f\rangle$与多项式$f(\beta^*)$一一对应，从而 $f(\beta^*)$可作为$|f\rangle$的一种表示，亦称为全纯表示[2].

同样原子集合的任一个算符 $\hat{T}$亦可用 $\alpha^*$ 和 $\beta$ 的全纯函数 $T(\alpha^*,\beta)$来表

示[2]，它具有二元多项式的形式：$T(\alpha^*,\beta)=\sum_{m,n}^{N}T_{mn}\alpha^{*m}\beta^n$，而

$$\hat{T}=\frac{(N+1)^2}{\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{(1+|\alpha|^2)^{N/2+2}}\frac{\mathrm{d}^2\beta}{(1+|\beta|^2)^{N/2+2}}T(\alpha^*,\beta)|\alpha\rangle\langle\beta|. \tag{D.9}$$

Puri 和 Lawande[3] 曾求解过二能级原子集合与经典外场相互作用的主方程

$$\frac{\partial}{\partial_t}\hat{\rho}=-\mathrm{i}\Omega[\hat{\Sigma}_++\hat{\Sigma}_-,\hat{\rho}]+\gamma[2\hat{\Sigma}_-\hat{\rho}\hat{\Sigma}_+-\hat{\rho}\hat{\Sigma}_+\hat{\Sigma}_--\hat{\Sigma}_-\hat{\Sigma}_+\hat{\rho}]. \tag{D.10}$$

我们也可以用全纯表示来求上述主方程的解[2]. 采用全纯表示后，上述主方程可化成 $\hat{\rho}$ 的全纯表示 $\rho(\alpha^*,\beta)$ 满足的一个偏微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\alpha^*,\beta)=\left(N\alpha^*-\alpha^{*2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left[-\mathrm{i}\Omega+\gamma\left(N\beta-\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]\rho(\alpha^*,\beta),$$
$$+(\text{c.c.并且 }\alpha\leftrightarrow\beta). \tag{D.11}$$

其稳恒解可表示为多项式

$$\rho(\alpha^*,\beta)=\sum_{m,n}\rho_{mn}(\alpha^*)^m\beta^n. \tag{D.12}$$

将它代入(D.11)式并令 $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\alpha^*,\beta)=0$，即可得出 $\rho_{mn}$ 的一个递推关系式[2]：

$$(N-m+1)(N-n+1)\rho_{m-1,n-1}-\mathrm{i}\frac{\Omega}{\gamma}(N-m+1)\rho_{m-1,n}$$
$$-(N-n)(n+1)\rho_{m,n}+\mathrm{i}\frac{\Omega}{\gamma}(n+1)\rho_{m,n+1}+(\text{c.c.并且 }n\leftrightarrow m)=0. \tag{D.13}$$

由此即可解出

$$\rho_{mn}=\frac{(N!)^2 i^{m-n}}{(N-n)!(N-m)!\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^{m+n}}\rho_{00}. \tag{D.14}$$

其中 $\rho_{00}$ 可通过归一化条件确定.

二能级原子集合的相干态也相当于自旋相干态[4]. 设有 $N$ 个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子. 当每个粒子的 $s_z$ 都为 $-\frac{1}{2}$ 时，总的 $S_z$ 即为 $-\frac{N}{2}$. 这时 $\langle|(\hat{S}_1,\hat{S}_2,\hat{S}_3)|\rangle=\left(0,0,-\frac{N}{2}\right)$. 这一自旋指向负 $z$ 轴的态将记作 $|\theta=0,\varphi=0\rangle$. 即 $\theta$ 为从负 $z$ 轴计量的倾角.

任意方向的 $|\theta,\varphi\rangle$ 可通过图 1 中的轴 $\boldsymbol{n}$ 将 $|0,0\rangle$ 态转动一个角度 $\theta$ 得到

$$|\theta,\varphi\rangle=\hat{R}_{\theta,\varphi}|0,0\rangle \tag{D.15}$$

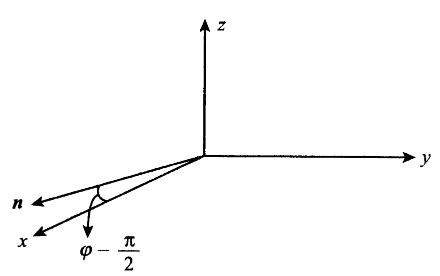



图 D.1 旋转轴 $\boldsymbol{n}$ 的示意图
($\boldsymbol{n}$ 在 $xy$ 平面中)

该轴 $\boldsymbol{n}$ 位于 $xy$ 平面中,它与 $x$ 轴间的角度为 $\varphi-\frac{\pi}{2}$. 不难看出原来指向负 $z$ 轴方向的 $\langle\hat{\boldsymbol{S}}\rangle$ 在通过 $\boldsymbol{n}$ 轴旋转 $\theta$ 角后,其方向角即为 $(\pi-\theta,\varphi)$,因为 $\langle\hat{\boldsymbol{S}}\rangle$ 为三维空间中的矢量.

按照(1.4.2)式,

$$\hat{R}_{\theta,\varphi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}})\theta}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\hat{S}_x\sin\varphi-\hat{S}_y\cos\varphi)}, \tag{D.16}$$

并可写成[1]

$$\hat{R}_{\theta,\varphi}=\mathrm{e}^{\xi\hat{S}_+-\xi^*\hat{S}_-}, \tag{D.17}$$

其中

$$\xi=\frac{1}{2}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},\quad \hat{S}_\pm=\hat{S}_x\pm i\hat{S}_y. \tag{D.18}$$

再通过角动量的拆解[1],可将 $\hat{R}_{\theta,\varphi}$ 化成

$$\hat{R}_{\theta,\varphi}=\mathrm{e}^{\tau\hat{S}_+}\mathrm{e}^{[\ln(1+|\tau|^2)]\hat{S}_z}\mathrm{e}^{-\tau^*\hat{S}_-},\quad \tau=\tan\frac{1}{2}\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{D.19}$$

将此式代入(D.15)式,并注意到 $\hat{S}_z|0,0\rangle=-\frac{N}{2}|0.0\rangle$

$$\mathrm{e}^{-\tau^*\hat{S}_-}|0,0\rangle=\left(1-\tau^*\hat{S}_-+\frac{1}{2}\tau^{*2}\hat{S}_-^2+\cdots\right)|0,0\rangle=|0,0\rangle,$$

$$\mathrm{e}^{[\ln(1+|\tau|^2)]\hat{S}_z}|0,0\rangle=\frac{1}{(1+|\tau|^2)^{N/2}}|0,0\rangle, \tag{D.20①}$$

即得出

$$\hat{R}_{\theta,\varphi}|0,0\rangle=\frac{1}{(1+|\tau|^2)^{N/2}}\mathrm{e}^{\tau\hat{S}_+}|0,0\rangle. \tag{D.21}$$

这里的 $\hat{S}_+$ 等当于(D.4)式所定义的 $\hat{\Sigma}_+$,于是(D.15)式所定义的 $|\theta,\varphi\rangle$ 就相当于(D.3)式所定义的原子相干态 $|\tau\rangle$,而 $|0,0\rangle$ 就相当于(D.3)式中的 $|0\rangle$. 通过这里的讨论,我们进一步看到 $|\tau\rangle$ 与 $|0\rangle$ 之间也是幺正变换关系. 因(D.17)式表明原子相干态 $|\tau\rangle$

$$|\tau\rangle=e^{\xi\hat{S}_+-\xi^*\hat{S}_-}|0\rangle, \tag{D.22}$$

---

① 推导(D.20)第二式时,要利用 $\hat{S}_z|0.0\rangle=-\frac{N}{2}|0,0\rangle$. 于是 $\mathrm{e}^{[\ln(1+|\tau|^2)]\hat{S}_z}|0,0\rangle=(\mathrm{e}^{\hat{S}_z})^{\ln(1+|\tau|^2)}|0,0\rangle=(\mathrm{e}^{-N/2})^{\ln(1+|\tau|^2)}|0,0\rangle$.

此式与光子相干态中的(D.2)式相对应.只是这里 $\tau$ 与 $\xi$ 有比较复杂的关系(参见(D.18)和(D.19)式).

原子相干态与光场相干态另一个相似点在于三个算符 $\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z$ 在 $|\tau\rangle$ 中期望值皆不为零:

$$\langle\tau|(\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z)|\tau\rangle=\frac{N}{2}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,-\cos\theta). \tag{D.23}$$

此式与光场相干态中的 $\langle\alpha|\hat{a},\hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle=(\alpha,\alpha^*)$ 相应,它还表明 $|\tau\rangle$ 具有宏观的自旋角动量.

在§5.6中,我们曾阐明纯态的经典电流所产生的量子光场为相干态光场.同样可以证明纯态的经典光场将激发出位于小范围(比光场波长小得多)内的原子集合的相干态[1].

## 2. 多能级原子集合的相干态

采用原子相干态表象对于处理原子集体与光场的相互作用过程具有它的方便性[5,6].但上述原子相干态只限于二能级原子集合,而许多光学过程涉及三能级或更多能级原子的集合,例如三能级原子集合的级联超荧光或三能级(四能级)原子超辐射激光器,为此在文献[2]中把原子相干态的理论推广到了多能级原子的情况.

首先我们考虑 $N$ 个三能级原子的集合,仍然设它们处于全对称的状态,在福克表象中,此全对称态可写成 $|n_3,n_2,n_1\rangle$,其中的 $n_3,n_2$ 和 $n_1$ 分别代表处于上能级,中能级和下能级的原子数.因为原子总数是有限的,我们也可从能量最高的状态 $|N,0,0\rangle$ 开始,通过重复运用算符 $\hat{S}_{23}$ 和 $\hat{S}_{12}$ 算符来得到 $|N-m,m-n,n\rangle$ 的态:

$$\hat{S}_{12}^n\hat{S}_{23}^m|N,0,0\rangle=\sqrt{\frac{N!m!}{(N-m)!}}\sqrt{\frac{m!n!}{(m-n)!}}|N-m,m-n,n\rangle. \tag{D.24}$$

$$0\leqslant n\leqslant m\leqslant N.$$

算符 $\hat{S}_{ij}$ 作用到任意态 $|n_3,n_2,n_1\rangle$ 上的结果如下:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{23}|n_3,n_2,n_1\rangle&=\sqrt{n_3(n_2+1)}|n_3-1,n_2+1,n_1\rangle,\\
\hat{S}_{32}|n_3,n_2,n_1\rangle&=\sqrt{n_2(n_3+1)}|n_3+1,n_2-1,n_1\rangle,\\
\hat{S}_{12}|n_3,n_2,n_1\rangle&=\sqrt{n_2(n_1+1)}|n_3,n_2-1,n_1+1\rangle,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{D.25}$$

在此全对称的子空间中,三能级原子集合的相干态定义如下[2]:

$$|\alpha,\beta\rangle = \frac{1}{[1+|\alpha|^2(1+|\beta|^2]^{N/2}} e^{\beta\hat{S}_{12}} e^{\alpha\hat{S}_{23}} |N,0,0\rangle.$$

参数 $\alpha,\beta$ 的意义可通过三个能级上的平均原子数 $\langle n_3\rangle$,$\langle n_2\rangle$ 和 $\langle n_1\rangle$ 间的比例以及 $\langle\hat{S}_{32}\rangle$ 和 $\langle\hat{S}_{21}\rangle$ 的辐角来显示:

$$\begin{aligned} &\langle n_3\rangle : \langle n_2\rangle : \langle n_1\rangle = 1 : |\alpha|^2 : |\alpha|^2|\beta|^2. \\ &\alpha = \mathrm{aig}\langle\hat{S}_{32}\rangle, \beta = \mathrm{aig}\langle\hat{S}_{21}\rangle. \end{aligned} \tag{D.26}$$

上式中的期待值都是对态 $|\alpha,\beta\rangle$ 来采取的.

像二能级原子集合的相干态一样,不同的 $|\alpha,\beta\rangle$ 态之间并不正交.

$$\langle\alpha,\beta|\alpha',\beta'\rangle = \frac{[1+\alpha^*\alpha'(1+\beta^*\beta')]^N}{[1+|\alpha|^2(1+|\beta|^2)]^{N/2}[1+|\alpha'|^2](1+|\beta'|^2)]^{N/2}}, \tag{D.27}$$

但它们也构成完备集(在全对称的子空间中),因为单位矩阵可用 $|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|$ 来展开,我们得出的结果是[2]

$$1 = \frac{(N+1)(N+2)}{\pi^2}\int d^2\alpha d^2\beta \frac{|\alpha|^2}{[1+|\alpha|^2(1+|\beta|^2)]^3} |\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|. \tag{D.28}$$

像二能级原子相干态一样,$|\alpha,\beta\rangle$ 实际上构成超完备整合.这种超完备性使得我们将相当广泛的密度算符 $\hat{\rho}$ 写成对角表示:

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha,\beta) |\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|. \tag{D.29}$$

其中的权重函数 $P(\alpha,\beta)$ 可看作为准概率密度,它是实数但不是正定的,与全纯表示不同,$P(\alpha,\beta)$ 并非其宗量的解析函数.

以上结果不难推广到更多能级原子的情况,例如对于四能级原子集合的全对称状态,相干态的定义为[2]

$$|\alpha,\beta,\gamma\rangle = \frac{1}{[1+|\alpha|^2+|\alpha\beta|^2+|\alpha\beta\gamma|^2]^{N/2}} e^{\gamma\hat{S}_{12}} e^{\beta\hat{S}_{23}} e^{\alpha\hat{S}_{34}} |N000\rangle. \tag{D.30}$$

而单位矩阵的展开式为

$$1 = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{\pi^3}\int d^2\alpha d^2\beta d^2\gamma \times \frac{|\alpha|^4|\beta|^2}{[1+|\alpha|^2+|\alpha\beta|^2+|\alpha\beta\gamma|^2]^4} |\alpha,\beta,\gamma\rangle\langle\alpha,\beta,\gamma|. \tag{D.31}$$

下面我们再来考察三能级原子情况的全纯表示,采用全纯表示后,一个状态可用二元的多项式表示,而主方程可化为偏微分方程.

在全对称的子空间中,三能级原子集合的状态 $|f\rangle$ 可用相干态 $|\alpha,\beta\rangle$ 展开为[2]

$$|f\rangle = \frac{(N+1)(N+2)}{\pi^2}\int \frac{|\alpha|^2}{[1+|\alpha|^2+|\alpha\beta|^2]^{N/2+3}} f(\alpha^*,\beta^*)|\alpha,\beta\rangle \tag{D.32}$$

其中

$$f(\alpha^*,\beta^*) = \sum_{m,n} f_{mn}\alpha^{*m}\beta^{*n},\quad 0\leqslant n\leqslant m\leqslant N \tag{D.33}$$

为二元的多项式,系数 $f_{mn}$ 与 $\langle N-m,m-n,n|f\rangle$ 相联系:

$$f_{mn} = \sqrt{\frac{N!}{(N-m)!m!}}\sqrt{\frac{m!}{(m-n)!n!}}\langle N-m,m-n,n|f\rangle. \tag{D.34}$$

$f(\alpha^*,\beta^*)$ 亦由 $|f\rangle$ 惟一地确定:

$$f(\alpha^*,\beta^*) = [1+|\alpha|^2+|\alpha\beta|^2]^{N/2}\langle\alpha\beta|f\rangle. \tag{D.35}$$

因此 $|f\rangle$ 与 $f(\alpha^*,\beta^*)$ 一一对应,故二元多项式 $f(\alpha^*,\beta^*)$ 可作为 $|f\rangle$ 的全纯表示.

同样算符 $\hat{T}$ 可表示为

$$\hat{T} = \frac{(N+1)^2(N+2)^2}{\pi^4}\int \frac{|\alpha|^2}{[1+|\alpha|^2+|\alpha\beta|^2]^{N/2+3}} \times \frac{|\alpha'|^2}{[1+|\alpha'|^2+|\alpha'\beta'|^2]^{N/2+3}} T(\alpha^*,\beta^*,\alpha',\beta')|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha',\beta'|, \tag{D.36}$$

其中

$$T(\alpha^*,\beta^*,\alpha',\beta') = \sum_{m,n,k,l} T_{mnkl}\alpha^{*m}\beta^{*n}\alpha'^k\beta'^l, 0\leqslant n\leqslant m\leqslant N, 0\leqslant l\leqslant k\leqslant N. \tag{D.37a}$$

为四元的多项式,系数 $T_{mnkl}$ 由 $\langle N-m,m-n,n|\hat{T}|N-k,k-l,l\rangle$ 决定

$$T_{mnkl} = \left[\frac{N!}{m!(N-m)!}\frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{k!}{l!(k-l)!}\right]^{1/2} \times\langle N-m,m-n,n|\hat{T}|N-k,k-l,l\rangle, \tag{D.37b}$$

$T(\alpha^*,\beta^*,\alpha',\beta')$ 称为算符 $\hat{T}$ 的全纯表示.

如果算符 $\hat{T}$ 为两个算符 $\hat{T}_1$ 和 $\hat{T}_2$ 的乘积,即

$$\hat{T} = \hat{T}_1\hat{T}_2 \tag{D.38}$$

则有

$$T(\alpha^*,\beta^*,\alpha',\beta') = \frac{(N+1)(N+2)}{\pi^2}\int \frac{|\lambda|^2 d^2\lambda d^2\sigma}{[1+|\lambda|^2+|\lambda\sigma|^2]^{N+3}} \times T_1(\alpha^*,\beta^*,\lambda,\sigma)T_2(\lambda^*,\sigma^*,\alpha',\beta'). \tag{D.39}$$

而若 $|g\rangle$ 等于 $\hat{T}|f\rangle$,相应的全纯表示间的关系即为

$$g(\alpha^*,\beta^*)=\frac{(N+1)(N+2)}{\pi^2}\int\frac{|\alpha'|^2\mathrm{d}^2\alpha'\mathrm{d}^2\beta'}{[1+|\alpha'|^2+|\alpha'\beta'|^2]^{N+3}}\times T(\alpha^*,\beta^*,\alpha',\beta')f(\alpha',\beta'). \tag{D.40}$$

## 参 考 文 献


1 F T Arecchi, E Courtens, R Gilmore and H Thomas. Phys Rev A. **6**:2211,1972

2 Cao Changqi and F Haake. Phys Rev A. **51**:4203,1995

3 R R Puri and S V Lawande. Phys Lett. **72A**:**200**,1979

4 J M Radcliffe, J Phys. A **4**:313,1971

5 L M Narducci, C A Coulter and C M Brown. Phys Rev A. **6**:829,1974

6 R Glauber and F Haake. Phys Rev A. **13**:357,1976


# E 半导体微腔 QED 激子的概念和局域激子的共振荧光

半导体微腔 QED(量子电动力学)即半导体微腔量子光学①,是固体物理和量子光学的交叉学科.微腔可以禁戒或增强其中辐射体的辐射过程;微腔中离散模间的间隔较大,当辐射体的辐射频率与腔模的频率不同时,其自发辐射即被禁戒,而当其辐射频率与某腔模频率一致时,其耦合常数又可以变得很大(因为一个光子所对应的腔场强度 $E$ 与$\frac{1}{\sqrt{V}}$成正比.参见§6.2 节前言).另外光子从腔中逸出的损耗率也增大,因为单位时间内光子在腔的两壁之间来回返射的次数增多.通常需要采取特殊的措施来得到 $Q$ 值较大的腔(如腔镜采用多层布拉格反射镜——DBR,或光场采用圆盘腔中的回音廊模,它利用全反射效应来获得大的 $Q$ 值).这类微腔的制作需要十分精细的近代技术才能完成.当微腔的 $Q$ 值很大时,辐射体自发辐射出来的光子可能在逸出微腔以前又被辐射体吸收,形成拉比振荡.由于这时没有外场存在,故常称为真空拉比振荡.

在半导体中可与光子相互作用的除了自由电子和陷空穴以外,还有两者的束缚态——激子.它可以游动在整个半导体中(除了被隔俘的以外).激子的概念是20世纪30年代由弗仑克尔(Frenkel),派尔斯(Peierls)和万尼尔(Wannier)提出来的.当时是为了解释绝缘体具有能力吸收线状频谱光波的问题.但到五六十年代激子的概念才受到广泛的注意,并发现在各类固体中它都起着作用.

半导体中自由激子与光子的作用有两个特点:

(1)它与光子的耦合常数与晶体中格点总数的平方根成正比,因而比单个格点

① 其特点是:耦合常数可以比腔的耗散常数 $\kappa$ 大.这种情况将称为强耦合体式.

原子与光子的耦合强得多.这使得激子与光子的作用过程受到更多的注意.

(2)它与光子的耦合又受到方向的限制,即两者的波矢要匹配.

所谓的"激子的辐射"并非指激子发射出一个光子,而是指它转化为光子.当然光子在半导体中也能转化成激子.这种相互转化还可以形成一种定态,它是一个光子态和一个激子态的相干叠加,称作(激子型的)极化激元(polariton).

半导体光学器件由于体积小、易抽运(电泵)、损耗低,故适用于大规模集成光电路,具有重要的应用前景,半导体量子光学又是交叉学科,具有广泛的研究课题,值得量子光学工作者注意.

### 1. 激子与光子的耦合常数

为简单起见,我们考虑"平板形立方晶格"晶体中垂直板面运动的弗仑克尔激子.设晶格共有 $N$ 层,晶格原子具有二个能级,弗仑克尔激子与通常二能级原子激发态的差别在于:晶体中原子互相紧靠,由于原子间的相互作用,任一个原子的激发可以容易地转移到邻接的原子上,形成激发态在晶体中的移动.激发能转移的方向就是激子的运动方向.当激子运动方向与晶板垂直时,最有利于向晶板外辐射光子.

垂直于晶板转移的激发原子与光子相互作用的哈密顿量(未作旋波近似)为

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\sum_{q,j}\sum_{l,n}G_{qj}\hat{B}^{\dagger}_{ln}\left[\hat{a}_{qj}e^{iqla} + \hat{a}^{\dagger}_{qj}e^{-iqla}\right] + \text{h.c.}, \tag{E.1}$$

其中 $a$ 为晶格常数,$l$ 为层指标,$n$ 为该层中晶格位置指标,$\hat{B}^{\dagger}_{ln}$ 为 $l$ 层 $n$ 格点的激发算符,$\hat{B}_{ln}$ 为 $l$ 层 $n$ 格点的退激算符,$\hat{a}_{qj}$ 和 $\hat{a}^{\dagger}_{qj}$ 为光子的发射和吸收算符,$G_{qj}$ 为光子与晶格原子的耦合常数,它可表示为

$$G_{qj} = \sqrt{\frac{2\pi\omega_0^2}{V\hbar qc}}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_{qj}, \tag{E.2}$$

其中 $\omega_0$ 为格点原子的跃迁频率,$\boldsymbol{d}$ 为相应的跃迁电偶极矩.$V$ 为光子的归一化体积,晶板位置取在它的中间部位如图 1 所示.

当激发的浓度低时,$\hat{B}_{ln}$ 和 $\hat{B}^{\dagger}_{l'n'}$ 在统计的意义上满足对易关系

$$[\hat{B}_{ln}(t), \hat{B}^{\dagger}_{l'n'}(t)] = \delta_{ll'}\delta_{nn'}. \tag{E.3}$$

若定义第 $l$ 层的集体激发算符为

$$\hat{B}^{\dagger}_{l} = \frac{1}{\sqrt{N_S}}\sum_{n}\hat{B}^{\dagger}_{ln}, \tag{E.4}$$

其中 $N_S$ 为每个层面中晶格格点总数,则 $\hat{B}_l(t)$ 和 $\hat{B}^{\dagger}_{l'}(t)$ 满足的对易关系为



图 1　晶板和光子的归一化体积 $V$

$$[\hat{B}_l(t),\hat{B}_{l'}^\dagger(t)] = \delta_{ll'}. \tag{E.5}$$

于是 $\hat{H}_{\text{int}}$亦可表成

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sqrt{N_S}\sum_{\boldsymbol{q}j}\sum_l G_{\boldsymbol{q}j}\hat{B}_l^\dagger[\hat{a}_{\boldsymbol{q}j} + \hat{a}_{-\boldsymbol{q}j}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}qla} + \text{h.c.}. \tag{E.6}$$

定义"运动方向与平板垂直的"自由弗仑克尔激子算符 $\hat{B}_k(t)$为

$$\hat{B}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kla}\hat{B}_l(t), \tag{E.7}$$

其中 $N$ 为晶体中总的层数，而 $k$ 的取值为

$$k = \frac{2\pi m}{Na}, m = -\frac{1}{2}(N-1), -\frac{1}{2}(N-3), \cdots, \frac{1}{2}(N-1). \tag{E.8}$$

这样，对于每个 $k$ 值都存在一个相应的 $-k$.(E.7)式中 $l$ 的取值亦为 $-\frac{1}{2}(N-1), \cdots, \frac{1}{2}(N-1)$.

不难得出激子算符满足玻色子的对易关系

$$[\hat{B}_k(t),\hat{B}_{k'}(t)] = \delta_{kk'}. \tag{E.9}$$

当平板晶体的层面很大时，光子的波矢 $\boldsymbol{q}$ 亦将与平板垂直.这时(E.6)式所表示的 $\hat{H}_{\text{int}}$可用自由运动的激子算符改写成

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hbar\sum_{q,j}\sum_k G_{qj}^{(T)}O(q-k)[\hat{a}_{qj}(t) + \hat{a}_{-qj}^\dagger(t)][\hat{B}_{-k}(t) + \hat{B}_k^\dagger(t)], \tag{E.10}$$

其中

$$O(q-k) = \frac{1}{N}\sum_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-k)la} = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{1}{2}N(q-k)a}{\sin\frac{1}{2}(q-k)a}, \tag{E.11}$$

$$G_{\boldsymbol{q}j}^{(T)} = \sqrt{N_T}G_{\boldsymbol{q}j}, \quad N_T = NN_S. \tag{E.12}$$

$N_T$ 为晶体中格点的总数.

以上结果告诉我们自由激子与光子的耦合常数 $G_{\boldsymbol{q}j}^{(T)}$ 与整个晶板中的格点总数$N_T$ 的平方根成正比.因此一般来说它要比 $G_{\boldsymbol{q}j}$ 大得多.另外，因子 $O(q-k)$当 $q=k$ 时为 1.如果层数 $N$ 为一大数，则随着 $|q-k|$ 的增大它迅速下降，当 $|q-k|$达到$\frac{2\pi}{Na}$时降到零，随后并振荡状地衰减.

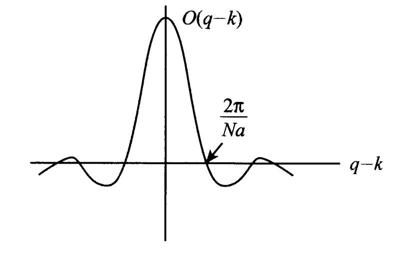



图 2 函数 $O(q-k)$的图形

当 $N$ 足够大时,等式 $q=k$ 将成立.

在 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 方向不同的一般情况下,(E.10)式即推广为

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hbar\sqrt{N_T}\sum_{\boldsymbol{q},j}\sum_{\boldsymbol{k}}G_{\boldsymbol{q}j}O(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})[\hat{a}_{\boldsymbol{q}j}(t)+\hat{a}^{\dagger}_{-\boldsymbol{q}j}(t)][\hat{B}_{-\boldsymbol{k}}(t)+\hat{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(t)]. \tag{E.13}$$

其中 $O(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})=\frac{1}{N}\sum_{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}_n}$.(E.13)式不仅对弗仑克尔激子成立,对万尼尔激子亦成立,只是在万尼尔激子情况 $G_{\boldsymbol{q}j}$ 与电子-空穴相对运动的波函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 有关,粗略地说

$$G_{\boldsymbol{q}j} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}\int\varphi(\boldsymbol{x})G^{\boldsymbol{q}j}_{vc}(x)\mathrm{d}^3x, \tag{E.14}$$

其中 $G^{\boldsymbol{q}j}_{vc}(\boldsymbol{x})$ 可看作"相互距离为 $\boldsymbol{x}$ 的电子和空穴"与($\boldsymbol{q}j$)光子的耦合常数,它也可以通过"价带中的电子与光子作用而跃迁到导带"的耦合常数更确切地表述出来(脚标 $v,c$ 代表价带和导带.由于价带基本上是占满的而导带基本上是空的,我们将只考虑电子从价带到导带的跃迁).

(E.13)式正如本附录前言中所述,光子与自由激子的耦合常数与晶体中格点总数 $N_T$ 的平方根成正比,但对给定的激子波矢 $\boldsymbol{k}$,耦合光子的 $\boldsymbol{q}$ 限制在一个较小的范围内,如 $O(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$ 表示.如果晶体很大,$\boldsymbol{q}$ 就基本上与 $\boldsymbol{k}$ 相等.有关万尼尔激子与光子的 $\hat{H}_{\text{int}}$ 我们将在下面小字部分作进一步讨论.

以上结果表明自由激子与光子之间的耦合具有合作的性质,但与原子集合的超辐射(聚集在小范围内的 $N$ 个原子的合作辐射,参见附录 F)不同;由于自由激子转化成的光子具有很小的相空间,它可容易地又转化回到激子,因此激子的"辐射"过程需要特殊处理(见附录 F).

这里我们将直接讨论自由万尼尔激子与光子的 $\hat{H}_{\text{int}}$,并将其耦合常数与电子和光子间的耦合常数相比较.

电子在晶体内的周期场中运动的波函数通常用布洛赫函数 $B^{(v)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ 和 $B^{(c)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ 来表示,其中上标 $v$ 和 $c$ 分别表示价带(满带)和导带(空带),下面统一地用 $\alpha$ 表示,它们为晶格的周期函数 $\frac{1}{\sqrt{N_T}}u^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ 与行波因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ 的乘积

$$B^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{N_T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}u^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \tag{E.15}$$

$u^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ 是在晶胞范围内归一的

$$\int_{\text{cell}}u^{(\alpha)*}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})u^{(\alpha)}_{\boldsymbol{k}}(x)\mathrm{d}^3x = 1. \tag{E.16}$$

除布洛赫函数外,还有一类定域在各个格点 $n$ 附近的函数 $W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)$ 同样可构成晶体中电子波函数的完备集,它们称为万尼尔函数(注意它与万尼尔激子的波函数不是一回事).其定

义为

$$W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)=\frac{1}{\sqrt{N_T}}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}B_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}). \tag{E.17a}$$

需要指出的是，$W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)$并非晶体周期场中的定态(能量本征态)但构成正交归一的完备集：

$$\int W_\alpha^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)W_{\alpha'}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{n'})\mathrm{d}^3x=\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{nn'}. \tag{E.17b}$$

从(E.17a)式还可解出

$$B_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{N_T}}\sum_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n), \tag{E.18}$$

上式与弗仑克尔激子的(E.7)和(E.6)式相对应．既然 $B_{\boldsymbol{k}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})$可用 $W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)$表示出来，晶体中电子的任意状态自然也都能用 $W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)$来表示．我们将简单地把 $\boldsymbol{x}_n$ 称作电子的座位(或座位中心)．

晶体中电子与光子相互作用的哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=-\frac{\mathrm{i}\hbar e}{mc}\int\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x \tag{E.19}$$

若将“能带 $\alpha$”的电子场算符 $\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x})$用万尼尔函数展开即

$$\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x})=\sum_n W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\hat{b}_{n\alpha},$$

则所得出的算符 $\hat{b}_{n\alpha}$可看作定域在格点 $n$ 附近的 $\alpha$ 能带中电子的吸收算符．而(E.19)式可表示成

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=\hbar\sum_{\boldsymbol{q}j}\sum_{n\alpha}\sum_{n'\alpha'}\left[\hat{b}_{n'\alpha'}^\dagger\hat{b}_{n\alpha}\hat{a}_{\boldsymbol{q}j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_n}G_{n'\alpha',n\alpha}^{\boldsymbol{q}j}\right.$$
$$\left.+\hat{b}_{n\alpha}^\dagger\hat{b}_{n'\alpha'}\hat{a}_{\boldsymbol{j}j}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_n}G_{n'\alpha',n\alpha}^{\boldsymbol{q}j*}\right]. \tag{E.20}$$

其中

$$G_{n'\alpha',n\alpha}^{\boldsymbol{q}j}=-\frac{\mathrm{i}e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)}W_{\alpha'}^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{n'})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}j}\cdot\nabla W_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\mathrm{d}^3x. \tag{E.21}$$

如果 $\alpha$ 取 $v$，$\alpha'$取 $c$，则 $\hat{b}_{n'c}^\dagger\hat{b}_{nv}$代表价带中座位在 $\boldsymbol{x}_n$ 的电子跃迁到导带中座位 $\boldsymbol{x}_{n'}$ 的算符，也就是通常所说的电子-空穴对的产生算符，$n'$和 $n$ 标志电子和空穴的座位，我们可用 $\hat{B}_{n'n}^\dagger$ 表示它：

$$\hat{B}_{n'n}^\dagger=\hat{b}_{n'c}^\dagger\hat{b}_{nv}. \tag{E.22}$$

而 $\hat{B}_{n'n}=\hat{b}_{nv}^\dagger\hat{b}_{n'c}$代表上述电子-空穴对的湮没算符．耦合常数亦简写成 $G_{n'n}^{\boldsymbol{q}j}$．

下面来看万尼尔激子．万尼尔激子为松束缚的电子-空穴对．设电子相对空穴的波函数为 $\varphi(\boldsymbol{x}_{n'}-\boldsymbol{x}_n)$，如果用空穴的座位代表激子的座位，则立方晶体中座位在 $\boldsymbol{x}_n$ 的定域万尼尔激子的产生算符为

$$\hat{C}_n^\dagger=\sqrt{a^3}\sum_{n'}\varphi(\boldsymbol{x}_{n'}-\boldsymbol{x}_n)\hat{b}_{n'c}^\dagger\hat{b}_{nv}\equiv\sqrt{a^3}\sum_{n'}\varphi(\boldsymbol{x}_{n'}-\boldsymbol{x}_n)\hat{B}_{n'n}^\dagger. \tag{E.23}$$

上式中的系数由量纲要求($\hat{C}_n^\dagger$ 应为无量纲的)以及对易关系式

$$[\hat{C}_n, \hat{C}_n^\dagger] = 1 \tag{E.24}$$

来确定.

在旋波近似下,座位在 $n$ 的定域万尼尔激子与光子的相互作用哈密顿量可写成

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \sum_{qj} \sum_{n} [\hat{C}_n^\dagger \hat{a}_{qj} e^{iq\cdot x_n} G_{qj}^n + \hat{C}_n \hat{a}_{qj}^\dagger e^{-iq\cdot x_n} G_{qj}^{n*}], \tag{E.25}$$

其中耦合常数

$$G_{qj}^n = \sqrt{a^3} \sum_{n'} \varphi(\boldsymbol{x}_{n'} - x_{\boldsymbol{n}}) G_{n'c,nv}^{qj}. \tag{E.26}$$

具有波矢 $\boldsymbol{k}$ 的自由万尼子激子可表示为座位为 $n$ 的激子的相干叠加:

$$\hat{C}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_T}} \sum_n e^{ik\cdot x_n} \hat{C}_n^\dagger. \tag{E.27}$$

从上式可反解出

$$\hat{C}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_T}} \sum_k e^{-ik\cdot x_n} \hat{C}_k^\dagger, \tag{E.28}$$

代回(E.25)式中即得

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \sum_{qj} \sum_{k} [\hat{C}_k^\dagger \hat{a}_{qj} G_{qj}^k + \hat{C}_k \hat{a}_{qj}^\dagger G_{qj}^{k*}], \tag{E.29}$$

其中

$$G_{qj}^k = \frac{1}{\sqrt{N_T}} \sum_n e^{i(q-k)\cdot x_n} G_{qj}^n. \tag{E.30}$$

实际上 $G_{qj}^n$ 一般与 $n$ 无关(除了靠近晶体表面的 $n$ 以外),因此上式可近似成

$$G_{qj}^k = \sqrt{N_T} O(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}) G_{qj}. \tag{E.31}$$

此结果与(E.10)~(E.12)式一致.另外 $G_{qj}$[即(E.30)式中 $G_{qj}^n$]与电子-光子耦合常数(更具体地说是价带电子与光子作用而跃迁到导带中去的耦合常数)同量级①.这就表明在波矢匹配的情况下,自由万尼尔激子与光子的耦合要比自由电子与光子耦合强得多(因 $O(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{k})$ 在 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{k}$ 时等于 1).

## 2. 局域激子的共振荧光

当激子局域在一个介观大小的晶体中时(注意局域与定域不同指局限于).它将像大原子那样在相干光激励下发出共振荧光.在它仍可近似作为玻色子的情况下,所发射的共振荧光又具有自己的特点[1].

我们将看到在激子的浓度很低时,在辐射谱中将不出现拉比分裂,而当激子浓度较高,因而激子与激子之间的相互作用出现时,其辐射谱在泵光强度超过某一临界值的情况下将出现双峰分裂[1].

由于荷载激子的晶体小,故我们将略去其中激子的行波行为,简单地用 $\hat{C}$ 和

① 在(E.26)式右方,主要贡献为 $n' = n$ 的项,共值即为 $\sqrt{a^3}\varphi(0) G_{nc,nv}^{gj} \approx G_{nc,nv}^{gj}$.

$\hat{C}^\dagger$ 来表示它的吸收和产生算符.激子之间的相互作用项即用 $\hbar G\hat{C}^\dagger\hat{C}^\dagger\hat{C}\hat{C}$ 表示,其中 $G$ 为实数.按照§5.6第2小节的讨论,本来应出现在系统状态矢量中的相干光场可取为 $c$ 数转移到 $\hat{H}_{\text{int}}$ 内,即在 $\hat{H}$ 中增加一项 $\mathrm{i}\hbar(E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\hat{C}^\dagger-\mathrm{i}\hbar(E^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t})\hat{C}$,作用常数已吸收到 $E$ 中,于是

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\hbar\omega_0\hat{C}^\dagger\hat{C}+\hbar G\hat{C}^\dagger\hat{C}^\dagger\hat{C}\hat{C}+\mathrm{i}\hbar(E\hat{C}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}-E^*\hat{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t})\\&+\hbar\sum_k\hbar\omega_k\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\hbar\hat{C}^\dagger\sum_k g_k\hat{a}_k+\hbar\hat{C}\sum_k g_k^*\hat{a}_k^\dagger.\end{aligned}\tag{E.32}$$

激子运动的主方程在马尔科夫近似下可仿照§6.4中对原子的处理来推出[1],其结果为

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_0,\hat{\rho}]+\gamma(2\hat{C}\hat{\rho}\hat{C}^\dagger-\hat{\rho}\hat{C}^\dagger\hat{C}-\hat{C}^\dagger\hat{C}\hat{\rho}).\tag{E.33}$$

其中 $\hat{H}_0$ 代表只含激子算符的部分,即

$$\hat{H}_0=\hbar\omega_0\hat{C}^\dagger\hat{C}+\hbar G\hat{C}^\dagger\hat{C}^\dagger\hat{C}\hat{C}+\mathrm{i}\hbar(E\hat{C}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}-E^*\hat{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}),\tag{E.34}$$

$\gamma$ 为小晶体中激子的自发辐射率.

由于激子为玻色子,它的密度算符像光子一样具有正 $P$ 表示(参见§5.5第5小节),利用(5.5.64)式,主方程(E.33)即可转化为福克尔-普朗克方程.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha,\beta^*,t)=&\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma\alpha-E+2\mathrm{i}G\alpha^2\beta^*)+\frac{\partial}{\partial\beta^*}(\gamma\beta^*-E^*-2\mathrm{i}G\beta^{*2}\alpha)\\&-\frac{\partial^2}{\partial^2\alpha}(\mathrm{i}G\alpha^2)+\frac{\partial^2}{\partial^2\beta^*}(\mathrm{i}G\beta^{*2})\Big]P(\alpha,\beta^*,t)\end{aligned}\tag{E.35}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta^*$ 为独立的复变量.另外,我们已经转换到激子的转动坐标架,即 $\alpha\to\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$,$\beta^*\to\beta^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$.

(E.35)式为非线性的福克尔-普朗克方程.一般情况下很难求出它的解析解.我们将首先应用 Ito 规则[2]将它转化成随机微分方程.这种转化是允许的,因为在正 $P$ 表示中福克尔-普朗克方程总有半正定的扩散矩阵(参见§5.5第5小节).然后再对随机微分方程近似求解.与(E.35)式等价的随机微分方程为[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\gamma\alpha+E-2\mathrm{i}G\alpha^2\beta^*\\-\gamma\beta^*+E^*+2\mathrm{i}G\beta^{*2}\alpha\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-2\mathrm{i}G\alpha^2&0\\0&2\mathrm{i}G\beta^{*2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\zeta^*\end{pmatrix},\tag{E.36}$$

其中 $\xi$ 和 $\zeta^*$ 为互相独立的高斯型涨落力(从而 $\alpha$ 与 $\beta^*$ 并不互为复共轭),它们满足下述条件:

$$\begin{aligned}&\langle\xi(t)\rangle=\langle\zeta^*(t)\rangle=0,\\&\langle\xi(t)\zeta^*(t')\rangle=\langle\zeta^*(t)\xi(t')\rangle=0,\\&\langle\xi(t)\xi(t')\rangle=\langle\zeta^*(t)\zeta^*(t')\rangle=\delta(t-t').\end{aligned}\tag{E.37}$$

下面来做近似处理:假定涨落力只引起小的扰动,我们先略去它们来求出 $\alpha$ 和$\beta^*$ 的常态解 $\alpha_0$ 和 $\beta_0^*$. 如果该常态解是稳定的(即微小的扰动只引起状态微小的变化),那么只需加上 $\xi$ 和$\zeta^*$ 所引起的微小扰动 $\delta\alpha$ 和 $\delta\beta^*$,就将得出总的 $\alpha$ 和 $\beta^*$. $\delta\alpha$ 和 $\delta\beta^*$ 的方程在线性化后为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\delta\alpha(t)\\ \delta\beta^*(t)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\gamma+\mathrm{i}4G\alpha_0\beta_0^* & \mathrm{i}2G\alpha_0^2\\ -\mathrm{i}2G\beta_0^{*2} & \gamma-\mathrm{i}4G\beta_0^*\alpha_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\alpha(t)\\ \delta\beta^*(t)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-\mathrm{i}2G\alpha_0^2 & 0\\ 0 & \mathrm{i}2G\beta_0^{*2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \zeta^*(t)\end{pmatrix}$$

$$\equiv-\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\delta\alpha(t)\\ \delta\beta^*(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}^{1/2}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \zeta^*(t)\end{pmatrix}, \tag{E.38}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{D}^{1/2}$代表相应的 $2\times2$ 矩阵.

由于常态解与涨落力无关,故 $\beta_0^*$ 即等于 $\alpha_0^*$. $n\equiv\alpha_0^*\alpha_0$ 代表激子数中的“相干部分”(因 $\alpha_0$ 对应于$\langle\hat{C}\rangle_s$). 它等于方程

$$n^3+\frac{\gamma^2}{4G^2}n-\frac{|E|^2}{4G^2}=0 \tag{E.39}$$

的正实数根(只有一个). 另外不难证明常态解的确是稳定的[1].

有了以上结果即可来求激子的共振荧光谱.

我们用 $\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$代表小晶体外某点 $\boldsymbol{x}$ 处 $t$ 时刻电场的正频部分,按推迟解公式它与 $t-\frac{r}{c}$的激子算符 $\hat{C}\left(t-\frac{r}{c}\right)$成正比,比例系数与 $\boldsymbol{x}$ 的位置有关. 激子所发出的光场频谱的定常值 $I(\boldsymbol{x},\omega)$为

$$I(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{2\pi}\lim_{t_0\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{x},t_0+\tau)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{x},t_0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{E.40}$$

上式右方取 $t_0\to\infty$是为了达到定常态,再利用 $\hat{E}^+(\boldsymbol{x},t)$与 $\hat{C}\left(t-\frac{r}{c}\right)$间的正比关系即得出

$$I(\boldsymbol{x},\omega)\alpha\lim_{t_0\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\hat{C}^\dagger(t_0+\tau)\hat{C}(t_0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{E.41}$$

上式右方可以通过$\langle\beta^*(\tau)\alpha(0)\rangle$的傅里叶分析给出,结果为

$$\lim_{t_0\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\hat{C}^\dagger(t_0+\tau)\hat{C}(t_0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=2\pi(\alpha_0^*\alpha_0)\delta(\omega)$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\delta\beta^*(\tau)\delta\alpha(0)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{E.42}$$

(E.42)式右方第一项为弹性散射的谱,第二项才是共振荧光谱. 通常定义谱函数

矩阵 $\boldsymbol{S}(\omega)$为

$$\boldsymbol{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{bmatrix}\langle\delta\alpha(\tau)\delta\alpha(0)\rangle & \langle\delta\alpha(\tau)\delta\beta^*(0)\rangle\\ \langle\delta\beta^*(\tau)\delta\alpha(0)\rangle & \langle\delta\beta^*(\tau)\delta\beta^*(0)\rangle\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{E.43}$$

$\boldsymbol{S}(\omega)$可由(E.38)式中的 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{D}$ 给出[3]：

$$\boldsymbol{S}(\omega)=(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{I})^{-1}. \tag{E.44}$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.按(E.42)式共振荧光谱 $I^{(2)}(\boldsymbol{x},\omega)$[(E.42)式右方第二项],即为 $S_{21}(\omega)$.我们再从激子的转动坐标架回到原来的坐标架,结果即得

$$I^{(2)}(\boldsymbol{x},\omega)\propto\frac{8G^2n^2\gamma}{[\gamma^2-(\omega-\omega_0)^2+12G^2n^2]^2+4\gamma^2(\omega-\omega_0)^2}, \tag{E.45}$$

其中 $n$ 由(E.39)式的正实数根给出,其值为

$$n=\left[\frac{|E|^2}{8G^2}+\sqrt{\frac{|E|^4}{64G^4}+\left(\frac{\gamma^2}{12G^2}\right)^3}\right]^{1/3}-\left[-\frac{|E|^2}{8G^2}+\sqrt{\frac{|E|^4}{64G^4}+\left(\frac{\gamma^2}{12G^2}\right)^3}\right]^{1/3} \tag{E.46}$$

若 $G=0$,则从(E.39)式可直接看出 $n=\dfrac{|E|^2}{\gamma^2}$.

当泵光为零时,从(E.46)式即得 $n=0$,对于弱泵光($12G^2n^2\leqslant\gamma^2$),从(E.45)式的分母可得出,荧光谱只有一个峰,峰的中心位置在 $\omega=\omega_0$ 处.而对强泵光,$12G^2n^2>\gamma^2$,则荧光谱将有两个峰,其位置为

$$\omega=\omega_0\pm\sqrt{12G^2n^2-\gamma^2}. \tag{E.47}$$

从以上结果可以看出,在 $I(\boldsymbol{x},\omega)$中并不出现拉比分裂的峰(尽管在激子-光子系统中能级会出现拉比分裂).荧光谱中不出现拉比分裂是由于激子的玻色子性质所决定的,而不是以上处理中作了小涨落近似的结果.在文献[1]中对此作了进一步的论证.

文献[1]还查验了小涨落近似的条件.为此对激子总数中非相干部分 $n'$进行了计算($n'$等于$\langle\delta\beta^*\delta\alpha\rangle$).在常态时其结果为

$$n'=\frac{2G^2n^2}{\gamma^2+12G^2n^2}. \tag{E.48}$$

由此可见只要相干部分光子数 $n\gg\dfrac{1}{6}$或激子之间相互作用足够弱 $G^2\ll\dfrac{\gamma^2}{2n}$,$\dfrac{n'}{n}$就比 1 小得多.小涨落近似都将是成立的.

最后,文献[1]中还给出了荧光强度的量子涨落 $\sigma$ 的定常值,其定义为

$$\sigma=\frac{\langle\hat{E}^{(-)2}\hat{E}^{(+)2}\rangle_s-\langle\hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}\rangle_s^2}{\langle\hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}\rangle_s^2}, \tag{E.49}$$

它等于二阶量子相关度与1的差(参见§7.2).此值可通过

$$\sigma = \frac{\langle \beta^{*2} \alpha^2 \rangle_s - \langle \beta^* \alpha \rangle_s^2}{\langle \beta^* \alpha \rangle_s^2} \tag{E.50}$$

来求出.在准到$\left| \frac{\delta\alpha}{\alpha_0} \right|$的二次方时,结果为

$$\sigma = 2\frac{\langle \delta\beta^* \delta\alpha \rangle_s}{\alpha_0^* \alpha_0} + \frac{\langle \delta\alpha^2 \rangle_s}{\alpha_0^2} + \frac{\langle \delta\beta^* \rangle_s^2}{\alpha_0^2} = -\frac{4G^2 n}{\gamma^2 + 12G^2 n}. \tag{E.51}$$

此结果表明,不论 $n$ 的值如何,激子的共振荧光都具有"非经典光场"(特征性量子光场)的特点.$\sigma$ 的最小值出现在

$$n = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}G} \tag{E.52}$$

处.如果 $G=0$ 即激子之间无相互作用,则从(E.51)式直接看出 $\sigma=0$,这与此时只有相干的弹性"散射"的情况是一致的.

## 参 考 文 献

1 Yuxi Liu, Changqi Cao and Hui Cao. Phys Rev A. **61**:023802,2000;Erratum. Phys Rev A. **65**:069901

2 P D Drummond and C W Gardiner. J Phys A. **13**:2353,1980,亦可参见 C W Gardiner. Handbook of Stochastic Process. Berlin, Heidelberg:Springer, 1984; Quantum Noise. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981, 或 D F Walls and G J Milburn. Quantum Optics. Berlin: Springer-Verlag. 1994.

3 S Chaturvedi, C W Gardiner, I S Matheson and D F Walls. J Stat Phys. **17**:469,1977

# F　超辐射的基本概念　自由激子的超辐射

超辐射是指多个原子的合作辐射.若原子总数为 $N$,并都处于激发态上,则在通常气体的情况,其辐射率正比于 $N$.而在合作辐射情况,其最大辐射率正比于 $N^2$(这时辐射场强正比于 $N$).另一个相关的名词"超荧光"则应指全反转的 $N$ 个原子集合自发辐射的整个过程.在初始时,其辐射率正比于 $N$,在辐射的高峰期才形成超辐射,随后由于处于激发态(即反转态)原子的数目迅速减少,辐射率急剧地下降,并趋于零.

超辐射过程的实现并不容易,许多因素会破坏它.如原子的无规移动会破坏超辐射所必需的各个原子跃迁偶极矩间的位相关联.又原子之间的范德瓦尔斯作用力,碰撞和多普勒效应等都会对它产生破坏性影响.合作效应要求原子比较密集,而密集的原子之间的破坏性效应又更显著.此外,超辐射还面临其他一些过程的竞

争,更增加了实现的困难.

在这里,我们先就理想的 $N$ 个原子集合情况来介绍超辐射的基本概念,然后讨论激子的超辐射问题.由于固体中各个原子的位置比较确定,故激子的超辐射实现起来会容易些.

## 1. 关于超辐射的基本概念

超辐射的概念是狄克在 1954 年提出来的[1].在随后的二三十年中为许多作者所研究[2].超辐射的机制是不同原子的跃迁电偶极矩之间发生了关联,从而形成合作辐射.我们将说明它具有一种“源自微观不确性”的宏观不确定性.

我们来看最简单的情况,设有 $N$ 个相同的二能级原子聚集在一个小范围内,该范围的尺度比原子辐射光的波长小得多.因此这些原子与辐射光场间的相互作用哈密顿量对各个原子是对称的.如果原子之间的相互作用(即范德瓦尔斯力,它是由原子之间交换虚光子而形成的)又可以略去.那么整个哈密顿量对于此 $N$ 个原子将具有交换对称性.同时在 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中就只有辐射光场与各原子的作用,并可写成

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g \sum_{j=1}^{N} (\hat{\sigma}_{+}^{(j)} \hat{a} + \hat{\sigma}_{-}^{(j)} \hat{a}^{\dagger}) \equiv \hbar g (\hat{\Sigma}_{+} \hat{a} + \hat{\Sigma}_{-} \hat{a}^{\dagger}). \tag{F.1}$$

对称性体现在所有原子具有相同的耦合常数.

先来看 $N=2$ 的简单情况.设初态两个原子都在激发态,即为

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_1} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_2}. \tag{F.2a}$$

由于 $\hat{H}_{\text{int}}$ 和初态对于两个原子都是对称的,故在演化中这种对称性将会保持.全对称的另外两个状态是

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_1} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_2} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_1} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_2}\right],$$

$$|\psi_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_1} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_2}. \tag{F.2b}$$

再用 $|1_{ph}\rangle$ 表示一个光子的状态,则原子集体从 $|\psi_1\rangle$ 跃迁到 $|\psi_2\rangle$ 并放出一个光子的辐射率 $\gamma_1$ 将与

$$|\langle \psi_2 1_{ph} | \hat{H}_{\text{int}} | \psi_1 \rangle|^2 = \hbar^2 g^2 \langle \psi_1 | \hat{\Sigma}_{+} | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \hat{\Sigma}_{-} | \psi_1 \rangle$$

成正比.由于 $\langle \psi_1 | \hat{\Sigma}_{-} | \psi_1 \rangle$ 和 $\langle \psi_3 | \hat{\Sigma}_{-} | \psi_1 \rangle$ 都为零,故上式右方可写成 $\hbar^2 g^2 \sum_{j=1}^{3} \langle \psi_1 | \hat{\Sigma}_{+} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{\Sigma}_{-} | \psi_1 \rangle = \hbar^2 g^2 \langle \psi_1 | \hat{\Sigma}_{+} \hat{\Sigma}_{-} | \psi_1 \rangle$,即

$$\gamma_1 \propto \langle \psi_1 \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi_1 \rangle. \tag{F.3}$$

同样可得原子从$|\psi_2\rangle$到$|\psi_3\rangle$的辐射率 $\gamma_2$ 正比于$\langle \psi_2 | \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- | \psi_2 \rangle$，即

$$\gamma_2 \propto \langle \psi_2 \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi_2 \rangle. \tag{F.4}$$

上述结果实际上可推广到[2]位于小范围内的任意 $N$ 个原子集合的状态$|\psi\rangle$，即

$$\gamma \propto \langle \psi \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi \rangle. \tag{F.5}$$

道理也很简单：我们可把 $N$ 个原子集合的全部状态分成两类：一类是$|\psi\rangle$通过 $\hat{\Sigma}_-$ 的作用可以达到的，记作$|\psi_r\rangle$，即$\langle \psi_r | \hat{\Sigma}_- | \psi \rangle \neq 0$；另一类是$|\psi\rangle$通过 $\hat{\Sigma}_-$ 的作用不能达到的，记作$|\psi_i\rangle$，即$\langle \psi_i | \hat{\Sigma}_- | \psi \rangle = 0$. 本来只有$|\psi_r\rangle$对辐射有贡献，即

$$\gamma \propto \sum_r \langle \psi \mid \hat{\Sigma}_+ \mid \psi_r \rangle \langle \psi_r \mid \hat{\Sigma}_- \mid \psi \rangle.$$

但既然$\sum_i \langle \psi \mid \hat{\Sigma}_+ \mid \psi_i \rangle \langle \psi_i \mid \hat{\Sigma}_- \mid \psi \rangle = 0$，故可加上去而不影响 $\gamma$ 的值. 再利用

$$\sum_r \mid \psi_r \rangle \langle \psi_r \mid + \sum_i \mid \psi_i \rangle \langle \psi_i \mid = 1,$$

即可化出(E.5)式.

顺便指出，以上处理过程与§7.1中(7.1.32)式的推导是类似的.

我们再回到 $N=2$ 时$|\psi_1\rangle$和$|\psi_2\rangle$的辐射率. 不难求出

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi_1 \rangle &= 2, \\ \langle \psi_2 \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi_2 \rangle &= 2. \end{aligned} \tag{F.6}$$

即$|\psi_1\rangle$态和$|\psi_2\rangle$态的辐射率相同. 可是$|\psi_1\rangle$中有两个处于激发态的原子，而$|\psi_2\rangle$却只有一个处于激发态的原子. $|\psi_2\rangle$的辐射率之所以比通常一个激发态原子的辐射率 $\gamma_s$ 大一倍，是由于在$|\psi_2\rangle$中，激发态原子有$\frac{1}{\sqrt{2}}$的概率幅处于 $x_1$ 处，又有$\frac{1}{\sqrt{2}}$的概率幅处于 $x_2$ 处，从而使其跃迁矩阵元较通常一个原子的值大$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+1)$即$\sqrt{2}$倍. 于是其 $\gamma$ 为一个激发态原子的 $\gamma_s$ 二倍.

为作进一步的一般性讨论，我们回到 $N$ 个原子的情况. 这时

$$\hat{\Sigma}_- = \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_-^{(j)}, \qquad \hat{\Sigma}_+ = \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_+^{(j)}. \tag{F.7}$$

于是

$$\langle \psi \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \psi \mid \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(j)} \mid \psi \rangle + \sum_{j \neq k} \langle \psi \mid \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{k} \mid \psi \rangle. \tag{F.8}$$

当$|\psi\rangle$中有 $n$ 个原子处于激发态时，则有

$$\sum_{j=1}^{N} \langle \psi \mid \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(j)} \mid \psi \rangle = n, \tag{F.9}$$

此式即无合作辐射效应时的值.至于(E.8)式右方的第二项,由于置换对称性,将等于 $N(N-1)\langle \psi | \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} | \psi \rangle$,进一步计算得出

$$\langle \psi \mid \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \mid \psi \rangle = \frac{n(N-n)}{N(N-1)}, \tag{F.10}$$

于是(F.8)式化为

$$\langle \psi \mid \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- \mid \psi \rangle = n(N-n+1). \tag{F.11}$$

我们看到,当全部原子都处于激发态即 $n=N$ 时,上式右方化为 $N$,与原子之间无关联的情况结果一样,当 $n$ 从 $N$ 减小时,上式右方逐渐增大.最大值出现在 $n=\frac{N+1}{2}$(当 $N$ 为奇数)或 $n=\frac{N}{2}$(当 $n$ 为偶数)时,即 $n\approx\frac{N}{2}$ 时.这时 $\langle \psi | \hat{\Sigma}_+ \hat{\Sigma}_- | \psi \rangle \approx N^2/4$.

正如我们在§7.1中引入 $x_1$ 处电场($k$ 分量)与 $x_2$ 处电场($l$ 分量)间的相关函数为 $\langle \hat{E}_k^{(-)}(x_1)\hat{E}_l^{(+)}(x_2)\rangle$[参见(7.1.40)式],在这里我们定义位于 $\boldsymbol{x}_1$ 处和 $\boldsymbol{x}_2$ 处两个原子的跃迁偶极矩的相关函数为(除了常数因子外)$\langle \psi | \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(1)} | \psi \rangle$.附带指出,$\hat{E}^{(+)}$ 代表 $\hat{E}$ 中正频部分,即吸收光子的部分,因而与这里的原子能量下降算符 $\hat{\sigma}_-$ 相应.

由于对任意的 $i,j$,只要 $i\neq j$,$\langle \psi | \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(j)} | \psi \rangle$ 就与 $\langle \psi | \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} | \psi \rangle$ 相等,故(F.10)式表明,当 $n=N$ 即全部原子都处于激发态时,任意两点的原子跃迁偶极矩都不相关.而当 $n\approx\frac{N}{2}$ 时,任两点原子的跃迁偶极矩的相关值$\left(\langle \psi | \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(1)} | \psi \rangle\right)$ 达到其最大值 $\approx\frac{1}{4}$.

正是这种原子跃迁偶极矩之间的相关性,造成了原子集体的合作辐射.

附带指出,超荧光高峰出现的平均时间约为[参见文献[2]的(5.37)式和图13]

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\ln N}{N}\tau_s \tag{F.12}$$

其中 $\tau_s=\frac{1}{\gamma_s}$ 为单个原子自发辐射的衰期.故当 $N$ 大时,$\tau\ll\tau_s$,而 $\tau$ 的方差 $\Delta\tau$ 与 $\tau$ 的比值近似为[2]

$$\frac{\Delta\tau}{\langle \tau \rangle} \approx \frac{1.3}{\ln N}. \tag{F.13}$$

此值并非可忽略地小(例如当 $N=10^{10}$ 时，$\frac{\Delta\tau}{\tau}\approx 0.06$①)表明辐射高峰出现的时间将有明显的涨落. 这一涨落可看成是微观的量子不确定性被集成到了宏观的尺度.

以上考虑的是初态对于 $N$ 个原子是全对称的情况. 对于一般的初态，会出现怎样的合作辐射呢？让我们先看 $N=2$ 的一个特例：设初始时原子状态为

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_2}. \tag{F.14}$$

上述状态可表为对称态 $|\psi_s\rangle$ 和反对称态 $|\psi_a\rangle$ 的叠加：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_s\rangle + |\psi_a\rangle), \tag{F.15}$$

其中

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_2} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_2}\right],$$

$$|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_2} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{x_2}\right]. \tag{F.16}$$

此处的 $|\psi_s\rangle$ 其实就是(F.26)式中的 $|\psi_2\rangle$，它可以通过辐射一个光子跃迁到基态 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{x_2}$ 即(F.26)式中的 $|\psi_3\rangle$. 在 $|\psi_a\rangle$ 中虽然也有一个处于上能级的原子，但它位于 $x_1$ 和位于 $x_2$ 的概率幅有一相位差 $\pi$，从而它跃迁到基态 $|\psi_3\rangle$ 的辐射率为零. 换句话说状态 $|\psi_a\rangle$ 中虽然有一个上能级的原子，但却不能辐射出光子.

归纳起来，当 $N=2$ 时，我们可把全部的原子状态分成二个集合，一个就是三重态 $|\psi_1\rangle$，$|\psi_2\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$，另一个是单态 $|\psi_a\rangle$. 任意一个 $N=2$ 的原子状态可表为上述三重态和单态的叠加，三重态和单态各有自己的辐射规则.

现在回到任意 $N$ 的一般情况. 在附录 D 中我们已经看到二能级原子在数学描述上与一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子相似. 如果我们把每个原子的能量零点取在上下能级的中间，则原子集合的自由哈密顿量即可写作

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\sum_{j=1}^{N}\hat{S}_z^{(j)} \equiv \hbar\omega_0\hat{S}_z, \tag{F.17}$$

其中

---

① 关于这样多的原子能否集中在比 $\lambda$ 小得多的区域内以产生超辐射的问题，可参见(F.25)式及其下的讨论.

$$\hat{S}_z^{(j)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{(j)}. \tag{F.18}$$

同时相互作用哈密顿量(F.1)式可改写成

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g(\hat{S}_+\hat{a} + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger), \tag{F.19}$$

其中 $\hat{S}_\pm$ 实即为 $\hat{\Sigma}_\pm$，只是为了与 $\hat{S}_z$ 配套而换了写法.这样，总哈密顿量将与

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{2}(\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+) + \hat{S}_z^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \tag{F.20}$$

相对易，因此 $\hat{S}^2$ 将是辐射过程中的守恒量.

狄克(Dicke)把原子集合的一般自由状态用 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_z$ 的本征态 $|S,S_z\rangle$ 来分类[1]:

$$\begin{aligned}\hat{S}^2|S,S_z\rangle &= S(S+1)|S,S_z\rangle,\\ \hat{S}_z|S,S_z\rangle &= S_z|S,S_z\rangle.\end{aligned} \tag{F.21}$$

其中 $S$ 和 $S_z$ 的取值像 $N$ 个自旋为 $\frac{1}{2}$ 粒子集合的总自旋一样，即

$$S = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \cdots; \qquad -S \leqslant S_z \leqslant S. \tag{F.22}$$

由于 $S$ 在原子集合与辐射场的作用过程中是守恒的，故辐射所引起的原子集合的级联跃迁只在同一个 $S$ 的状态中进行.相应于 $S_z$ 的值逐步下降.在从 $|S,S_z\rangle$ 到 $|S,S_z-1\rangle$ 的跃迁中，辐射率

$$\gamma \propto (S+S_z)(S-S_z+1). \tag{F.23}$$

此式为(F.5)和(F.11)式的推广.在全对称的情况，

$$S = \frac{N}{2}, \qquad S_z = n - \frac{N}{2},$$

(F.23)式就化成(F.5)和(F.11)式.

在此原子集合中，任意两个原子跃迁偶极矩在 $|S,S_z\rangle$ 态中的相关函数为

$$\langle S,S_z|\hat{S}_+^{(i)}\hat{S}_-^{(j)}|S,S_z\rangle = \frac{S^2-S_z^2}{N(N-1)}, \quad i \neq j. \tag{F.24}$$

此式为(F.10)式的推广.对于一定的 $S$，当 $|S_z|$ 取最小值(即为 0 或 $\frac{1}{2}$)时上式取最大值 $\approx \frac{S^2}{N(N-1)}$.此值又随着 $S$ 的减少而下降.故狄克把 $S$ 称作原子集合的合作数.

下面再简单地介绍一下超荧光光场的量子统计性质[2]通常的处理方法是把光场作为库先求出原子算符的主方程，再对它求解.然后再利用光场算符的推迟解公

式,得出空间任一点的电场算符 $\hat{E}^{(\pm)}(\boldsymbol{x},t)$ 与 $\hat{S}_{\pm}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ 亦即 $\hat{\Sigma}_{\pm}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ 成正比(比例系数与 $\boldsymbol{x}$ 有关).计算结果表明,当初态为全反转时,对任意 $t$,

$$\langle\hat{S}_{\pm}(t)\rangle=0,$$

表明光场中无相干的成分.在峰值处 $\frac{\langle\hat{S}_{+}^{2}\hat{S}_{-}^{2}\rangle}{\langle\hat{S}_{+}\hat{S}_{-}\rangle^{2}}$ 与 1 相差不大,这时的光子数具有轻微的超泊松分布.

在以上讨论中,假定了分布在一个比波长小的范围内的全体原子都合作地辐射电磁场.实际上超辐射存在一个极限的合作长度,只在此长度之内原子才能合在一起形成超辐射.下面要考虑的问题是此合作长度是比波长小还是大.

对于圆杆状的原子分布,从 Arecchi 和 Coartens[3] 所给的合作辐射率 $\gamma_c$,可以得出合作长度的上限为:

$$l_c=\frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{c}{\gamma_A\rho}},\tag{F.25}$$

其中 $\gamma_A$ 为爱因斯坦 $A$ 系数亦即单个原子的自发辐射率.$\rho$ 为原子的分布密度.对于(F.25)式可简单地论证如下.

当原子合作辐射时,它们同时发射的光波要合在一起构成一个波包,因此这些原子分布的最大允许长度(也就是极限合作长度 $l_c$)应与光波波包长度 $\frac{c}{\gamma_c}$ 相等($\gamma_c$ 为合作原子的集体辐射率)即

$$l_c=\frac{c}{\gamma_c}.\tag{F.26}$$

再由圆杆情况下

$$\gamma_c\approx\gamma_A(\rho Al_c),\tag{F.27}$$

其中 $A$ 为圆杆的横截面,$(\rho Al_c)$ 代表合作范围内原子的总数.由(F.27)式当 $l_c$ 愈大,$\gamma_c$ 就愈大,而 $\gamma_c$ 变大由(F.26)式又得出 $l_c$ 要变小.从而形成了一种互相制约的关系.将(F.26)与(F.27)式联立起来消去 $\gamma_c$ 就得出 $l_c$ 须等于

$$l_c=\sqrt{\frac{c}{\gamma_A\rho A}}.$$

另外,从圆杆端面向外发光方向角有一个限制范围,因而在(F.27)式右方要乘上一个方向角限制因子 $\approx\frac{\lambda^2}{A}$.这样(F.27)式将修改成

$$\gamma_c\approx\gamma_A(\rho Al_c)\frac{\lambda^2}{A}=\gamma_A\rho\lambda^2l_c.\tag{F.28}$$

将上式与(F.26)式联立以消去 $\gamma_c$ 就得到

$$l_c = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{c}{\gamma_A \rho}}.$$

Arecchi 和 Coultens 再根据狄克文中提出的对(F.28)式的修正再对上式加上因子 2 最后就得出(F.25)式.

下面来看在什么条件下,$l_c$ 会小于$\lambda$.由(F.25)式,$l_c<\lambda$ 要求

$$\frac{4c}{\gamma_A \rho} < \lambda^4,$$

亦即

$$\lambda^3 \rho > \frac{4c}{\gamma_A \lambda}.$$

此处的 $\gamma_A$ 即(4.1.38)式中的 $W$,将(4.1.38)式代入后,上式化为

$$\lambda^3 \rho > \frac{2}{\pi k_0^2 a^2 \alpha} \sim \frac{8}{\pi \alpha^3}. \tag{F.29}$$

最后一步利用了该处的注.即当 $\lambda^3$ 体积中原子的数目超过 $8/\pi\alpha^3 \approx 6.6\times10^6$ 亦即 $\rho>6.6\times10^6/\lambda^3$ 时合作长度才会小于 $\lambda$.

对于下述情况,即圆杆长度为 $L$,横截面为 $\xi L^2$($\xi<1$,并取固定值),原子总数为 $N$,初看起来,$L$ 愈小即原子分布范围愈集中愈容易实现合作辐射.但(F.25)式告诉我们并不是这样.全体原子实现合作辐射的条件是$\frac{L}{l_c}<1$ 将 $\rho=\frac{N}{\xi L^3}$代入(F.25)式即得

$$\frac{L}{l_c} = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\gamma_A N}{c\xi L}}, \tag{F.30}$$

由此可见,当 $N$ 一定时,$L$ 愈大,反而 $L/l_c$ 愈小,即愈有利于全体原子合作辐射.另外,按照上式,对于给定的 $L$,当 $N$ 超过某个临界值$N_c$ 时,$l_c$ 将变得小于$L$,即不是全部原子都参与合作辐射.不难得出

$$N_c = \frac{c}{\gamma_A}\xi L. \tag{F.31}$$

**2. 自由激子的合作辐射**

在这一小节中,我们来讨论自由激子的合作辐射,它包括超辐射和亚辐射.并主要介绍我们自己在这方面的研究.

如附录 E 所述[参见(E.14)式下面第二段]自由激子所转化成的光子具有很小的相空间,它可容易地又转化回到激子,因此对于激子的辐射率不能简单地用费

米黄金定则,亦即微扰论来计算. Hanamura 提出一个不同的处理方式[4]他推导出自由万尼尔激子在二维量子阱中辐射率 $\gamma$ 的一个特征方程. 但此方程存在一个问题,即它有一个多余的根,该根将导致光场不合理的时间演化. Knoester 提出弗仑克尔激子辐射的一个普遍的表述[5],并给出单层原子情况的特征方程,该方程能避免上述多余的非物理根. 但他没有给出其中联系函数 $F_{kk'}(\omega)$ 的推导. 我们指出[6],该 $F_{kk'}(\omega)$ 不可能从通常采用的 $\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$ 作用项推导出来. 另外我们的研究不局限于计算辐射率,还将讨论辐射光场的统计性质.

我们在文献[6]中以立方晶格中弗仑克尔激子为例,在 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中补进了通常忽略的双光子项 $\frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2$ 以后,导出了正确的 $F_{kk'}(\omega)$,并求解出单层,双层及三层晶格情况下激子的特征模和辐射场的时空分布,研究了光场的一阶和二阶相关函数,得出的结果中并有些意外的现象[6].

为与文献[6]中符号一致,我们把(E.10)式写成下式并略去光子的偏振指标.

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hbar\sum_{q,k}G(q)O(k+q)[\hat{a}_q(t)+\hat{a}^{\dagger}_{-q}(t)][\hat{B}_k(t)+\hat{B}^{\dagger}_{-k}(t)], \tag{F.32}$$

其中 $k$ 的取值如(E.8)式所示,$q$ 的取值与光子的归一化体积有关(见后文),

$$O(q+k) = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{1}{2}N(q+k)a}{\sin\frac{1}{2}(q+k)a},$$

$$G(q) = \sqrt{N_T}g(q), \qquad g^2(q) = \frac{2\pi\Omega^2}{V\hbar\,|\,q\,|\,c}d^2. \tag{F.33}$$

$N$ 为原子的层数,$N_T$ 为原子的总数. 值得提醒的是,在 $\hat{H}_{\text{int}}$ 中并未略去反旋波项. 从(F.32)式得出光子和行波激子的海森伯方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{a}_q(t) = |\,q\,|\,c\hat{a}_q(t) + G(q)\sum_k O(k-q)[\hat{B}_k(t)+\hat{B}^{\dagger}_{-k}(t)],$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{B}_k(t) = \Omega\hat{B}_k(t) + \sum_q G(q)O(q-k)[\hat{a}_q(t)+\hat{a}^{\dagger}_{-q}(t)]. \tag{F.34}$$

从上式可见,激子引起光子变化(即激子转化成光子),而光子同样也引起激子变化,两个方程的结构是类似的.

在求解初值问题中,通常采用半侧傅里叶变换(或拉普拉斯变换):

$$\hat{a}_q(\omega) = \int_0^{\infty}\hat{a}_q(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \qquad \hat{a}^{\dagger}_{-q}(\omega) = \int_0^{\infty}\hat{a}^{\dagger}_{-q}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$\hat{B}_k(\omega)=\int_0^\infty \hat{B}_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\qquad \hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)=\int_0^\infty \hat{B}^\dagger_{-k}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{F.35}$$

为保证收敛,上式右方中的 $\omega$ 实际上带有一个正无穷小的虚部 $\varepsilon$,即 $\omega$ 实为 $\omega+\mathrm{i}\varepsilon$,注意 $\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)=\hat{a}_{-q}(-\omega)^\dagger$,$\hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)=\hat{B}_{-k}(\omega)^\dagger$. 与此同时,$\frac{\partial}{\partial t}\hat{a}_q(t)$ 变换成 $\left[-\mathrm{i}\omega\hat{a}_q(\omega)-\hat{a}_q(0)\right]$,其中 $\hat{a}_q(0)$ 代表 $\hat{a}_q(t)\Big|_{t=0}$. 这样就把初值 $\hat{a}_q(0)$ 引入到方程中来了. $\frac{\partial}{\partial t}\hat{B}_k(t)$ 的变换类似. 于是方程(F.34)化为

$$(\omega-|q|c)\hat{a}_q(\omega)=G(q)\sum_k O(k-q)[\hat{B}_k(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)]+\mathrm{i}\hat{a}_q(0),$$

$$(\omega-\Omega)\hat{B}_k(\omega)=\sum_q G(q)O(q-k)[\hat{a}_q(\omega)+\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)]+\mathrm{i}\hat{B}_k(0). \tag{F.36}$$

从(F.36)第一式以及相应的 $\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)$ 方程可以得出

$$(\omega^2-q^2c^2)[\hat{a}_q(\omega)+\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)]=2|q|c\,G(q)\sum_k O(k-q)[\hat{B}_k(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)]$$
$$+\mathrm{i}[(\omega+|q|c)\hat{a}_q(0)+(\omega-|q|c)\hat{a}^\dagger_{-q}(0)] \tag{F.37}$$

将上式代入(F.36)第二式,即可消去 $\hat{a}_q(\omega)$ 和 $\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)$,得出 $\hat{B}_k(\omega)$ 与 $\hat{B}_{k'}(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k'}(\omega)$ 的联系方程:

$$(\omega-\Omega)\hat{B}_k(\omega)=\sum_{k'}F_{kk'}(\omega)[\hat{B}_{k'}(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k'}(\omega)]+\sum_q G(q)O(q-k)$$
$$\times\left[\frac{1}{\omega-|q|c}\hat{a}_q(0)+\frac{1}{\omega+|q|c}\hat{a}^\dagger_{-q}(0)\right]+\mathrm{i}\hat{B}_k(0), \tag{F.38}$$

其中联系函数 $F_{kk'}(\omega)$ 为

$$F_{kk'}(\omega)=-\sum_q\frac{2|q|c\,G^2(q)O(k-q)O(q-k')}{q^2c^2-\omega^2}. \tag{F.39}$$

它表示波矢为 $k'$ 的激子通过中间态光子与波矢为 $k$ 的激子变化率间的联系. 上式右方由两个激子-光子耦合常数和一个光子传播子构成.

在我们的问题中,初始时刻只有激子,故可令(F.38)式中 $\hat{a}_q(0)=\hat{a}^\dagger_{-q}(0)=0$,于是从(F.38)式和它的厄米共轭式即可得出

$$\sum_{k'}[(\omega^2-\Omega^2)\delta_{kk'}-2\Omega F_{kk'}(\omega)][\hat{B}_{k'}(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k'}(\omega)]$$
$$=\mathrm{i}[(\omega+\Omega)\hat{B}_k(0)+(\omega-\Omega)\hat{B}^\dagger_{-k}(0)]. \tag{F.40}$$

原则上从上式以及 $F_{kk'}(\omega)$ 的值即可解出 $\hat{B}_k(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)$. 如果我们把光子的归一化体积取为 $L^3$,其中 $L^2$ 为晶体平板的面积,并令晶体平板位于归一化体积的中部,则当 $L$ 取得足够大时(F.39)式中对 $q$ 的求和可化成对 $q$ 的积分,其值由文

献[6]中(20)式给出,此处不再录出,这里只指出,当 $N\to\infty$ 时,$F_{kk'}(\omega)$ 与 $\delta_{kk'}$ 成正比,与波矢的守恒一致. 在求出 $\hat{B}_k(\omega)+\hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)$ 后,代入(F.36)式即可求出 $\hat{a}_q(\omega)$.

在以上处理中,采用的是 $\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$ 型 $\hat{H}_{\text{int}}$. 尽管这种 $\hat{H}_{\text{int}}$ 在量子光学中被经常地用来处理放射和吸收问题. 但我们发现在准确求解上述激子辐射的方程时会出现严重的问题,下面让我们来看最简单的单层情况($N=1$).

当 $N=1$ 时,$k=k'=0$,可以求出相应的 $F_{00}(\omega)$ 为

$$F_{00}(\omega)=-\mathrm{i}\frac{\eta\Omega}{2\omega}, \tag{F.41}$$

其中 $\eta$ 为一个具有频率量纲的常数:

$$\eta=\frac{4\pi\Omega d^2}{\hbar ca^2}, \tag{F.42}$$

其量级为 $4\pi\frac{e^2}{\hbar c}\Omega$, $\eta/\Omega\sim10^{-1}$.

这时激子虽然处于静止状态($N=1$ 时波矢为零参见(F.8)式)但仍与前面所讨论的原子集体的超辐射情况不同. 在这里层面上原子状态之间有着确定的相位联系(实际上具有相同的相位),因而不存在合作长度的限制.

将(F.41)式代入(F.40)式即将它化为

$$\hat{B}_0(\omega)+\hat{B}_0^\dagger(\omega)=\frac{\mathrm{i}}{\omega^2-\Omega^2+\mathrm{i}\eta\Omega^2/\omega}[(\omega+\Omega)\hat{B}_0(0)+(\omega-\Omega)\hat{B}_0^\dagger(0)]. \tag{F.43}$$

式右方的 $\hat{B}_0(0)$ 和 $\hat{B}_0^\dagger(0)$ 代表 $t=0$ 时的初值. 特征方程

$$\omega^2-\Omega^2+\mathrm{i}\frac{\eta\Omega^2}{\omega}=0 \tag{F.44}$$

的根将决定 $\hat{B}_0(\omega)+\hat{B}_0^\dagger(\omega)$ 的极点,这些极点的实部和虚部将决定激子的衰率和谱线频移(见后). (F.44)式是一个三次代数方程,略去 $\eta/\Omega$ 的高次小量后,该方程的根为

$$\omega_{1,2,3}\approx\Omega-\frac{1}{2}\mathrm{i}\eta,\quad -\Omega-\frac{1}{2}\mathrm{i}\eta,\quad \mathrm{i}\eta. \tag{F.45}$$

F.45 式右方的第三个根位于复 $\omega$ 平面中的上半平面中,因而是一个非物理的根,它将导致电场强度 $\hat{E}(z,t)$ 在类空区域不为零(见后).

我们曾试探用($-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}$)型 $\hat{H}_{\text{int}}$ 来解决这一困难. 但它给出

$$F_{00}(\omega)=-\mathrm{i}\frac{\eta\omega}{\Omega}-\eta\frac{c}{2\pi\Omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q, \tag{F.46}$$

其实部趋于负无穷. 即使对 $q$ 取值的上限作一截断(因为我们作了电偶极辐射的近似),但结果仍然不合理[6]. 从(F.46)与(F.41)式我们看到,尽管$\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$ 型的作用与 $-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}$ 型的作用在微扰论的结果中差别并不太大,但对这里的方程求解却有敏感的影响.

最后我们在$\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$ 中补上通常略去的双光子项$\frac{c^2}{2mc}\boldsymbol{A}^2$,此项虽不影响光子与激子的耦合,但却可能对方程发生影响. 补上双光子项后(F.32)式化为

$$\hat{H}_{\text{int}}(t)=\hbar\sum_{q,k}G(q)O(k+g)[\hat{B}_k(t)+\hat{B}^{\dagger}_{-k}(t)][\hat{a}_q(t)+\hat{a}^{\dagger}_{-q}(t)]$$

$$+\hbar\sum_{q,q',l}f(q,q')[\hat{a}_q(t)+\hat{a}^{\dagger}_{-q}(t)][\hat{a}_{q'}(t)+\hat{a}^{\dagger}_{-q'}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q+q')la},\tag{F.47}$$

其中 $G^2(q)$仍由(F.33)式给出,而

$$f(q,q')=\frac{N_s\pi e^2}{mcV\sqrt{|qq'|}}.\tag{F.48}$$

需要指出的是,二能级原子是一个简化的工作假定,并不满足原子全部能级要构成完备集的要求,因此有时需要做某些附加的处理[7]. 在(F.32)式中,略去了对光子偏振指标的求和. 对$\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$ 作用项而言,这并不是问题,因为我们可选取光子的偏振方向使其中一个在跃迁偶极矩 $\boldsymbol{d}$ 的方向上投影为零,因而只有一个偏振方向对相互作用有贡献. (F.33)式 $g$ 中的 $d$ 实际上代表跃迁电偶极矩在该偏振方向上的投影. 在$\frac{e^2}{2mc}\boldsymbol{A}^2$ 中,并不出现特定的投影方向,因此应恢复对两个偏振方向的求和. 在 $f(q,q')$中原有因子 $\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}$,并要对 $\lambda,\lambda'$求和(其中 $\boldsymbol{e}_\lambda$ 代表光子的偏振方向). 当原子全部的本征态集合都考虑进来时,有

$$\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}=\frac{m}{\hbar e^2}\sum_n\Omega_{n1}[(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{d}_{1n})(\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{d}_{n1})+(\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{d}_{1n})(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{d}_{n1})].\tag{F.49}$$

此式可利用$[x_\lambda,p_{\lambda'}]=\mathrm{i}\hbar\delta_{\lambda\lambda'}=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}$以及$\langle n|\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{p}|1\rangle=\mathrm{i}m\Omega_{n1}\langle n|\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{x}|1\rangle$和$\langle 1|\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{p}|n\rangle=-\mathrm{i}m\Omega_{n1}\langle 1|\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{x}|n\rangle$求出[6].

当我们作二能级近似时,为了协调一致,应将 $\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}$ 近似成

$$\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}\approx\frac{2m\Omega}{\hbar e^2}(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{d}),\tag{F.50}$$

其中 $\Omega=\Omega_{21}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}_{21}=\boldsymbol{d}_{12}$. 如前,取 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{d}=d$, $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{d}=0$,即将上式化为

$$\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}\approx\frac{2m\Omega d^2}{\hbar e^2}\delta_{\lambda 1}\delta_{\lambda' 1},\tag{F.51}$$

而$\sum\limits_{\lambda,\lambda'} \boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{e}_{\lambda'}$ 就化为$\frac{2m\Omega d^2}{\hbar e^2}$.于是在 $f(q,q')$ 中补入$\sum\limits_{\lambda\lambda'} \boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{e}_{\lambda'}$ 后就有

$$f(q,q') \approx \frac{2\pi N_s \Omega d^2}{\hbar c V \sqrt{1qq'}} = \frac{1}{N\Omega} G(q) G(q'). \tag{F.52}$$

将(F.52)式代入(F.47)式后,并利用

$$\sum_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q+q')la} = N \sum_k O(q'-k) O(k+q), \tag{F.53}$$

即将 $\hat{H}_{\text{int}}$化成

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hbar \sum_{q,k} G(q) O(k+q) [\hat{B}_k(t) + \hat{B}^\dagger_{-k}(t)][\hat{a}_q(t) + \hat{a}^\dagger_{-q}(t)] \\ + \frac{\hbar}{\Omega} \sum_{q',q,k} G(q) G(q') O(q'-k) O(k+q) [\hat{a}_g(t) + \hat{a}^\dagger_{-q}(t)] \\ \times [\hat{a}_{q'}(t) + \hat{a}^\dagger_{-q}(t)].\end{aligned} \tag{F.54}$$

经过上述修改后,$\hat{a}_q(\omega)$的方程化为

$$\begin{aligned}(\omega - |q| c) \hat{a}_q(\omega) = G(q) \sum_k \frac{1}{\Omega} O(k-q) \Big\{ \omega [\hat{B}_k(\omega) - \hat{B}^\dagger_{-k}(\omega)] \\ - i \times [\hat{B}_k(0) - \hat{B}^\dagger_{-k}(0)] \Big\},\end{aligned} \tag{F.55}$$

而(F.40)式修改为

$$\begin{aligned}&\sum_{k'} \left[ (\omega^2 - \Omega^2) \delta_{kk'} - \frac{2\omega^2}{\Omega} F_{kk'}(\omega) \right] [\hat{B}_{k'}(\omega) - \hat{B}^\dagger_{-k'}(\omega)] \\ &= -2\mathrm{i} \frac{\omega}{\Omega} \sum_{k'} F_{kk'}(\omega) [\hat{B}_{k'}(0) - \hat{B}^\dagger_{-k'}(0)] + \mathrm{i}[(\omega + \Omega) \hat{B}_k(0) - (\omega - \Omega) \hat{B}^\dagger_{-k}(0)].\end{aligned} \tag{F.56}$$

这样,在单层情况($k = k' = 0$),特征方程就改成

$$\omega^2 - \Omega^2 - \frac{2\omega^2}{\Omega} F_{00}(\omega) = 0, \tag{F.57a}$$

将(F.41)式代入后即化为

$$\omega^2 - \Omega^2 + \mathrm{i}\eta\omega = 0. \tag{F.57b}$$

上式为 $\omega$ 的二次方程,它的两个根为

$$\omega_{1,2} = \pm \Omega_0 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\eta = \pm \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4}\eta^2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\eta \approx \pm \Omega - \frac{1}{2}\mathrm{i}\eta \tag{F.58}$$

这样$\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$ 型和($-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}$)型 $\hat{H}_{\text{int}}$中所出现的困难就将被消除(详见下文).

以上讨论表明$\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2$的作用项与$-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}$的作用项并不完全等价.如许多学者所指出[8],在全量子理论中,虽然可通过一个幺正变换将$\frac{e}{mc}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2$作用项变成$-\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}$作用项(加上一项$\int P_L^2\mathrm{d}\tau$),但在变换后的基底中,$E$实际上具有电位移的意义,不再代表电场强度.

我们注意到(F.44)与(F.57b)的差别就在于其中第三项相差因子$\frac{\Omega^2}{\omega^2}$.此因子在微扰处理中常可近似取为1,但像这里认真求解特征方程,它就会引起非物理解.

回到方程(F.55),在单层情况,该方程即给出

$$\hat{B}_0(\omega)-\hat{B}_0^\dagger(\omega)=\mathrm{i}\frac{(\omega+\Omega+\mathrm{i}\eta)\hat{B}_0(0)-(\omega-\Omega+\mathrm{i}\eta)\hat{B}_0^\dagger(0)}{\omega^2+\mathrm{i}\eta\omega-\Omega^2}. \quad (\text{F}.59)$$

从上式可求出$\hat{a}_q(\omega)-\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)$.当光子的归一化体积$AL$的厚度$L$取得足够大时,有(见文献[6]中(24)式)

$$\hat{E}(z,\omega)=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{|q|c\hbar L}{2\pi A}}\left[\hat{a}_q(\omega)-\hat{a}^\dagger_{-q}(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}qz}\mathrm{d}q, \quad (\text{F}.60)$$

其中$z$轴垂直于晶体平板.于是在单层情况下可求出在$z>0$区域$\hat{E}(z,\omega)$的值:

$$\hat{E}(z,\omega)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi\hbar\Omega\eta}{cA}}\frac{(\omega+\Omega)\hat{B}_0(0)+(\omega-\Omega)\hat{B}_0^\dagger(0)}{\omega^2+\mathrm{i}\eta\omega-\Omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z} \quad (\text{F}.61)$$

再通过

$$\hat{E}(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}\varepsilon}^{\infty+\mathrm{i}\varepsilon}\hat{E}(z,\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\ \varepsilon\text{ 为正无穷小} \quad (\text{F}.62)$$

就得出在$z>0$区域

$$\hat{E}(z,t)=\begin{cases}0, & \text{当 } z-ct>0\text{ 时},\\ \hat{\mathscr{E}}^{(+)}(z,t)+\text{h.c}, & \text{当 } z-ct<0\text{ 时},\end{cases} \quad (\text{F}.63)$$

其中

$$\hat{\mathscr{E}}^{(+)}(z,t)=\sqrt{\frac{\pi\hbar\Omega\eta}{4cA}}\left[\left(1+\frac{\Omega}{\Omega_0}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\eta}{\Omega_0}\right)\hat{B}_0(0)+\left(1-\frac{\Omega}{\Omega_0}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\eta}{\Omega_0}\right)\hat{B}_0^\dagger(0)\right]$$
$$\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_0\left(t-\frac{z}{c}\right)-\frac{1}{2}\eta\left(t-\frac{z}{c}\right)} \quad (\text{F}.64)$$

于是$\Omega_0-\Omega$代表光场的频移,$\frac{1}{2}\eta$代表光场振幅的衰率.

(F.63)第一式的导出依赖于"特征方程的根都位于$\omega$复平面的下半平面内"这一结果.因为当$z-ct>0$时,我们可对(F.62)式的积分路径补上"复平面中无

穷大的上半圆”以形成一个封闭回路，当特征方程在上半平面有根时[例如(F.45)式所示的情况]，(F.63)第一式的结果就不为零，即电场 $E$ 将出现在类空区间中．这是不合理的，因此我们要求特征方程的根只能在下半平面中．

(F.63)和(F.64)式还告诉我们，电场强度表现为指数衰减的行波，在随时间的变化上没有一个突起的峰．这表明晶体层面上的原子从一开始就合作地发射光波．对于 $z<0$ 的区域可类似处理．结果是 $\hat{E}(z,t)$ 为向负 $z$ 轴方向传播的行波．激子的辐射率 $\eta$(其表达式为(F.42)式)可表示为：

$$\eta = 2\left(\frac{\pi \lambda\!\!\!^{-2}}{a^2}\right)\gamma_{\mathrm{A}}, \tag{F.65}$$

其中$\lambda\!\!\!^{-}$为级化波长即 $c/\Omega$，$\gamma_{\mathrm{A}}$ 为爱因斯坦 $A$ 系数．参见(6.1.33)式．另外(F.33)式 $g^2$ 所含的 $d$ 只是跃迁电偶极矩在$xy$ 平面上的投影，$d^2$ 实为 $d_x^2 + d_y^2$．因此在将它用 $\gamma_{\mathrm{A}}$ 表示时，我们加上了因子$\dfrac{2}{3}$．

表观上看来，仅仅只有$2\left(\dfrac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{a^2}\right)$个原子(亦即面积$2(\pi\lambda\!\!\!^{-2})$内的格点)参与了合作辐射．但这并非实际的物理情况．从(F.33)式可见，当 $N$(层数)为 1 时，$G=\sqrt{N_s}g$，即层面内所有的原子都合作地与光子耦合．由(E.7)和(E.4)式亦可见当 $k=0, N=1$ 时激子算符 $\hat{B}_{k=0}(t)=\hat{B}_{l=0}(t)\dfrac{1}{\sqrt{N_s}}\sum\limits_n \hat{B}_{on}$，其中 $\hat{B}_{on}$ 的定义见(E.1)式下，$n$ 的求和是对层面中所有原子进行的，从而 $\hat{B}_{k=0}(t)$ 代表层面内全体原子的集体算符(归一化的)．那么因子$2\left(\dfrac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{a^2}\right)$是什么意义呢?实际上它来自本模型中光子发射所允许的状态数的减少．在单个原子辐射情况(也就是 $\gamma_{\mathrm{A}}$ 所适用的情况)发射光子是全方位的，在 d$k$ 范围内光子的状态数为$\dfrac{V}{(2\pi)^3}4\pi k^2\mathrm{d}k$[参见(3.3.13)式下文]，而现在发射光子只在正负 $z$ 两个方向，因此 d$k$ 内的光子数状态为$2\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)\mathrm{d}k$，两者的比值 $\beta$ 等于

$$\beta = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)\Big/\frac{L^3}{2\pi^2}k^2 = \frac{2\pi}{k^2L^2} = 2\,\frac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{L^2}. \tag{F.66}$$

于是总的增强因子 $\beta N_s = \beta\dfrac{L^2}{a^2} = 2\,\dfrac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{a^2}$．这与(F.65)式一致．

下面来考察辐射场的相干和统计性质．对(F.63)和(F.64)式取期望值，即知当$\langle\hat{B}_0(0)\rangle=0$ 时(例如初始激子处在数态或混杂态)，则$\langle\hat{E}(z,t)\rangle$在任何时刻都为零，这意味着在辐射场中不会发展出相干成分，即使辐射是合作性的．当激子初

始处于相干态时,辐射场中主要成分为相干态,但并不是严格的相干态,因为这时

$$\hat{E}^{(+)}(z,t)=\sqrt{\frac{\pi\hbar\Omega\eta}{4L^2C}}\left[F_1(z,t)\hat{B}_0(0)+F_2(z,t)\hat{B}_0^\dagger(0)\right].$$

其中 $F_2(z,t)$为一小量但并不为零[6].于是 $\hat{B}_0(0)$的本征态(即初始激子的相干态)并非 $\hat{E}^{(+)}(z,t)$的本征态.出现这一结果是因为我们未做旋波近似.从而 $\hat{E}^{(+)}(z,t)$中含有正比于 $\hat{B}_0^\dagger(0)$的项.

其次来看辐射场的强度 $I(z,t)$.一个出乎意料的结果是:$I(z,t)$在类空区间并不严格为零,而是有一个小的前锋突入到 $|z|>ct$ 的区域[6].出现这一情况是因为 $I(z,t)$并不等于$\frac{c}{4\pi}\langle:\hat{E}^2(z,t):\rangle$,按照量子理论它等于$\frac{c}{2\pi}\langle:\hat{E}^{(-)}(zt)\hat{E}^{(+)}(zt):\rangle$,其中正规偏序::是作用到 $\hat{E}^{(\pm)}(z,t)$中所含的 $\hat{B}_0(0)$和 $\hat{B}_0^\dagger(0)$上的[期望值中的态矢量为海森伯态,它标志整个过程(参见§1.1 中第 10 点).在 $\hat{E}^{\pm}(zt)$用初始的 $\hat{B}_0(0)$和 $\hat{B}_0^\dagger(0)$表示后,该态矢量可用系统 $t=0$ 时的状态来表述(参见§1.1节)]."$I(z,t)$在类空间隔上不为零"意味着检测器在类空间隔上可检测到光子.对于这一情况,我们的解释为[6],虽然光场以光速 $c$ 传播,但由于光子在空间定位的不确定性,它可以在光场到达之前少许时间被检测到(当然概率很小).

另外,如果我们固定 $z$ 值来画$I(z,t)$随 $t$ 的变化曲线,所得出的结果并非是光滑的,而出现幅度相当大的无规涨落[6].至于一阶相干度 $g^{(1)}(z,t;z,t+\tau)$,如果激子初态为相干态,则$|g^{(1)}(z,t;z,t+\tau)|$等于 1,与 $\tau$ 无关;而若激子初态为数态或混杂态,则$|g^{(1)}(z,t;z,t+\tau)|$降到 0.8 左右,而且当 $\tau$ 改变时伴有杂乱的起伏[6].二阶相干度的情况更为复杂,即使激子初态为相干态 $|\alpha\rangle$,$|g^{(2)}(z,t;z,t+\tau)|$也不等于 1,当 $\alpha$ 的绝对值小时,$|g^{(2)}|$大于 1 并与 $\alpha$ 的辐角有关.$|\alpha|$增大时,$|g^{(2)}|$逐步接近于 1.如若激子初态为混杂态,则$|g^2|$大致保持在 1.2 左右.对于激子初态为数态$|n\rangle$的情况,$|g^{(2)}|$的值随着 $n$ 的增加而变大,$n=1$ 时约为 0.1,$n=2$ 时增加到 0.5 左右,但再大到 $n=50$ 时却只增加到 0.6 左右[6].

以上结果表明,尽管上面研究的激子超荧光是完全合作性的,但光场的相干和统计性质却是各种各样的.

下面简单提一下二层和三层格点的情况[6].

当 $N=2$ 时,$k$ 有两个取值$\pm\frac{\pi}{2a}$,这时决定频移和衰率的特征方程为

$$\omega^2+\mathrm{i}\eta\omega\pm\mathrm{i}\eta e^{\mathrm{i}\omega a/c}\omega-\Omega^2=0. \tag{F.67}$$

它的四个根分别为$\pm\Omega_1-\mathrm{i}\Gamma_1$,$\pm\Omega_2-\mathrm{i}\Gamma_2$,其中

$$\Omega_1\approx\Omega\left(1+\frac{\eta a}{2c}-\frac{\eta^2}{2\Omega^2}\right),\qquad \Omega_2\approx\Omega\left(1-\frac{\eta a}{2c}\right), \tag{F.68a}$$

而

$$\Gamma_1 \approx \eta, \qquad \Gamma_2 \approx \frac{1}{4}\eta\frac{\Omega^2 a^2}{c^2}. \tag{F.68b}$$

由此可见对二层格点,$\Gamma_1$ 约为单层情况的一倍[见(F.58)式],而 $\Gamma_2$ 则是一个小得多的值,于是第一个值相应于超辐射情况而第二个值相应于亚辐射情况.但要指出的是即使在亚辐射情况,辐射率仍比单个原子的辐射率大,其值具体为 $\pi\gamma_A$.原因是:亚辐射只是两层原子的辐射发生互相消减,而每层内的原子仍然是合作辐射的.

当 $N=3$ 时,特征方程有六个根,$\pm\Omega_1 - \mathrm{i}\Gamma_1$,$\pm\Omega_2 - \mathrm{i}\Gamma_2$,$\pm\Omega_3 - \mathrm{i}\Gamma_3$.其中

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &\approx \Omega\left(1 - \frac{9\eta^2}{8\Omega^2} + \frac{4\eta a}{3c}\right), & \Gamma_1 &\approx \frac{3}{2}\eta, \\
\Omega_2 &\approx \Omega\left(1 - \frac{\eta a}{c}\right), & \Gamma_2 &\approx \eta\frac{\Omega^2 a^2}{c^2}, \\
\Omega_3 &= \Omega\left(1 - \frac{\eta a}{3c}\right), & \Gamma_3 &\approx \frac{1}{27}\eta\frac{\Omega^2 a^2}{c^2}.
\end{aligned} \tag{F.69}$$

由此可见第一个解对应于超辐射情况,第二、三个解均对应于亚辐射情况.如果我们用 $\hat{B}^\dagger_{l=1,2,3}$分别代表 1,2,3 层的集体激发算符[参见(E.4)式],则三个特征模的激发算符分别对应于初态激子算符

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{3}}[\hat{B}^\dagger_{l=1}(t=0) + \hat{B}^\dagger_{l=0}(t=0) + \hat{B}^T_{l=-1}(t=0)], \\
&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[\hat{B}^\dagger_{l=1}(t=0) - \hat{B}^\dagger_{l=-1}(t=0)], \\
&\frac{1}{\sqrt{6}}[-\hat{B}^\dagger_{l=1}(t=0) + 2\hat{B}^\dagger_{l=0}(t=0) - \hat{B}^\dagger_{l=-1}(t=0)].
\end{aligned} \tag{F.70}$$

## 参 考 文 献


1 R H Dicke. Phys Rev, **93**:99,1954

2 1982 年以前的文献可参见 M Gross and S Haroche. Phys Report. **93**:301,1982

3 F T Arecchi and E Courtens. Phys Rev A. **2**:1730,1970

4 E Hanamura. Phys Rev B. **38**. 1228,1998

5 J Knoester. Phys Rev Lett. **68**:654,1992

6 Changqi Cao, Hui Cao and Yuxi Liu. Phys Rev B. **62**:16453,2000;**63**: 199901,2001

7 P W Milonni, R J Cook and J R Ackerhalt, Phys Rev A, **40**,3767,1989

8 J R Ackerhalt and P W Milonni. J Opt Soc Am. B1:116,1984; C Cohen, Tannoudgi et al. Photons and Atoms: New York: John Wiley & Sons,1989,293,307

# G　超辐射微激光器的随机量子轨迹理论

在附录 F 中的第一部分我们讨论了 $N$ 个相同的二能级原子的超荧光. 在达到合作辐射时, 其能量辐射率将正比于 $N^2$. 这时的辐射称为超辐射. Haake 等研究了一种超辐射激光的理论[1], 该激光器中含有 $N$ 个相同的三能级原子. 能量关系为 $E_2>E_1>E_0$. 能级 2 与能级 1 之间的跃迁与激光模 $a$ 相作用. 能级 1 上的原子并通过与另一单模光场(模 $b$, 亦称消极模. 该模 $Q$ 值小)的作用回到原子的基态(即能级 0). 然后再通过一经典相干光抽运到上能级(能级 2), 此模型的特点是: 在以上三个过程中, $N$ 个原子都合作成一个整体来与相应的光场作用. 在略去抽运噪音和原子到非腔模的自发辐射的条件下该文作者对原子和激光模的方程进行了求解. 得出这种超辐射激光器许多与普通激光器不同的特点, 如: 零阈值; 原子布居数值会出现突变(如同一级相变); 极小的谱宽(约 $1/N^2$); 当有效抽运强度 $p$[参见(G.16)式]取固定值时, 激光模的光子数正比于 $N^2$; 输出场在低频段是完全的挤压态; 当有效抽运参数超过 1 时, 激光活动即停止. 这些结果都是在 $N$为大数情况(宏观体系)下得出的. 近年来由于集成光电路的发展人们对只包含不多的原子(或激子)的微型激光器发生兴趣, 因此我们对只包含二三十个原子的微型超辐射激光器进行了研究[2]. 我们知道, 相变是宏观体系中才出现的现象, 在微激光器中无论是一级还是二级相变都不会发生, 但当 $N$ 增大时应显示出走向相变的趋势. 文献[2]的研究不仅证实了这一点还发现在某些参数范围, 超辐射微激光器会出现新的情况. 本附录的另一个目的是借此问题介绍随机量子轨迹处理方法. 它在研究少数原子的光学过程方面有它的优越性. 不仅能给出定常态时的结果, 还能显示演化的整个过程, 包括趋于定常态的时间尺度.

此激光器的相互作用哈密顿量为[1]

$$\hat{H}_{\text{int}}=\mathrm{i}\hbar g_{12}(\hat{a}\,\hat{S}_{21}-\hat{a}^{\dagger}\hat{S}_{12})+\mathrm{i}\hbar g_{01}(\hat{b}\,\hat{S}_{10}-\hat{b}^{\dagger}\hat{S}_{01})+\mathrm{i}\hbar\Omega(\hat{S}_{20}-\hat{S}_{02}),\tag{G.1}$$

其中 $\hat{a}$和 $\hat{a}^{\dagger}$ 为激光模算符, $\hat{b}$和 $\hat{b}^{\dagger}$ 为消极模算符, $\Omega$ 为一常数, 相应于抽运光为经典相干光. 此外, 两个腔模都有泄漏导致的耗散与涨落. 而

$$\hat{S}_{ij}=\sum_{\mu=1}^{N}\hat{S}_{ij}^{(\mu)}.\tag{G.2}$$

$\hat{S}_{ij}^{(\mu)}$代表第 $\mu$ 个原子的由状态 $|j\rangle$到状态 $|i\rangle$的迁移算符. 如前所述, 在 $\hat{H}_{\text{int}}$中原子是集体地与两光模和抽运场作用.

如同文献[1], 文献[2]亦假定消极模的耗散系数足够地大, 可以将 $\hat{b}$和 $\hat{b}^{\dagger}$ 浸渐地从系统中消去. 这样得出的主方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = \hat{L}\hat{\rho}(t) + \hat{\Lambda}_{01}\hat{\rho}(t) + \hat{\Lambda}_a\hat{\rho}(t), \tag{G.3}$$

其中 $\hat{L}$, $\hat{\Lambda}_{01}$ 和 $\hat{\Lambda}_a$ 实际上都是"超算符",即作用在 $\hat{\rho}$ 上的算符,其定义为

$$\begin{aligned}
&\hat{L}\hat{\rho}(t) \equiv [\{\Omega(\hat{S}_{20} - \hat{S}_{02}) + g_{12}(\hat{a}\hat{S}_{21} - \hat{a}^\dagger\hat{S}_{12})\}, \hat{\rho}(t)], \\
&\hat{\Lambda}_{01}\hat{\rho}(t) \equiv \gamma(2\hat{S}_{01}\hat{\rho}(t)\hat{S}_{10} - \hat{S}_{10}\hat{S}_{01}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{S}_{10}\hat{S}_{01}), \\
&\hat{\Lambda}_a\hat{\rho}(t) \equiv \kappa_a(2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}),
\end{aligned} \tag{G.4}$$

其中

$$\gamma = \frac{g_{01}^2}{\kappa_b}, \tag{G.5}$$

$\kappa_a$ 和 $\kappa_b$ 为模 $a$ 和模 $b$ 的耗散系数,$\gamma$ 代表原子集体从能级 1 回到能级 0 的衰率.

如 §6.4 所述,$\hat{\Lambda}_{01}$ 中的 $-\gamma\hat{S}_{10}\hat{S}_{01}\hat{\rho}(t) - \gamma\hat{\rho}(t)\hat{S}_{10}\hat{S}_{01}$ 和 $\hat{\Lambda}_a$ 中的 $-\kappa_a\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \kappa_a\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}$ 代表阻尼项,在随机量子轨迹方法处理中,我们可以把 $-\mathrm{i}\hbar\gamma\hat{S}_{10}\hat{S}_{01} - \mathrm{i}\hbar\kappa_a\hat{a}^\dagger\hat{a}$ 并入到 $\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)$ 的第一项和第三项(第二项中的消极模 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^\dagger$ 已浸渐地消去)中构成非厄米的哈密顿量 $\hat{H}_{\mathrm{nh}}$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathrm{nh}} = {} & \mathrm{i}\hbar g_{12}(\hat{a}\hat{S}_{21} - \hat{a}^\dagger\hat{S}_{12}) + \mathrm{i}\hbar\Omega(\hat{S}_{20} - \hat{S}_{02}) - \mathrm{i}\hbar\gamma\hat{S}_{10}\hat{S}_{01} \\
& - \mathrm{i}\hbar\kappa_a\hat{a}^\dagger\hat{a},
\end{aligned} \tag{G.6}$$

并定义两个坍缩算符[它们分别出现在(G.4)的第三式和第二式中]:

$$\hat{C}_1 = \sqrt{2\kappa_a}\hat{a}, \qquad \hat{C}_2 = \sqrt{2\gamma}\hat{S}_{01}. \tag{G.7}$$

这两个算符体现过程中的随机变化. $\hat{C}_1$ 源于激光模与库的作用,$\hat{C}_2$ 源于模 $\hat{b}$ 与库的作用. 由于模 $\hat{b}$ 被浸渐消去因而它的随机变化被转移到原子能级 1 到能级 0 的跃迁中.

数值计算是模拟一个个小时段 $\Delta t$ 内系统状态的变化. 于是系统的状态 $|t\rangle$ 将表示为一系列离散值 $|t_n\rangle$,其中

$$t_n = n\Delta t. \tag{G.8}$$

从 $|t_n\rangle$ 到 $|t_{n+1}\rangle$ 的演变将通过下面的途径决定[2]:

(i) 计算 $(t_n, t_n + \Delta t)$ 时隔内两个坍缩概率 $p_1(t_n)$ 和 $p_2(t_n)$:

$$\begin{aligned}
p_1(t_n) &= \langle t_n | \hat{C}_1^\dagger\hat{C}_1 | t_n\rangle\Delta t, \\
p_2(t_n) &= \langle t_n | \hat{C}_2^\dagger\hat{C}_2 | t_n\rangle\Delta t,
\end{aligned} \tag{G.9}$$

其中 $\Delta t$ 应取得足够地小,使得 $p_1(t_n)$ 和 $p_2(t_n)$ 都比 1 小得多.

(ii) 产生两个随机数 $r_1$ 和 $r_2$,它们以均匀的概率分布于[0,1]间,

(iii) 将 $r_1$ 和 $r_2$ 与计算出的 $p_1(t_n)$ 和 $p_2(t_n)$ 相比较,并按下述规则来确定 $|t_{n+1}\rangle$:

① 若 $r_1 < p_1(t_n), r_2 \geqslant p_2(t_n)$,即 $r_1$ 落在计算出的坍缩概率 $p_1(t_n)$ 之内,而 $r_2$ 落在计算出的坍缩概率 $p_2(t_n)$ 之外,则取

$$|t_{n+1}\rangle = \frac{\hat{C}_1 |t_n\rangle}{\sqrt{\langle t_n | \hat{C}_1^\dagger \hat{C}_1 | t_n\rangle}}, \tag{G.10}$$

即发生 $\hat{C}_1$ 坍缩;

② 若 $r_1 \geqslant p_1(t_n), r_2 < p_2(t_n)$,即 $r_1$ 落在计算出的坍缩概率 $p_1(t_n)$ 之外,而 $r_2$ 落在计算出的坍缩概率 $p_2(t_n)$ 之内,则取

$$|t_{n+1}\rangle = \frac{\hat{C}_2 |t_n\rangle}{\sqrt{\langle t_n | \hat{C}_2^\dagger \hat{C}_2 | t_n\rangle}}, \tag{G.11}$$

即发生 $\hat{C}_2$ 坍缩;

③ 若 $r_1 \geqslant p_1(t_n), r_2 \geqslant p_2(t_n)$,即 $r_1$ 和 $r_2$ 都分别落在 $p_1(t_n)$ 和 $p_2(t_n)$ 之外,则取

$$|t_{n+1}\rangle = \frac{e^{-i\hat{H}_{nh}\Delta t/\hbar} |t_n\rangle}{\sqrt{\langle t_n | e^{i(\hat{H}_{nh}^\dagger - \hat{H}_{nh})\Delta t/\hbar} | t_n\rangle}}, \tag{G.12}$$

即无坍缩发生,状态按 $\hat{H}_{nh}$ 演化. $r_1 < p_1(t_n)$ 同时 $r_2 < p_2(t_n)$ 的概率实际很小,可以不考虑.

按上述步骤逐步地进行,就将得出一条随机量子轨迹. 任何一个算符 $\hat{Q}$ 在该量子轨迹 $t_n$ 时刻的期望值即为 $\langle t_n | \hat{Q} | t_n\rangle$,最后对足够多的量子轨迹进行系综平均,就可得出任意时刻 $\hat{Q}$ 的期望值.

下面说明具体的计算方法. 首先令 $n_0, n_1, n_2$ 分别代表三个能级上的原子布居数. $|n_2, n_1, n_0\rangle$ 为"具有 $(n_2, n_1, n_0)$ 分布数"的原子全对称状态. 再令 $|m\rangle$ 代表激光模(模 $a$)中有 $m$ 个光子的状态,一般状态可表示为 $|n_2, n_1, n_0\rangle |m\rangle$ 的相干叠加:

$$|t\rangle = \sum_{n_0 n_1 n_2} \sum_m A_{n_0 n_1 n_2 m}(t) |n_2, n_1, n_0\rangle |m\rangle. \tag{G.13}$$

显然 $n_0, n_1, n_2$ 应满足关系

$$n_0 + n_1 + n_2 = N. \tag{G.14}$$

初始原子状态取为全反转态即 $|n_2 = N, n_1 = 0, n_0 = 0\rangle$,光子状态为真空态 $|0\rangle$. 下面要说明的是 $\hat{S}_{ij}$ 如何作用到 $|n_2, n_1, n_0\rangle$ 上[3]:

$$S_{12} \mid n_2, n_1, n_0\rangle = \sqrt{n_2(n_1+1)} \mid n_2-1, n_1+1, n_0\rangle,$$
$$S_{21} \mid n_2, n_1, n_0\rangle = \sqrt{n_1(n_2+1)} \mid n_2+1, n_1-1, n_0\rangle,$$
$$S_{01} \mid n_2, n_1, n_0\rangle = \sqrt{n_1(n_0+1)} \mid n_2, n_1-1, n_0+1\rangle,$$
$$S_{10} \mid n_2, n_1, n_0\rangle = \sqrt{n_0(n_1+1)} \mid n_2, n_1+1, n_0-1\rangle,$$
$$S_{02} \mid n_2, n_1, n_0\rangle = \sqrt{n_2(n_0+1)} \mid n_2-1, n_1, n_0+1\rangle,$$
$$S_{20} \mid n_2, n_1, n_0\rangle = \sqrt{n_0(n_2+1)} \mid n_2+1, n_1, n_0-1\rangle. \qquad (G.15)$$

有了上式即不难完成(G.9)～(G.12)式中的运算.

除了参数 $N$ 以外,在主方程中还有四个具有频率量纲的参数,即 $\Omega, g_{12}, \kappa_a$ 和 $\gamma$.从这四个参数中可以定义出三个无量纲的参数:

$$c = \frac{g_{12}^2}{\gamma\kappa_a} = \frac{g_{12}^2\kappa_b}{g_{01}^2\kappa_a}, \qquad P = \frac{\Omega}{N\gamma\sqrt{c}}, \qquad \xi = \frac{N\gamma}{\kappa_a}. \qquad (G.16)$$

它们分别称为:无量纲耦合强度,有效抽运强度和衰率比.其中 $\xi$ 又可认作腔的质量因子.这些参数的定义与文献[1]相同.

在文献[2]的数值计算中,取了 $N=10,15,30$ 三个值,并对 400 个随机量子轨迹进行了统计平均.当 $c$ 和 $\xi$ 取为 2 和 0.15 时,Haake 等人的文献[1]中得出的结果是(按该文中的(3.3)式,该式未考虑自发辐射的效应):在 $P=0^+$ 处(指 $P=0+\epsilon$,$\epsilon$ 为无穷小),$\langle n_0\rangle$,$\langle n_1\rangle$和$\langle n_2\rangle$分别等于$\frac{2}{3}N$,0 和$\frac{1}{3}N$.这表明 $P=0$ 点为一级相变点(因 $P=0$ 对应于无抽运情况即 $\Omega=0$,这时$\langle n_0\rangle$等于 $N$,$\langle n_1\rangle$和$\langle n_2\rangle$等于零而当 $P$ 有一无穷小变化时,$\langle n_0\rangle$和$\langle n_2\rangle$出现有限大小的变化).另外在 $P=1$ 的点,该文得出的结果是$\langle n_0\rangle=0$,$\langle n_1\rangle=N$,$\langle n_2\rangle=0$,即全部原子都处在中间能级上,同时光子数亦降到零.当 $P\geqslant1$ 时激光作用停止,上述各值应保持不变,从而曲线出现转折.这意味着 $P=1$ 为二级相变点.

文献[2]计算的结果则与文献[1]中不同.在 $P=0$ 点,$\langle n_0\rangle$并不从 $N$ 突然降到$\frac{2}{3}N$,而是连续地下降,逐步接近文献[1]中的曲线.$P$ 接近 1 时,下降变得平缓.到 $P=1$ 时它并不降到零,$\langle n_1\rangle$也不达到 $N$.至于$\langle n_2\rangle$,在 $P$ 等于零时从零较快地上升,随后下降,到 $P=1$ 处并不降到零.换句话说,当 $N$ 取有限值时,如前所述不出现一级"相变"和二级"相变",这本是意料中的结果,有点出乎意料的是:对于 $N=30$ 这样不算大的值,已与宏观结果相当地接近.

真正出现**质的**变化是在 $\xi$ 取较大的值时.在文献[1]中,$\langle n_0\rangle$,$\langle n_1\rangle$和$\langle n_2\rangle$都与 $\xi$ 无关,仅光子数的平均值与 $\xi$ 成正比.在文献[2]计算的情况($N$ 取不大的

值).结果则完全不同.当 $\xi$ 的值取为 10 时,$\langle n_0\rangle$随 $P$ 的变化在下降到 $0.4N$ 左右后又略微上升,并接近 $N/2$.$\langle n_1\rangle$则从零上升一段后,重新下降,到 $P=1$ 时竟降到零.至于上能级的布居数$\langle n_2\rangle$,在初始阶段上升较快,在 $P$ 超过 1/2 时即大致保持为 $N/2$.我们看到:布居数的情况与小 $\xi$ 时正好相反:上下两能级布居数的值大,中间能级的值小.

文献[2]并对光子数的分布进行了研究.当取 $c=2,P=0.2$ 和 $\xi=5$ 时,定常分布给出$\langle n\rangle=11.2$ 和$\langle\Delta n^2\rangle=8.9$.即光子具有亚泊松分布(如所预期).为了考察计算的可信性,文献[2]还取了不同的初始值来进行计算.结果表明,只要参数 $c,\xi,P$ 的取值不变,得出的定常值就一致,的确与初值无关.

下面来看演化的过程.在文献[2]中取了原子初始时的布居数为$|n_0=0,n_1=0,n_2=20\rangle$、光子的初态为真空、参数 $c,\xi,P$ 分别为 1,2,1/2 来进行计算.结果表明:$\langle n_0\rangle$,$\langle n_1\rangle$和$\langle n_2\rangle$从各自的初值出发并非单调地趋于其定常值,而要经过大致三个振荡才接近它.所需的时间约为 $0.7/\gamma$.值得说明的是,在主方程(G.3)式中有二个阻尼系数 $\gamma$ 和 $\kappa_a$.当 $\xi=2$ 时,$\dfrac{\gamma}{\kappa_a}=\dfrac{\xi}{N}=\dfrac{1}{10}$,即 $\gamma$ 是其中小的一个.

最后来考察一下光场中的相干成分$\langle\hat{a}(t)\rangle$.

当初态为$|n_2=0,n_1=0,n_0=50\rangle|0\rangle$,即 50 个原子初始时都处于基态.光场为真空态的情况,$\langle\hat{a}(t)\rangle$对每个随机量子轨迹都为零,当然对 400 个量子轨迹的平均亦为零.这一结果是可以理解的,因为在初态中,无论是光场还是原子系统都不是相干态也无相干的成分.

若初态中光场为相干态$|\alpha\rangle$例如原子和光场整体初态为$|0,0,50\rangle|\alpha=0.2\rangle$;或初态光场为真空态,50 个原子中有 45 个处于能级 0,剩下的 5 个按二能级原子相干态分布在能级 1 和能级 2 上[此原子相干态将用$|\beta\rangle$表示,$\beta=0.2$ 见(D.6)式],总体初态即为$|\beta=0.2,n_0=45\rangle|0\rangle$,则在随后的发展中,$\langle\hat{a}(t)\rangle$先是增长(指其绝对值),然后由于相位扩散而衰减到零.

另一个重要问题是定常解的稳定性.在文献[1]中,当 $P,c,\xi$ 在一定范围内时,定常解是不稳定的.但在文献[2]中未发现这一情况.

在文献[2]中只研究了腔内光场并未涉及输出光场,因为文献[1]未作此项研究,无可比较.实际上,在文献[2]中进行此项研究并无困难,因光子的坍缩项(在腔外为真空库时)应即描述腔内光子的逸出.通过这种逸出即可计算输出场的量子统计性.例如要计算定常输出场的二阶相关度 $\gamma^{(2)}(\tau)$,我们可在腔内场达到定常状态时,选取量子轨迹中 $m_1$ 个坍缩发生的时刻 $t_i\ (i=1,2,\cdots,m_1)$,然后数出在 $t_i+\tau$ 到 $t_i+\tau+\mathrm{d}\tau$ 时间间隔内发生坍缩的总数 $\mathrm{d}m_2^{(c)}$(上标($c$)代表坍缩).于是 $\lim\limits_{m_1\to\infty}\dfrac{1}{m_1}\dfrac{\mathrm{d}m_2^{(c)}}{\mathrm{d}\tau}$即代表:定常输出场中射出一个光子后经过时间 $\tau$ 再射出一个光子

的发射率,也就是条件发射率.再将它除以平均坍缩率(在真空库情况也就是平均发射率)$\eta$,类比(7.3.4)式即可得出 $\gamma^{(2)}(\tau)$,即

$$\lim_{m_1\to\infty}\frac{1}{m_1}\frac{\mathrm{d}m_2^{(c)}}{\mathrm{d}\tau}=\eta\gamma^{(2)}(\tau),$$

于是有

$$\gamma^{(2)}(\tau)=\frac{1}{\eta}\lim_{m_1\to\infty}\frac{1}{m_1}\frac{\mathrm{d}m_2^{(c)}}{\mathrm{d}\tau}. \tag{G.17}$$

## 参 考 文 献

1　F Haake. M I Kolobov, C Seeger, C Fabre, E Giacobino and S Reynaud. Phys Rev A. **54**:1625, 1996

2　Jikun Wei, Wei Long, Changqi Cao and Hui Cao. Phys Lett A. **291**:208, 2001

3　Cao Changqi and F Haake. Phys Rev A. **51**:4203, 1995

# H　规则注入原子对无阻尼腔内相干光场的挤压

在§5.6中我们看到与单光子作用的经典源(即经典电流发射或吸收一个光子的作用)可生成相干态光场,而在§7.6中又讲到通过与双光子作用的经典源可得到挤压相干态,并具体研究了单模情况,得出:它可将初始的相干态光场挤压成"挤压相干态".这些都是纯理论的分析因实际的光源是原子或分子,不同于经典电流.经典源的特点是,它所生成的光场为纯态,而由原子生成的光场情况则不同:这时体系状态既包含原子自由度部分也包括光场自由度部分,必须对原子自由度求迹后才得出光场的状态,其结果将是统计混合态.判断这种光场是否为挤压态(不一定是挤压相干态),通常是计算它的两个正交分量的方差(参见§7.5).研究表明通过原子与光场的作用也可以产生挤压态光场.采用注入原子即可达到这一目的.

Meystre 和 Zubairy 指出[1].单模相干态通过与二能级原子的作用(即所谓的 J-C 模型)可以被挤压.此后,许多作者曾在推广的 J-C 模型和其他更广泛的情况下进行了光场挤压的研究,其中 Kuklinski 和 Madajczyk 得出,在原子与光场作用时间足够地长并取某些特定值的情况,可以获得深度的挤压[2].但这些特定的作用时间的取值需要很高的精度.我们研究了通过重复注入原子来挤压"相干态光场"的过程[3].求出最大的挤压度与作用次数 $K$,每次作用时间 $T$ 以及原始相干态的平均光子数 $N$ 之间的关系.

假定原子与腔内单模相干光场共振,而且每个时刻腔中至多只有一个原子.相互作用包括单光子作用和双光子作用两类(在双光子作用情况,原子跃迁频率正好为光子频率两倍),这样相互作用图象中的 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$将与 $t$ 无关:

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hbar g_l [\hat{a}^l \hat{\sigma}_+ + (\hat{a}^\dagger)^l \hat{\sigma}_-], \qquad l = 1,2. \tag{H.1}$$

光场的密度算符 $\rho_{mn}(t)$ 可通过求解原子—光场的动力学方程并随后对原子自由度求迹的办法来求出.对于入射的二能级原子初始时处于激发态的情况,结果为

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0)\cos(\Omega_m^{(l)} t)\cos(\Omega_n^{(l)} t) + \rho_{m-l,n-l}(0)\sin(\Omega_{m-l}^{(l)} t)\sin(\Omega_{n-l}^{(l)} t), \tag{H.2}$$

其中

$$\Omega_n^{(l)} = g_l \sqrt{\frac{(n+l)!}{n!}}. \tag{H.3}$$

从(H.2)式可见,若 $\rho_{mn}(0)$ 和 $\rho_{m-l,n-l}(0)$ 为实数,则 $\rho_{mn}(t)$ 亦为实数.

设入射原子的速度都取同一个值,穿越腔的时间为 $T$,$k$ 个原子穿过腔以后的光场密度算符矩阵元设为 $\rho_{mn}^{(k)}(T)$,则按(H.2)式即可从 $\rho_{mn}^{(k)}(T)$ 得出 $\rho_{mn}^{(k+1)}(T)$:

$$\begin{aligned}\rho_{mn}^{(k+1)}(T) = & \rho_{mn}^{(k)}(T)\cos(\Omega_m^{(l)} T)\cos(\Omega_n^{(l)} T) \\ & + \rho_{m-l,n-l}^{(k)}(T)\sin(\Omega_{m-l}^{(l)} T)\sin(\Omega_{n-l}^{(l)} T).\end{aligned} \tag{H.4}$$

定义 $\hat{a}$ 在 $a_1 a_2$ 平面中任意方位的分量 $\hat{a}_\phi$ 为

$$\hat{a}_\phi = \hat{a}_1 \cos\phi + \hat{a}_2 \sin\phi, \tag{H.5}$$

它也可表示为

$$\hat{a}_\phi = \frac{1}{2}(\hat{a}\, e^{-i\phi} + \hat{a}^\dagger e^{i\phi}). \tag{H.6}$$

从密度矩阵元 $\rho_{mn}$ 可以求出 $\hat{a}_\phi$ 和 $\hat{a}_\phi^2$ 的期望值①:

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_\phi \rangle &= \sum_n \sqrt{n+1}\,\mathrm{Re}(\rho_{n,n+1} e^{i\phi}), \\ \langle \hat{a}_\phi^2 \rangle &= \frac{1}{2}\sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{Re}(\rho_{n,n+2} e^{2i\phi}) + \frac{1}{4}\sum_n (2n+1)\rho_{nn}.\end{aligned} \tag{H.7}$$

由此即可计算方差 $\delta_\phi^2 \equiv \langle \hat{a}_\phi^2 \rangle - \langle \hat{a}_\phi \rangle^2$.

当初始光场为相干态时[为简单计设其振幅 $\alpha$(亦即 $\hat{a}$ 的本征值)为实数],有

$$\rho_{mn}^{(0)} = e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{m+n}}{\sqrt{m!\,n!}}. \tag{H.8}$$

不难求出经过 $k$ 次原子作用后的方差为[3]

---

① 在文献[3]中,$\langle \hat{a}_\phi^2 \rangle$ 第一项的指数因子有印刷错误,此处已改正.

$$\delta_\phi^2(k) = C(k) + D(k)\cos 2\phi, \tag{H.9}$$

其中

$$C(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_n n\rho_{nn}^{(k)} - \frac{1}{2}\Big[\sum_n \sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}^{(k)}\Big]^2,$$

$$D(k) = \frac{1}{2}\sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)}\rho_{n,n+2}^{(k)} - \frac{1}{2}\Big[\sum_n \sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}^{(k)}\Big]^2. \tag{H.10}$$

因此若 $D(k)<0$，$\delta_\phi^2(k)$的最小值将出现在 $\phi=0$. 按(H.5)式，相应的分量即为 $\hat{a}_1$. 若 $D(k)>0$，$\delta_\phi^2$ 的最小值将出现在 $\phi=\frac{\pi}{2}$，相应的分量即为 $\hat{a}_2$.

数值计算表明无论是单光子作用[对应于(H.1)式中 $l=1$]还是双光子作用[对应于(H.1)式中 $l=2$]，小的方差均出现在 $\phi=0$，即方差被压缩的分量为 $\hat{a}_1$(这是就入射原子的激发态的情况而言另外，此结果与初始相干态的振幅设为实数有关).

顺便指出，若初始时腔内光场的密度矩阵只有对角元不等于零(混杂光场即为一例)，即

$$\rho_{mn}^{(0)} = \rho_n^{(0)}\delta_{mn},$$

其中 $\rho_n^{(0)}$ 代表初始时光子数为 $n$ 的概率，则从递推公式可得出

$$\delta_\phi^2(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\langle n\rangle_k, \tag{H.11}$$

其值与 $\phi$ 无关，并总是大于$\frac{1}{4}$，当$\langle n\rangle_k$ 增大时它也随着增大.

在文献[3]中曾就初态为(H.8)式所示的相干态情况对 $\delta_1^2$ 进行了数值计算. 单光子作用的结果表明，只当 $T$ 取某些区间的值时，$\delta_1^2$ 才会比$\frac{1}{4}$小，即出现压缩. 在 $T<\frac{\pi}{g_1}$的范围，在 $N=10$ 的情况($N$ 为初始相干态的平均光子数)，最小值出现在 $T$ 为 $0.15\,\frac{\pi}{g_1}$附近，$\delta_1^2$ 约为 0.13，相应的注入总次数 $K\approx15$. 在 $N=20$ 的情况，最小值出现在 $T=0.13\,\frac{\pi}{g_1}$附近，$\delta_1^2$ 约为 0.090，相应的原子注入数 $K\approx24$. 在 $N=30$ 的情况，最小值出现在 $T=0.11\,\frac{\pi}{g_1}$附近，$\delta_1^2$ 约为 0.071，相应的 $K$ 为 40. 从以上结果可见，$\delta_1^2$ 的压缩度是不小的. 值得注意的是，当光子平均数 $N$ 一定时，并非注入次数愈大，压缩度就愈大，而有一个最佳取值. 当 $N$ 增加时，可达到的压缩度愈大.

下面转到双光子作用的情况，初态仍由(H.8)表示. 数值计算表明，对于**相对大**的 $N$ 值，有下述结果：

i) $\delta_1(K,T)$和 $\delta_2(K,T)$都随着 $T$ 周期性的变化. 周期为$\frac{2\pi}{g_2}$. 实际上当 $N$ 为 20 时,这种周期性已经显示出来.

ii) 被压缩的方差亦为 $\delta_1$,较大的压缩出现在 $T\approx(2l+1)\pi/g_2$ 以及 $T=2l\pi/g_2$的两侧.

iii) $\delta_1\left(K,\frac{\pi}{g_2}\right)$在 $K$ 增加时先减少然后又缓慢地增加. 当 $N=20$ 时,最小值在 $K\approx100$ 处,$\delta_1^2$ 从初始的 0.25 降到 0.05,随后随着 $K$ 的增大而较平缓的增加,到 $K=400$ 时约达到 0.075,仍只有初始值的 3/10.

通常的相干光场都具有较大的平均光子数 $N$. 这时对于双光子作用情况,还能推出 $\delta_1(K,N)$在 $T$ 的优选值 $\pi/g_2$ 时的解析公式.

对于大的 $N$,在(H.10)的求和中,起重要作用的 $n$ 亦比较大,于是(H.4)式中的 $\Omega_n^{(2)}T$ 可以近似展开为

$$\Omega_n^{(2)}T = g_2 T\sqrt{(n+1)(n+2)} \approx g_2 T\left(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{8n}\right). \tag{H.12}$$

在文献[3]的附录中,指明了其中的 $g_2T/8n$ 的项在直到$K\approx O(N^2)$的递推计算中都可以略去.

对于优选的 $T=\frac{\pi}{g_2}$,从方程(H.2)和(H.12)即得

$$\rho_{mn}\left(\frac{\pi}{g_2}\right) = (-1)^{m-n}\rho_{m-2,n-2}(0). \tag{H.13}$$

这样在经过 $K$ 次注入后(每次 $T$ 都为$\frac{\pi}{g_2}$),结果即为

$$\rho_{mn}(N,K) = (-1)^{(m-n)K}\rho_{m-2K,n-2K}(N,0). \tag{H.14}$$

从方程(H.9)、(H.10)和(H.14),可计算相应的 $\delta_1^2$ 和 $\delta_2^2$. 结果为[3]

$$\left[\sum_n \sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}(N,K)\right]^2 \approx N+2K-\frac{K^2}{N(N+2K)}-\frac{3K^2}{N^2(N+2K)} + \frac{7K^3}{N^2(N+2K)^2}-\frac{7K^4}{2N^2(N+2K)^3}, \tag{H.15a}$$

$$\sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)}\rho_{n,n+2}(N,K) \approx N+2K-\frac{K}{N}-\frac{K^2}{2N^2(N+2K)}. \tag{H.15b}$$

于是得出

$$\delta_1^2(N,K) = \frac{1}{4}\frac{N}{N+2K}+\frac{1}{16}\frac{K}{N^2},$$

$$\delta_2^2(N,K) = \frac{1}{4}\left[1+\frac{2K}{N}\right]+\frac{1}{8}\frac{K}{N^2}. \tag{H.16}$$

它们在下述条件下成立:

$$\frac{1}{N} \gg 1, \qquad \frac{K}{N^2} \lesssim 1. \tag{H.17}$$

从(H.16)式可得出下述结论:

(i) $\delta_1$ 总是比 $\delta_2$ 小,即最小方差出现在 $\phi=0$(注意:这是在初始相干态振幅取为实数的条件下),与前面的结果一致.

(ii) 当(H.16)两式右方第二项比起第一项小得多时,有

$$\delta_1\delta_2 = \frac{1}{4}. \tag{H.18}$$

这时光场为一纯态由下式表示:

$$|\rangle_K = \sum_n (-\mathrm{i})^{\lambda K}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n+2K\rangle. \tag{H.19}$$

(H.18)式表明该态具有最小不确定乘积.

(iii) 对于确定的 $N$,当 $K$ 增加时 $\delta_1^2(N,K)$先是下降,后转为上升,转变点位于

$$K_c \approx \sqrt{2}N^{3/2}. \tag{H.20}$$

当 $K=K_c$ 时,相应的 $\delta_1^2$ 为

$$(\delta_1^2)_{\min} \simeq \frac{1}{4\sqrt{2N}}. \tag{H.21}$$

由此可见初始平均光子数 $N$ 愈大,$(\delta_1^2)_{\min}$愈小.在 $N\to\infty$时,$(\delta_1^2)_{\min}\to 0$.

实际上,在作用次数 $K$ 增加时,$\delta_1^2$ 先是迅速地下降,然后缓慢地趋于$(\delta_1^2)_{\min}$.因而并不需要次数 $K$ 取得像$K_c$ 那样大就可获得深度的挤压.

由(H.19)式给出的$|\rangle_K$ 还是一个振幅挤压态(参见§7.6末尾处).因为经过 $K$ 次作用后,$\langle n\rangle$已增加到 $N+2K$,而$\sqrt{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2}$仍为$\sqrt{N}$,因而

$$\frac{\delta n}{\langle n\rangle} = \frac{\sqrt{N}}{N+2K} < \frac{1}{\sqrt{N+2K}}. \tag{H.22}$$

上式中的 $1/\sqrt{N+2K}$代表泊松分布情况下的值.(H.22)式表明,$|\rangle_k$ 具有亚泊松的光子数分布.

如本附录标题所指出的,我们只考虑了腔内场无阻尼的情况.Golubev-Sokolov

曾给出阻尼腔中规则注入原子时的主方程(见附录 I)[①],但如 Benbert 和 Rzazewski 所指出的,该方程存在一个问题,即通过它计算稳恒的光子数分布 $\rho_{nn}$ 的结果中,会出现负值(参见附录 I 的结尾处).这一情况表明:对于规则注入的过程,实际上不存在通常意义下的微分方程.我们在本附录中的处理,未通过任何微分方程而是逐次计算的,故不存在问题.缺点只在未能考虑腔的阻尼.

在文献[3]中还讨论了当入射原子处于下能级的情况,同样亦可能产生挤压态.

以上的讨论假定了原子与腔场共振(在双光子作用情况,如前所述,原子跃迁频率与两个光子的频率相等).文献[4]研究了失谐对挤压的影响.该文采用 J-C 模型(即注入次数 $K$ 取为 1),并设 $N$ 很大.结果得出,对单光子作用,小的失谐只有小的不利影响.而对于双光子作用,失谐的效应则是较强的.

### 参 考 文 献


1 P Meystre and M S Zubairy. Phys Lett A. **89**:390,1982

2 J R Kuklinski and J L Madajczyk. Phys Rev A. **37**:3175,1988

3 Cao Changqi and Ding Xiaohong. Phys Rev A. **46**:6042,1992

4 Cao Changqi and Ding Xiaohong. Phys Rev A. **46**:6036,1992


## I Golubev-Sokolov 主方程 生成函数的精确解

Golubev-Sokolov 主方程是指以确定的注入率向腔中注入激发态原子情况下腔场的主方程:

Golubev 和 Sokolov 指出[1],在 Scully-Lamb 的激光理论中,所谓的粗粒式注入率实际上对应于激发态原子注入率具有泊松分布的情况[参见(8.7.14)~(8.7.15)式].如果采用确定的注入率(规则注入),则作用图象中的主方程将从

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = r_a \hat{\bar{\mathscr{U}}} \hat{\rho} + \kappa\left[\hat{a}\,\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] \tag{I.1}$$

改变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} = r_a\left[\ln(1 + \hat{\bar{\mathscr{U}}})\hat{\rho}\right] + \kappa\left[\hat{a}\,\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right], \tag{I.2}$$

(I.1)和(I.2)式中 $\hat{\bar{\mathscr{U}}}\hat{\rho}$ 代表 $\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho}$ 对作用时间的平均(在这一点上 Golubev - Sokolov 主方程与 Scully - Lamb 并无差别).

---

① Golubev-Sokolov 方程与本节的讨论还有一个差别,即其中原子与腔场作用时间 $\tau$ 不是一个确定值,而有一个分布.

$$\hat{\hat{\mathscr{U}}}\hat{\rho}=\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\ \frac{1}{\tau_0}\mathrm{e}^{-\tau/\tau_0}\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho},$$

$\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho}$由(8.7.28)式表示.

为了得到最大的效应,Golubev 和 Sokolov 假定了原子从上能级衰变到其他能级的概率为零.因此每个注入的原子都将放射一个腔场光子.在此情况下,有[1]

$$(\hat{\hat{\mathscr{U}}}\hat{\rho})_{mn}=\frac{2\sqrt{mn}}{m+n+\beta(m-n)^2}\rho_{m-1,n-1}-\rho_{mn}, \tag{I.3}$$

其中 $\beta$ 为一常数

$$\beta=\frac{|d_2|^2}{\gamma_1\gamma_{21}}\frac{2\pi\omega_0}{\hbar V}. \tag{I.4}$$

由于下面只用到对角元($m=n$),故参数 $\beta$ 在结果中实际并不出现.

当 $m=n$ 时,(I.3)式化为

$$(\hat{\hat{\mathscr{U}}}\hat{\rho})_{nn}=\rho_{m-1,n-1}-\rho_{nn}. \tag{I.5}$$

Golubev 和 Sokolov 认为,虽然 $\hat{\hat{\mathscr{U}}}$代表单个原子的作用(从而比较微小),$\ln(1+\hat{\hat{\mathscr{U}}})$也不能简单地只取对数展开中的一项(即将 $\ln(1+\hat{\hat{\mathscr{U}}})$近似成 $\hat{\hat{\mathscr{U}}}$),那样就将略去具有泊松分布的原子注入率与规则性的原子注入率的差别.他们取了展开中的两项,即取

$$\ln(1+\hat{\hat{\mathscr{U}}})\cong\hat{\hat{\mathscr{U}}}-\frac{1}{2}\hat{\hat{\mathscr{U}}}^2, \tag{I.6}$$

上式右方第二项即体现规则注入时的修正.于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{nn}=r_a\left[(-\rho_{nn}+\rho_{n-1,n-1})-\frac{1}{2}(\rho_{nn}-2\rho_{n-1,n-1}+\rho_{n-2,n-2})\right]$$
$$-\kappa[n\rho_{nn}-(n+1)\rho_{n+1,n+1}]. \tag{I.7}$$

为了计算光子数的平均值 $\bar{n}(t)$、方差$\overline{[n(t)-\bar{n}(t)]^2}$,…,该文引入了生成函数

$$G(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}(t)z^n,\qquad 0<z\leqslant 1. \tag{I.8}$$

通过 $G(z,t)$对 $z$ 的各级微商即可求出$\bar{n}(t)$,$\overline{n^2}(t)$,…等的值:

$$\bar{n}(t)=\left.\frac{\partial G(z,t)}{\partial z}\right|_{z=1},\qquad \overline{n^2}(t)=\left.\frac{\partial^2 G(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=1}+\left.\frac{\partial G(z,t)}{\partial z}\right|_{z=1},\cdots. \tag{I.9}$$

而从 $\rho_{nn}$所满足的方程(I.7)可以得出 $G(z,t)$所满足的方程为

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\kappa(1-z)\left[\frac{1}{2}\bar{n}(z-3)G+\frac{\partial G}{\partial z}\right],\qquad \bar{n}\equiv\frac{r_a}{\kappa}. \tag{I.10}$$

通过将(I.8)式对 $t$ 微商和对 $z$ 微商即可验证上式的正确性[并可参考(I.42)式的推导].

Golubev 和 Sokolov 给出上式的解为

$$G(z,t)=G(z_t+1,0)e^{\bar{n}\left[\frac{3}{2}(z-(z_t+1))-\frac{1}{4}(z^2-(z_t+1)^2)\right]},\tag{I.11}$$

其中

$$z_t=(z-1)e^{-\kappa t},\tag{I.12}$$

$\bar{n}$ 实际上是稳恒时的平均光子数(见下文).

关于方程(I.11)的推导.不难证实方程

$$\frac{\partial}{\partial t}G=\kappa(1-z)\frac{\partial}{\partial z}G\tag{I.13}$$

的通解为 $F((z-1)e^{-\kappa t})$,其中 $F$ 为任意函数,而(I.10)式的解为它的一个特解 $G_s(z,t)$乘上(I.13)式的通解,即

$$G(z,t)=F((z-1)e^{-\kappa t})G_s(z,t).\tag{I.14}$$

此特解可设为与 $t$ 无关的函数 $G_s(z)$,从而满足

$$\frac{\partial G_s}{\partial z}+\frac{1}{2}\bar{n}(z-3)G_s=0.\tag{I.15}$$

由此解出

$$G_s(z)=e^{\frac{1}{4}\bar{n}(6-z)z}.\tag{I.16}$$

于是通解(I.14)化为

$$G(z,t)=F((z-1)e^{-\kappa t})e^{\frac{1}{4}\bar{n}(6-z)z}.\tag{I.17}$$

为满足初条件,应有

$$F(z-1)=G(z,0)e^{-\frac{1}{4}\bar{n}(6-z)z}\tag{I.18}$$

利用此关系即可将(I.17)式化成(I.11)式:首先,按照(I.12)式将(I.17)式右方写成 $F(z_t)e^{\frac{1}{4}\bar{n}(6-z)z}$,再利用(I.18)式将 $F(z_t)$表成$G(z_{t+1,0})e^{-\frac{1}{4}\bar{n}[6(z_t+1)-(z_t+1)^2]}$,即化出(I.11)式.

有了 $G(z,t)$即可求出光子数平均值 $\bar{n}(t)$和它的方差$\overline{\Delta n(t)^2}$.先看$\bar{n}(t)$.由(I.8)和(I.11)式,

$$\bar{n}(t)=\frac{\partial}{\partial z}G(z,t)\bigg|_{z=1}=\frac{\partial G(z_t+1,0)}{\partial z_t}\bigg|_{z=1}e^{-\kappa t}+G(z_t+1,0)\bigg|_{z=1}\bar{n}(1-e^{-\kappa t}),\tag{I.19}$$

其中 $G(z_t+1,0)=\sum\rho_{nn}(0)(z_t+1)^n$.于是

$$G(z_t+1,0)\bigg|_{z=1}=1,\qquad\frac{\partial}{\partial z_t}G(z_t+1,0)\bigg|_{z=1}=\sum_n\rho_{nn}(0)n=\bar{n}(0).\tag{I.20}$$

代入(I.19)式后即得

$$\bar{n}(t)=\bar{n}+[\bar{n}(0)-\bar{n}]e^{-\kappa t},\qquad \bar{n}\equiv\frac{r_a}{\kappa}. \tag{I.21}$$

上式右方的参数 $\bar{n}$ 等于 $\bar{n}(\infty)$,即稳恒时的平均光子数.

方差 $\overline{[n(t)-\bar{n}(t)]^2}\equiv\overline{[\Delta n(t)]^2}$ 可表为

$$\overline{[\Delta n(t)]^2}=\left.\frac{\partial^2 G(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=1}+\left.\frac{\partial G(z,t)}{\partial z}\right|_{z=1}-\left(\frac{\partial G(z,t)}{\partial z}\right)^2_{z=1}, \tag{I.22}$$

其稳恒值为

$$\overline{[\Delta n(\infty)]^2}=\frac{1}{2}\bar{n}. \tag{I.23}$$

这表明稳恒时的光子数方差只有泊松分布情况值的一半,即光子数具有亚泊松分布(亦即光场处于振幅模压缩态)①.

在 Golubev-Sokolov 文中还给出了 $\overline{[\Delta n(\infty)]^3}$ 的值.此值描述光子数分布的不对称情况.他们得出的结果为

$$\overline{[\Delta n(\infty)]^3}=-\frac{1}{2}\bar{n}.$$

其绝对值比泊松分布的值 $\overline{(\Delta n)^3}=\bar{n}$ 要小,而且符号相反.负号的意义是比平均值小的光子数概率较大.在下文中我们将指出,由于 Golubev-Sokolov 又作了(I.6)式的近似.上面给出的 $\overline{[\Delta n(\infty)]^3}$ 并不正确.

对于单模的非自由光场,在二阶相关函数的定义中,常用算符 $\hat{a}(t)_{\mathrm{H}}$ 来代替 $\hat{E}^{(+)}(t)_{\mathrm{H}}$,即为

$$g(t)\equiv \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{H}}\hat{a}^{\dagger}(0)_{\mathrm{H}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{H}}(t)\hat{a}_{\mathrm{H}}(t)\hat{a}_{H}(0)],\qquad t>0, \tag{I.24}$$

脚标 H 代表海森伯图象.在 Golubev-Sokolov 文中计算了稳恒时的 $g(t)$ 值,也就是说上式中的 $t=0$ 已达稳恒态.他们给出

$$g(t)=\bar{n}^2-\frac{1}{2}\bar{n}e^{-\kappa t},\qquad t\geqslant 0. \tag{I.25}$$

下面先来给出(I.25)式的推导.由(I.24)式定义的 $g(t)$ 等于一个"虚拟的而且是不归一化的海森伯图象密度算符 $\rho_{\mathrm{fic}}^{(H)}$"中的平均光子数,即

$$\begin{aligned} g(t)&=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}^{(H)}\hat{n}_H(t)],\\ \hat{\rho}_{\mathrm{fic}}^{(\mathrm{H})}&=\hat{a}_{\mathrm{H}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{H}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{H}}(0). \end{aligned} \tag{I.26}$$

为将 $g(t)$ 转到作用图象中,我们利用关系式

---

① 从 $G(z,t)$ 还可具体求出光子数的分布 $\rho_{nn}(t)$.由 $G(z,t)$ 的定义式(I.8)可得 $\rho_{nn}(t)=\left.\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}G(z,t)\right|_{z=0}$.

$$\hat{n}_{\mathrm{H}}(t) = \hat{U}(t)\hat{n}\,\hat{U}^{-1}(t) \tag{I.27}$$

其中 $\hat{U}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t}$，$\hat{n}$为作用图象中的光子数算符(它与 $t$ 无关). 代入(I.26)第一式后，就得出

$$g(t) = \mathrm{tr}[\hat{U}^{-1}(t)\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}^{(\mathrm{H})}\hat{U}(t)\hat{n}] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}(t)\hat{n}]. \tag{I.28}$$

上式中的 $\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}(t)$为作用图象中的算符，它满足的方程应与(I.2)式相同，因为它随时间的演化仍由原来的 $\hat{U}(t)$给出，与原 $\hat{\rho}(t)$不同的只是初条件. 现在的 $\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}(0)$与原 $\hat{\rho}(0)$的关系为：$\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}(0)$等于 $\hat{a}(0)\hat{\rho}(0)\hat{a}^{\dagger}(0)$. 于是有

$$\rho_{\mathrm{fic}}(0)_{mn} = \sqrt{(m+1)(n+1)}\,\rho_{m+1,n+1}(0). \tag{I.29}$$

相应地定义

$$G_{\mathrm{fic}}(z,t) = \sum_{n}\rho_{\mathrm{fic}}(t)_{nn}z^{n}, \tag{I.30}$$

即可将 $\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}(t)\hat{n}]$表为 $z=1$ 处 $G_{\mathrm{fic}}(z,t)$对 $z$ 的微商：

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{fic}}(t)\hat{n}] = \frac{\partial}{\partial z}G_{\mathrm{fic}}(z,t)\bigg|_{z=1}. \tag{I.31}$$

上式右方仍可如(I.19)式那样写成

$$\frac{\partial}{\partial z}G_{\mathrm{fic}}(z,t)\bigg|_{z=1} = \frac{\partial}{\partial z_t}G_{\mathrm{fic}}(z_t+1,0)\bigg|_{z=1}\mathrm{e}^{-\kappa t} + G_{\mathrm{fic}}(z_t+1,0)\bigg|_{z=1}\bar{n}(1-\mathrm{e}^{-\kappa t}). \tag{I.32}$$

如(I.24)式下的说明，现在 $t=0$ 已取在系统的稳恒期，因此有[利用(I.30)、(I.29)及(I.12)等式]

$$\frac{\partial}{\partial z_t}G_{\mathrm{fic}}(z_t+1,0)\bigg|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty}n\rho_{\mathrm{fic}}(0)_{nn} = \sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)\rho_{n+1,n+1}(0)$$

$$= \bar{n}^2 - \frac{1}{2}\bar{n}, \tag{I.33}$$

$$G_{\mathrm{fic}}(z_t+1,0)\bigg|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{\mathrm{fic}}(0)_{nn} = \bar{n}, \tag{I.34}$$

在(I.33)最后等式中我们利用了稳恒时 $n^2$ 的平均值等于$\left(\bar{n}^2+\frac{1}{2}\bar{n}\right)$.

将(I.33)和(I.34)式代入(I.32)式，再依次将所得结果代入(I.31)和(I.30)式即得出(I.25)式.

(I.25)式表明：$t$(时间差)为零时 $g(t)$的值最小，随着 $t$ 的增加，$g(t)$的值也增加，从 $g(t)<\bar{n}^2$ 得出腔内光场是反群聚的，反群聚效应的时间尺度是 $1/\kappa$.

在§8.5 中我们曾介绍了随机算符的功率谱 $P(\omega)$[这里用了 $\omega$ 代替(8.5.32)和(8.5.33)式中的 $\Omega$]. 在 Golubev-Sokolov 文中曾讨论了从“规则抽运激光器”输出流的功率谱 $P(\omega)$，他们采用了对称化的定义，即

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\hat{I}_{\mathrm{H}}(0)\hat{I}_{\mathrm{H}}(t) + \hat{I}_{\mathrm{H}}(t)\hat{I}_{\mathrm{H}}(0)\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{I.35}$$

此式与(8.5.34)式的差别是采用 $e^{i\omega t}$ 而不是 $e^{-i\omega t}$. 上式中的 $\hat{I}_H$ 为海森伯图象中的算符. 下面,我们将只研究稳恒时的 $P(\omega)$.

在§8.6第3小节我们曾讨论过激光器输出流的关联函数(参见(8.6.48)~(8.6.53)式). Golubev-Sokolov 利用下述一般公式①来计算输出流的对称化关联函数

$$\frac{1}{2}\langle \hat{I}_H(0)\hat{I}_H(t)+\hat{I}_H(t)\hat{I}_H(0)\rangle=\kappa\bar{n}\delta(t)+\kappa^2[g(t)\theta(t)+g(-t)\theta(-t)]. \tag{I.36a}$$

将(I.25)式所给出的 $g(t)$ 值代入后得出

$$\frac{1}{2}\langle \hat{I}_H(0)\hat{I}_H(t)+\hat{I}_H(t)\hat{I}_H(0)\rangle=\kappa\bar{n}\delta(t)+\kappa^2\left(\bar{n}^2-\frac{1}{2}\bar{n}e^{-\kappa|t|}\right) \tag{I.36b}$$

(此式亦相当于 Yamamoto 和 Emoto 在 IEEE J. Quan. Elect. **22**,2032(1986)文中所用的公式).

由(I.36b)即可求出输出流的功率谱为

$$P(\omega)=\kappa\bar{n}\left(1-\frac{\kappa^2}{\omega^2+\kappa^2}\right)+2\pi\kappa^2\bar{n}^2\delta(\omega). \tag{I.37}$$

上式右方后项代表输出的恒定流的贡献,前项代表输出流涨落的功率谱,即 $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle[\hat{I}(0)-\kappa\bar{n}][\hat{I}(t)-\kappa\bar{n}]+[\hat{I}(t)-\kappa\bar{n}][\hat{I}(0)-\kappa\bar{n}]\rangle e^{i\omega t}dt$. 前项中的第一项 $\kappa\bar{n}$ 等于通常的散粒噪音,第二项代表修正项. 我们看到:在低频区 $\omega^2\ll\kappa^2$,散粒噪音受到压制. 当频率趋于零时,噪音也趋于零(就通常的实际应用而言,消减低频噪音比消减高频噪音更为重要).

下面转到 Golubev-Sokolov 方程的精确解[2].

前面曾经指出,Golubev-Sokolov 文中给出的 $\overline{[\Delta n(\infty)]^3}$ 并不正确,因为他们只取了 $\ln(1+\hat{\mathscr{U}})$ 展式中的两项[参见(I.7)式]. 我们计算了生成函数 $G(z,t)$ 的精确解[2]. 从所得的精确解可以看出,Golubev 和 Sokolov 所求出的 $\overline{[\Delta n(\infty)]^2}$ 是正确的,但他们的 $\overline{[\Delta n(\infty)]^3}$ 不仅数值不对,连符号都不正确. 精确的 $\overline{[\Delta n(\infty)]^3}$ 是 $\frac{1}{6}\bar{n}$. 即光子数分布的不对称度更小,而且光子数较平均值小的概率变成较小. 一般说来,当我们将 $\ln(1+\hat{\mathscr{U}})$ 展开到 $J$ 项时,计算出 $\overline{(\Delta n)^j}$ 在 $j\leqslant J$ 时的值与精确解一致,而当 $j>J$ 时就不一致了. 至于二阶相关函数 $g(t)$,Golubev 与 Sokolov 所给

① 参见 D F Smirnov and I V Sokolov. Sov Phys. JETP **43**:1095,1976.

出的值与精确值是一致的,下面将给出具体推算.

对于 $\hat{\rho}$ 的对角元,方程(I.2)约化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{nn} = r_a\left[\ln(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}\right]_{nn} - \kappa\left[n\rho_{nn} - (n+1)\rho_{n+1,n+1}\right]. \tag{I.38}$$

从(I.3)式可得

$$\left[(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}\right]_{nn} = \rho_{n-1,n-1}.$$

因此

$$\left[(1+\hat{\mathscr{U}})^j\hat{\rho}\right]_{nn} = \rho_{n-j,n-j}. \tag{I.39}$$

将(I.8)式对 $t$ 作偏微商并利用(I.38)式即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{nn}\right)z^n = r_a\sum_{n=0}^{\infty}\left[\ln(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}\right]_{nn}z^n \\ &\quad - \kappa\sum_{n=0}^{\infty}\left[n\rho_{nn} - (n+1)\rho_{n+1,n+1}\right]z^n.\end{aligned} \tag{I.40}$$

我们先来处理后一项.利用

$$\begin{aligned}n\rho_{nn}z^n &= z\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{nn}z^n), \\ -(n+1)\rho_{n+1,n+1}z^n &= -\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{n+1,n+1}z^{n+1}),\end{aligned} \tag{I.41}$$

即可将(I.40)式右方后项化成

$$-\kappa(z-1)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t).$$

另外从(I.39)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+\hat{\mathscr{U}})^j\hat{\rho}\right]_{nn}z^n = z^j\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n-j,n-j}z^{n-j}.$$

由于当 $n<j$ 时 $\rho_{n-j,n-j}$ 为零,故上式右方对 $n$ 的求和实际从 $n=j$ 开始,即上式右方可化成 $z^j\sum_{n=j}^{\infty}\rho_{n-j,n-j}z^{n-j} = z^j\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}z^n$.从而化出,对任意 $j$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+\hat{\mathscr{U}})^j\hat{\rho}\right]_{nn}z^n = z^jG(z,t).$$

这意味着对于函数 $f(1+\hat{\mathscr{U}})$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[f(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}\right]_{nn}z^n = f(z)G(z,t). \tag{I.42}$$

利用这一结果(I.40)右方前项就化成

$$r_a(\ln z)G(z,t)$$

于是得出 $G(z,t)$满足的方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = r_a(\ln z)G(z,t) + \kappa(1-z)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t). \tag{I.43}$$

我们看到此式右方第一项与 Golubev-Sokolov 所给出的方程(I.10)右方第一项的差别在于,以 $r_a\ln z$ 代替了$\frac{1}{2}\kappa\bar{n}(1-z)(z-3)=\frac{1}{2}r_a(1-z)(z-3)$.由此可见,如果把 $\ln z$ 写成 $\ln(1+(z-1))$并取展开的前两项就得出(I.10)式的结果.

(I.43)式的通解可以表示为它的一个特解与方程(I.13)通解的乘积.我们取(I.13)式一个特解为与 $t$ 无关的$G_s(z)$,即稳恒情况时的解:

$$G_s(z) = \exp\left(\frac{r_a}{\kappa}\int_1^z \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right). \tag{I.44}$$

而方程(I.13)的通解如该式下所述,为宗量$(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}$的任意函数$F\big((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}\big)$.此任意函数可通过初条件 $G(z,0)$来确定.因由

$$G(z,0) = F(z-1)\exp\left(\frac{r_a}{\kappa}\int_1^z \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right), \tag{I.45}$$

可得

$$F(z-1) = G(z,0)\exp\left(-\frac{r_a}{\kappa}\int_1^z \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right). \tag{I.46}$$

这就是对(I.18)式的修正.于是

$$F(z) = G(z+1,0)\exp\left(-\frac{r_a}{\kappa}\int_1^{z+1} \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right).$$

然后将 $F$ 的宗量由 $z$ 换成$(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}$,即有

$$F((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}) = G((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1,\ 0)\exp\left(-\frac{r_a}{\kappa}\int_1^{(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1} \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right) \tag{I.47}$$

于是得

$$\begin{aligned} G(z,t) &= G_s(z)G((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1,\ 0)\exp\left(-\frac{r_a}{\kappa}\int_1^{(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1} \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right) \\ &= G((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1,\ 0)\exp\left(\frac{r_a}{\kappa}\int_{(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1}^{z} \frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z'\right), \end{aligned} \tag{I.48}$$

其中 $G((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1,\ 0)$可由 $\rho_{nn}(0)$决定

$$G((z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1,\ 0) = \sum_n \rho_{nn}(0)[(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1]^n. \tag{I.49}$$

光子数的平均值$\overline{n(t)}$和其方差的平均值$\overline{[\Delta n(t)]^2}$可按(I.22)式求出,计算的

结果是

$$\overline{n(t)} = \frac{r_a}{\kappa} + \left[\overline{n(0)} - \frac{r_a}{\kappa}\right]\mathrm{e}^{-\kappa t},$$

$$\overline{[\Delta n(t)]^2} = \frac{r_a}{2\kappa} + \left[\overline{n(0)} - \frac{r_a}{\kappa}\right]\mathrm{e}^{-\kappa t} + \left\{\overline{[\Delta n(0)]^2} - \overline{n(0)} + \frac{r_a}{2\kappa}\right\}\mathrm{e}^{-2\kappa t}. \tag{I.50}$$

它们的稳恒值分别为$\frac{r_a}{\kappa}$和$\frac{r_a}{2\kappa}$,与 Golubev-Sokolov 给出的值一致.但如前所述,$\overline{(\Delta n)^3}$值就不同了.利用公式

$$\left.\frac{\partial^3 G(z,t)}{\partial z^3}\right|_{z=1} = \overline{n(t)^3} - 3\,\overline{n(t)^2} + 2\,\overline{n(t)}, \tag{I.51}$$

现在求出$\overline{(\Delta n)^3}$的稳恒值为

$$\overline{\Delta n(\infty)^3} = \frac{1}{6}\bar{n}. \tag{I.52}$$

与 Golubev-Sokolov 给出的值$\left(-\frac{1}{2}\bar{n}\right)$不一致,连符号都相反.一般来说,利用在$z=1$附近 $\ln z$ 的展开式

$$\ln z = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(-1)^{j-1}(z-1)^j, \tag{I.53}$$

即可将(I.48)式中的指数因子化为下述级数:

$$\frac{r_a}{\kappa}\int_{(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}+1}^{z}\frac{\ln z'}{z'-1}\mathrm{d}z' = \frac{r_a}{\kappa}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j^2}(z-1)^j(1-\mathrm{e}^{-j\kappa t}). \tag{I.54}$$

显然"上式对 $z$ 的 $l$ 次微商"在 $z=1$ 处的值与 $j>l$ 的项无关.因此 $j>l$ 的项对$\overline{\Delta n(t)^l}$没有贡献.而展式(I.53)式又对应于 $\ln(1+\hat{\mathscr{U}})$对 $\hat{\mathscr{U}}$的展开:

$$\ln(1+\hat{\mathscr{U}}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(-1)^{j-1}\hat{\mathscr{U}}^j. \tag{I.55}$$

这就证明了我们前面的论断:当我们将 $\ln(1+\hat{\mathscr{U}})$ 展开到 $l$ 项时,所计算出的$\overline{[\Delta n(t)]^j}$直到 $j$ 等于 $l$ 都将与准确值一致(见(I.38)式上).

下面再来计算精确的 $G_{\text{fic}}(z,t)$所给出的稳恒时二阶相关函数 $g(t)$.

由(I.28)和(I.31)式

$$g(t) = \left.\frac{\partial}{\partial z}G_{\text{fic}}(z,t)\right|_{z=1}. \tag{I.56}$$

而精确的 $G_{\text{fic}}(z,t)$满足的方程与(I.43)式相同,因此其解亦具有(I.48)式的形式,即

$$G_{\rm fic}(z,t)=G_{\rm fic}(z_t+1,0)\exp\left(\frac{r_a}{\kappa}\int_{z_t+1}^{z}\frac{\ln z'}{z'-1}dz'\right),\qquad z_t\equiv(z-1)e^{-\kappa t}.\tag{I.57}$$

$G_{\rm fic}(z,t)$与$G(z,t)$的差别在于其初始值.由(I.30)和(I.29)式

$$G_{\rm fic}(z_t+1,0)=\sum(n+1)\rho^{(s)}_{n+1,n+1}(z_t+1)^n.\tag{I.58}$$

其中$\rho^{(s)}_{n+1,n+1}$代表稳恒时密度算符.按照(I.56)～(I.58)式求出的精确$g(t)$与(I.25)式完全相同,换句话说,(I.55)式右方展式中$j>2$的项对$g(t)$没有影响.这就证明了(I.38)式上面的论断.

Benkert和Rzazewski[3]曾指出,Golubev-Sokolov主方程存在一个问题:当令$\frac{d}{dt}\rho_{nn}=0$来计算稳恒的$\rho_{nn}$时,会出现负值.$\rho_{nn}$并表现出随$n$变化而振荡.我们认为问题可能出在:对规则抽运,$r_a\Delta t=k$,$k$为正整数,其值必须大于或等于1,因此$\Delta t$的值不能取得任意小①.这意味着Golubev-Sokolov方程不应看作是通常意义的微分方程.只当对它求积、得出的$t\gg\frac{1}{r_a}$时各种期望值、方差等具有统计意义的量,才是有物理意义的结果(参见附录J).

## 参　考　文　献

1 Yu M, Golubev and I V Sokolov. Sov Phys JETP. **60**:234,1984

2 Changqi Cao. Phys Lett A **196**,35(1994). 谭维翰教授亦得出与我们类似的结果并发表在同一年的Phys. Lett. A上

3 C. Benkert and K. Rzazewski, Phys Rev A. **47**,1564(1993)

# J　生成函数方法在阻尼腔中规则注入原子问题中的应用

本附录讨论的内容与附录I的差别主要在于:原子与腔场间不是通常的单光子耦合,而是双光子耦合.

在§7.6中我们曾看到,在共振情况,经典源与双光子的耦合将产生挤压真空态(亦即它将初始的真空态变成挤压真空态),而若初态为相干态时,则这种耦合会将它变成挤压相干态,其振幅的模量会改变(增大或减小,参见§7.6.2).因此我们有兴趣来考察当入射原子与腔内单模光场间为双光子耦合的情况并且规则注入时

① 这里的情况与§8.7中推导(8.7.15b)时不同.在那里,由于$P(k)$具有概率分布(8.7.14)式,故即使$\Delta t$很小,$\hat{\rho}$也按(8.7.15a)改变.

会怎样改变腔内原来的相干态光场.

像附录 I 一样,我们仍将采用生成函数的方法.并先来讨论振幅模量的涨落,即光子数的涨落[1].

在参考文献[2]中我们曾研究了在腔场无阻尼的情况下,规则注入上能级原子对腔内场振幅模量的挤压(参见附录 H).但现实的腔场总是有阻尼的,因此在本附录中将进一步研究腔阻尼的影响.

描述光子数涨落的主要物理量为

$$\eta(t) \equiv \frac{\overline{[\Delta n(t)]^2}}{\overline{n(t)}}. \tag{J.1}$$

在原子与双光子耦合.规则性注入的原子处于上能级的情况.作用时间并取优选值 $\pi/g$ 时,文献[2]给出的结果(腔场无阻尼)为

$$\eta(t) = \frac{N}{N + 2K(t)}. \tag{J.2}$$

$K(t)$代表直到 $t$ 时刻注入的原子总数.这样,当 $t$ 变大时,$\eta(t)$可变得任意地小,但在腔场有阻尼时,情况就不同了.我们将看到 $\eta(t)$趋于$\frac{1}{2}$,如同原子与腔场间为单光子耦合一样.

下面计算的方法与附录 I 相似.首先写出相互作用哈密顿量.(8.7.1)式现改为

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g(\hat{a}^2\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{\sigma}_-), \tag{J.3}$$

(8.7.37)式相应地改为

$$(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{nn} = \sin^2(g\tau\sqrt{n(n-1)})\rho_{n-2,n-2} - \sin^2(g\tau\sqrt{(n+1)(n+2)})\rho_{nn}. \tag{J.4}$$

上式与(8.7.37)式的差别有两点,一是右方两项 $\rho$ 之间的脚码相差为 2 而不是 1,这与原子与双光子耦合直接相联系.二是正弦函数的宗量不是单光子耦合时的 $g\tau\sqrt{n}$(或 $g\tau\sqrt{n+1}$)而变成 $g\tau\sqrt{n(n-1)}$(或 $g\tau\sqrt{(n+1)(n+2)}$).这一改变也很重要,因为当腔内原有较强的相干光时,比较重要的 $\rho_{nn}$ 所对应 $n$ 为大值,从而 $\sqrt{(n+1)(n+2)}$可近似为 $n+\frac{3}{2}$.在文献[2]中曾指出这一近似直到注入原子数大到 $N^2$ 的量级($N$ 为腔内原有相干光的光子数)时都可以应用(参见(H.12)).于是(J.4)式可近似为

$$(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{nn} = \sin^2\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)g\tau\right]\rho_{n-2,n-2} - \sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)g\tau\right]\rho_{n,n}. \tag{J.5}$$

这样,如果取 $\tau$ 为优选值[参见(H.13)式上]

$$\tau = \frac{\pi}{g}, \tag{J.6}$$

就会将(J.5)式简化成

$$(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{nn} = \rho_{n-2,n-2} - \rho_{nn}. \tag{J.7}$$

此式的物理意义可从移项后形式$(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}\big|_{nn} = \rho_{n-2,n-2}$看出,它表明:经过一个原子作用后腔内光子数平均值$\sum_n n\left[(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}\right]_{nn} = \sum_n n\rho_{n-2,n-2} = \sum_n (n+2)\rho_{nn}$,比原来的光子数平均值大了二个.换句话说该原子在腔内发射了两个光子,即发光的量子效率为100%.这一情况与$m=n$时的(I.3)式相似.

由于我们只计算$\overline{n(t)}$和$\overline{[n(t)-\bar{n}(t)]^2}$,我们将采用展式(I.6)式.文献[1]中证明了:对于双光子跃迁过程,由(I.6)式计算出的$\overline{n(t)}$和$\overline{[n(t)-\bar{n}(t)]^2}$同样与精确值相等(见该文第五节).这一情况与单光子过程相似,参见(I.56)式下的说明.

生成函数$G(z,t)$的定义与(I.8)式一致,利用(I.6)和(J.7)式,我们得出,$G(z,t)$满足的方程为[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = -\frac{r_a}{2}(3-z^2)(1-z^2)G(z,t) + \kappa(1-z)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t). \tag{J.8}$$

仿前可求出它的解为

$$G(z,t) = G(z_t+1,0)\mathrm{e}^{\frac{r_a}{2\kappa}F(z,t)}, \tag{J.9}$$

其中$z_t$仍如(I.12)式所示,而

$$F(z,t) = 3[z-(z_t+1)] + \frac{3}{2}[z^2-(z_t+1)^2] - \frac{1}{3}[z^3-(z_t+1)^3] - \frac{1}{4}[z^4-(z_t+1)^4]. \tag{J.10}$$

再通过(I.50)式即可求出$\bar{n}(t)$和$\overline{[\Delta n(t)]^2}$,结果为

$$\begin{aligned}\bar{n}(t) &= \frac{2r_a}{\kappa} + \left(N - \frac{2r_a}{\kappa}\right)\mathrm{e}^{-\kappa t},\\ \overline{[\Delta n(t)]^2} &= \frac{r_a}{\kappa} + \left(N - \frac{2r_a}{\kappa}\right)\mathrm{e}^{-\kappa t} + \frac{r_a}{\kappa}\mathrm{e}^{-2\kappa t}.\end{aligned} \tag{J.11}$$

其稳恒值为

$$\begin{aligned}\bar{n}(\infty) &= \frac{2r_a}{\kappa},\\ \overline{[\Delta n(\infty)]^2} &= \frac{r_a}{\kappa},\end{aligned} \tag{J.12}$$

它们与(I.21)和(I.23)式给出的值不同,但$\overline{[\Delta n(\infty)]^2}$与 $\bar{n}(\infty)$的比值仍为$\frac{1}{2}$(即与单光子耦合时的结果一样):

$$\eta(\infty)=\frac{\overline{[\Delta n(\infty)]^2}}{\bar{n}(\infty)}=\frac{1}{2}. \tag{J.13}$$

$\eta(t)$随时间 $t$ 的变化依赖于初始光子数$N$ 与稳恒光子数$\bar{n}(\infty)$的比值.当$N<\bar{n}(\infty)$时,按(J.11)式,$\bar{n}(t)$随 $t$ 单调上升,但 $\eta(t)$先从 1 下降到一个极小值(该值小于 1/2)再上升趋于$\frac{1}{2}$.而当 $N>\bar{n}(\infty)$时,$\bar{n}(t)$单调下降,$\eta(t)$亦从 1 单调地降到$\frac{1}{2}$.

在文献[1]中亦给出了二阶相关函数①$g(t)$的值,结果与(I.25)式相同.再按照(I.35)式计算输出流的功率谱结果亦与(I.37)式一样.该文还求出了腔内光子数涨落的一阶相关函数$\langle\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\rangle$,其中 $\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)$和 $\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)$皆为海森伯图象中的算符.

稳恒时的$\langle\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\rangle$为

$$K(t)\equiv\langle\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\rangle_{\mathrm{S}}=\langle\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\rangle_{\mathrm{S}}-\bar{n}^2, \tag{J.14}$$

上式右方第一项就是 $\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)]$,$\hat{\rho}_{\mathrm{S}}$ 代表稳恒态的密度算符,时间 0 和 $t$ 都处于稳恒期内.再定义

$$\hat{\rho}'_{\mathrm{fic}}=\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\hat{\rho}_s, \tag{J.15}$$

则$\langle\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\rangle_{\mathrm{S}}$ 可写成下述形式:

$$\langle\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)\hat{n}_{\mathrm{H}}(0)\rangle_{\mathrm{S}}=\mathrm{tr}[\hat{\rho}'_{\mathrm{fic}}\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)]. \tag{J.16}$$

仿照(I.28)式,将上式右方换到作用图象.结果为 $\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}'_{\mathrm{fic}}(t)\hat{n}\right]$,其中 $\hat{\rho}'_{\mathrm{fic}}(t)$与 $\hat{n}$ 已为作用图象中算符.仿照(I.30)式通过 $\hat{\rho}'_{\mathrm{fic}}(t)$定义相应的生成函数 $G_{\mathrm{fic}}(z,t)$.再求出按(J.14)式定义的 $K(t)$即

$$K(t)=\frac{\partial}{\partial z}G'_{\mathrm{fic}}(z,t)\bigg|_{z=1}-\bar{n}^2, \tag{J.17}$$

结果为

$$K(t)=\frac{1}{2}\bar{n}\mathrm{e}^{-\kappa t},\qquad t>0. \tag{J.18}$$

对于 $t<0$ 的情况,利用稳恒时相关函数只依赖于时间差,$\langle\hat{n}(t)\hat{n}(0)\rangle$将等于$\langle\hat{n}(0)\hat{n}(-t)\rangle$.这样就求出

① 其定义见(I.24)式.

$$K(t)=\frac{1}{2}\bar{n}e^{\kappa t},\qquad t<0. \tag{J.19}$$

由(J.18)和(J.19)式的傅里叶变换得出腔内光子数涨落算符的功率谱为①

$$P'(\omega)=\bar{n}\frac{\kappa}{\omega^2+k^2},\qquad \omega>0. \tag{J.20}$$

我们看到它具有中心点在原点的洛伦兹谱型.这意味着腔内光子数的噪音主要在低频.输出流的噪音情况则相反.这是因为 $\Delta\hat{I}_{\mathrm{H}}(t)=\kappa\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)-\hat{F}_n^{(1)}(t)$,其中涨落力 $\hat{F}_n^{(1)}(t)$ 具有白谱. $\Delta\hat{I}_{\mathrm{H}}(t)$ 的傅里叶变换为"$\kappa\Delta\hat{n}_{\mathrm{H}}(t)$ 和 $\hat{F}_n^{(1)}(t)$"两者傅里叶变换的差.由于相消,使 $\Delta\hat{I}_{\mathrm{H}}$ 功率谱的低频部分被削减.

对于 Benkert 和 Rzazewski 所指出的[3] Golubev-Sokolov 主方程的问题,我们在附录 I 中已经谈了自己的看法.在这里还可通过具体的比较作一个印证.为此我们来考察 $\kappa t\ll 1$ 的情况.将(J.11)式中的 $e^{-\kappa t}$ 和 $e^{-2\kappa t}$ 分别展成 $(1-\kappa t)$ 和 $(1-2\kappa t)$,经过约简后再令 $\kappa t\to 0$ 即求出

$$\overline{n(t)}=\overline{n(0)}+2r_a t,\qquad \overline{[\Delta n(t)]^2}=\overline{[\Delta n(0)]^2}, \tag{J.21}$$

与文献[2]中(26)式一致(亦见(H.22)式).值得指出的是,在文献[2]中并未利用 Golubev-Sokolov 方程,因而结果是没有疑问的.

下面来考察原子规则注入并且与腔场定时作用情况下,腔内光场的正交分量挤压.

设初始的相干态光场为 $|\alpha\rangle$, $\alpha$ 的辐角为 $\theta$.我们定义 $\hat{a}$ 的两个正交分量 $\hat{a}_L$ 和 $\hat{a}_T$ 为

$$\begin{aligned}\hat{a}_L&=\frac{1}{2}(\hat{a}\,e^{-i\theta}+\hat{a}^{\dagger}e^{i\theta})=\hat{a}_1\cos\theta+\hat{a}_2\sin\theta,\\ \hat{a}_T&=\frac{1}{2i}(a e^{-i\theta}+\hat{a}^{\dagger}e^{i\theta})=-\hat{a}_1\sin\theta+\hat{a}_2\cos\theta.\end{aligned} \tag{J.22}$$

它们相应于 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 旋转了一个角度 $\theta$.在新的 $\alpha_L\alpha_T$ 平面(代替原来的 $\alpha_1\alpha_2$ 平面)中,点 $\alpha$ 即位于 $\alpha_L$ 轴上.因此 $\hat{a}_L$ 和 $\hat{a}_T$ 分别称为纵向正交分量和横向正交分量.

同前一样,规则注入激发态的原子,它与腔场之间为双光子耦合.穿越腔的时间仍取优选值,如(J.6)式所示,使得原子发光效率为 100%.

在不考虑腔损耗的情况 $\delta_L^2\equiv\overline{(\Delta\hat{a}_L)^2}$ 一般是比 $\delta_T^2=\overline{(\Delta\hat{a}_T)^2}$ 要小[2].当初始相干态的光子数 $N=|\alpha|^2\gg 1$,而注入原子数 $K\ll N^2$ 时,文献[2]给出

① 此即威纳-亨钦定理.

$$\delta_L^2 = \frac{1}{4}\frac{N}{N+2K}, \qquad \delta_T^2 = \frac{1}{4}\frac{N+2K}{K}. \tag{J.23}$$

于是 $\delta_L\delta_T=\frac{1}{4},\delta_L<\frac{1}{2},\delta_T>\frac{1}{2}$. 这意味着幅模的涨落 $\delta_L^2$ 被压低，而相位涨落 $\delta_T^2$ 将增高. 考虑了腔损耗以后，情况将发生变化. 文献[4]利用 Golubev-Sokolov 方程研究了这一问题，求出了横向正交分量方差 $\delta_T(t)$ 的值. 但未能将生成函数方法推广用来计算纵向正交分量的方差 $\delta_L(t)$.

为简便计，设 $\hat{a}$ 在初始态的本征值 $\alpha$ 为实数，于是 $\hat{a}_1$ 就是纵向正交分量，$\hat{a}_2$ 就是横向正交分量. 要指出的是，这样做并未失去普遍性，因按 §7.5，它相当于在薛定谔图象中选择适当的初始时间使 $\alpha$ 为实数再转到作用图象.

下面就来讨论 $\overline{[\Delta\hat{a}_2(t)]^2}$（亦即 $\overline{[\Delta\hat{a}_T(t)]^2}$）. 由文献[2]中给出的公式可得出（令该文(10)式中的 $\phi$ 等于 $\pi/2$）

$$\overline{[\Delta\hat{a}_2(t)]^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_n n\rho_{nn}(t) - \frac{1}{2}\sum\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\rho_{n,n+2}(t). \tag{J.24}$$

这是一个一般性的关系式，没有任何前提. (J.24)式右方第二项即 $\frac{1}{2}\bar{n}(t)$，对于本附录所讨论的情况，其值由(J.11)式给出. 剩下要计算的是第三项. 为此先给出 $\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho}$ 的非对角元：

$$\begin{aligned}(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{mn} &= \sin(g\tau\sqrt{m(m-1)})\sin(g\tau\sqrt{n(n-1)})\rho_{m-2,n-2}\\ &\quad - \left[1-\cos(g\tau\sqrt{(m+1)(m+2)})\cos(g\tau\sqrt{(n+1)(n+2)})\right]\rho_{mn}.\end{aligned} \tag{J.25}$$

对于 $N$ 大的情况，重要的脚标 $m$ 和 $n$ 的取值亦将很大，于是 $\sqrt{(m+1)(m+2)}$ 和 $\sqrt{(n+1)(n+2)}$ 可近似为 $m+\frac{3}{2}$ 和 $n+\frac{3}{2}$. 我们在(J.4)式下已对这种近似作过讨论. 同样，取 $\tau$ 为优选的值如(J.6)式所示. 就将(J.25)式化成

$$(\hat{\mathscr{U}}\hat{\rho})_{mn} = (-1)^{m-n}\rho_{m-2,n-2} - \rho_{mn}. \tag{J.26}$$

我们要将此结果应用到非对角元方程中. 该方程现为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{mn}(t) &= r_a[\ln(1+\hat{\mathscr{U}})\hat{\rho}(t)]_{mn} + \kappa\Big[-\frac{1}{2}(m+n)\rho_{mn}(t)\\ &\quad + \sqrt{(m+1)(n+1)}\,\rho_{m+1,n+1}(t)\Big].\end{aligned} \tag{J.27}$$

由于下面只需求生成函数的一次微商,故上式中的 $\ln(1+\hat{\mathscr{U}})$ 可近似成①$\hat{\mathscr{U}}$. 现在回到(J.24)式第三项. 将它近似成 $-\frac{1}{2}\sum_n\left(n+\frac{3}{2}\right)\rho_{n,n+2}(t)$ 后,我们即可推广生成函数方法来计算它. 定义

$$G_2(z,t)=\sum\rho_{n,n+2}(t)z^n,\qquad z\leqslant 1. \tag{J.28}$$

于是有

$$\sum_n\left(n+\frac{3}{2}\right)\rho_{n,n+2}(t)=\frac{\partial}{\partial z}G_2(z,t)\bigg|_{z=1}+\frac{3}{2}G_2(z,t)\bigg|_{z=1}. \tag{J.29}$$

利用(J.26)式和(J.27)式(其中 $\ln(1+\hat{\mathscr{U}})$ 已近似成 $\hat{\mathscr{U}}$)可将 $\rho_{n,n+2}$ 的方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{n,n+2}(t)=r_a(\rho_{n-2,n}-\rho_{n,n+2})+\kappa[(n+2)\rho_{n+1,n+3}-(n+1)\rho_{n,n+2}]. \tag{J.30}$$

从方程(J.30),即可得出 $G_2(z,t)$ 的变化方程[4]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G_2(z,t)&=r_a(z^2-1)G_2(z,t)\\&\quad-\kappa\left[(z-1)\frac{\partial}{\partial z}G_2(z,t)+\frac{1}{z}(z-1)G_2(z,t)\right].\end{aligned} \tag{J.31}$$

同前一样,上述方程的通解可表为它的一个特解与下述方程通解的乘积:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t)=-\kappa(z-1)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t). \tag{J.32}$$

而所需的特解可取为与 $t$ 无关的 $G_2^{(s)}(z)$,不难求出

$$G_2^{(s)}(z)=\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{r_a}{\kappa}z\left(1+\frac{1}{2}z\right)}. \tag{J.33}$$

方程(J.32)的通解则是 $(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}$ 的任意函数. 我们将此函数表为 $F_2\left(1+(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}\right)$. 于是有 $G_2(z,t)=F_2\left(1+(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}\right)G_2^{(s)}(z)$. 函数 $F_2$ 的具体形式将由 $G_2(z,t)$ 的初条件定出. 当 $t=0$ 时, $F_2\left(1+(z-1)\mathrm{e}^{-\kappa t}\right)$ 化为 $F_2(z)$,从而得出

$$F_2(z)\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{r_a}{\kappa}z\left(1+\frac{1}{2}z\right)}=G_2(z,0).$$

上式中的 $G_2(z,0)$ 可通过初始的相干态计算出,结果为

$$G_2(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-N}N^{n+1}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}}z^n,\qquad N=|\alpha|^2. \tag{J.34}$$

由此得(J.31)式的通解为

---

① 尽管作了这一近似,但由于 $\tau$ 取特定的值(J.6),故仍与通常的无规注入情况不同.

$$G_2(z,t) = G_2(1+(z-1)e^{-\kappa t},0)\frac{1}{z}(1-(z-1)e^{-\kappa t})e^{\frac{r_a}{\kappa}\left[(z-y_t)\left(1+\frac{1}{2}(z+y_t)\right)\right]}. \tag{J.35}$$

其中 $y_t$ 等于 $1+z_t$，由(I.58)式即得

$$y_t = 1+(z-1)e^{-\kappa t} \tag{J.36}$$

将上述 $G_2(z,t)$ 代入(J.29)式即可求出(J.24)右方第三项，其中系数 $\sqrt{(n+1)(n+2)}$ 已近似成 $(n+\frac{3}{2})$：

$$\sum_n\left(n+\frac{3}{2}\right)\rho_{n,n+2}(t) = \left(\frac{2r_a}{\kappa}+\frac{1}{2}-\frac{r_a}{N\kappa}\right)+\left(N-\frac{2r_a}{\kappa}-\frac{1}{2}+\frac{r_a}{N\kappa}\right)e^{-\kappa t}$$

$$\approx\left(\frac{2r_a}{\kappa}+\frac{1}{2}\right)+\left(N-\frac{2r_a}{\kappa}\right)e^{-\kappa t}. \tag{J.37}$$

代回(J.24)后，于是我们最终得出

$$\frac{1}{\bar{n}(t)}\overline{[\Delta a_2(t)]^2} = \frac{1}{4N}. \tag{J.38}$$

从上式可见，$\overline{[\Delta a_2(t)]^2}$ 可能比 $\frac{1}{4}$ 大也可能比 $\frac{1}{4}$ 小，视 $\bar{n}(t)$ 是比 $N$ 大还是小而定. 从(J.11)式看如果 $\frac{2r_a}{\kappa}>N$，则 $\overline{[\Delta a_2(t)]^2}$ 总比 $\frac{1}{4}$ 大，反之将总比 $\frac{1}{4}$ 小. 这种情况与理想腔不同. 在理想腔的情况 $\overline{[\Delta a_2(t)]^2}$ 总是比 $\frac{1}{4}$ 大[2] ($[\Delta a_2]^2$ 即 $(\Delta\hat{a}_T)^2$，由(J.23)式，$\delta_T^2$ 总大于 $\frac{1}{4}$).

稳恒时的平均光子数 $n_s=\frac{2\gamma_a}{\kappa}$，若 $\frac{2\gamma_a}{\kappa}<N$，则通过这种注入过程最终将实现稳恒的横向正交分量 $a_2$ 的涨落压缩态.

最后我们来简单地说明一下 $\overline{[\Delta a_1(t)]^2}$ 计算的问题. 从文献[2]中(10)和(11)式可知

$$\overline{[\Delta a_1(t)]^2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum_n n\rho_{nn}(t)-\sum_n\sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}(t)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_n\sqrt{(n+1)(n+2)}\rho_{n,n+2}(t). \tag{J.39}$$

由于上式右方第三项中系数为 $\sqrt{n+1}$，不是 $n$ 的多项式，导致用生成函数处理的困难. 在文献[4]中未再进行讨论.

附注：在文献[5]中，曾采用福克尔-普朗克方程和与它等价的随机微分方程讨论了由非线性相互作用所引起的高密度激子激光器输出场的正交分量挤压谱. 关

于福克尔-普朗克方程和随机微分方程,我们已在附录 E 中应用过.

## 参 考 文 献

1 Cao Changqi. Quantum Semiclass Opt. **7**:923,1995
2 Cao Changqi and Ding Xiaohong. Phys Rev A. **46**:6042,1992
3 C Benkert and K Rzazewski Phys Rev A. **47**:1564,1993
4 Cao Changqi. Quantum Semiclass Opt. **10**:601,1998
5 Liu Yuxi and Cao Changqi. Optics Communications. **165**:53,1999